УДК 510.5

Відтворення початкового розподілу температури тіла за неповних даних

Богдан Гера

д. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені В. Лазаряна, вул. І. Блажкевич, 12а, Львів, e-mail: gera@cmm.lviv.ua

Інтегральний вираз джерела ентропії термодинамічної системи використовується як критерій регуляризації в оберненій задачі визначення початкового стану теплопровідного тіла за відомими значеннями окремих інтегральних характеристик температури тіла. Отримано розв'язок сформульованої варіаційної задачі та умови незалежності вхідних даних. Наведено результати числових розрахунків.

Ключові слова: неповнота даних, незалежність даних, спостереження стану системи, температура, виробництво ентропії.

Вступ. Задача визначення функції початкового стану розподіленої еволюційної системи за даними про її стан у наступні моменти часу належить до погано обумовлених, некоректних обернених задач [1].

У процесі вивчення еволюційних задач із протилежним напрямком часу [2] виникає потреба регуляризації розв'язків. Такі дослідження показали суттєву залежність результатів від похибок вхідних даних. Якщо вхідні дані задачі неповні, то виникають труднощі у визначенні початкового стану.

За неповних даних, коли замість початкових умов відомо окремі значення стану системи або його інтегральні характеристики у різні моменти часу, розв'язок є неєдиний, тобто існує деяка множина функцій, кожна з яких задовольняє усі умови задачі. У такому разі потрібно вказати як з множини можливих вибрати найсприйнятливіший варіант розв'язку задачі. Для цього записують функціональний критерій, екстремальним значенням якого на множині допустимих функцій відповідає єдиний розв'язок відповідної оберненої задачі [3, 4].

Такий підхід, зважаючи на його математичну обґрунтованість, дозволив побудувати розрахункову схему для задач з неповними даними. Проте універсальність підходу не гарантує, що при побудові математичної моделі сформульовано адекватний критерій вибору найкращих функцій стану системи. Тому, прийнявши функціональний критерій певного вигляду, отримуємо розв'язки з обмеженими застосуваннями. Це визначається відповідністю обраного критерію особливостям досліджуваних процесів. Такий критерій має враховувати особливості термодинамічних систем та закономірності протікання у них процесів.

Для визначення початових умов еволюційного процесу, який за відсутності зовнішньої дії на систему описується рівнянням на зразок рівняння теплопровідності, застосовувався критерій мінімуму виробництва ентропії [5]. У даній роботі такий критерій використовується для отримання розв'язків задачі відтворення температурного поля теплопровідного тіла за невідомих початкових умов та заданих значеннях окремих інтегральних характеристик температури.

1. Постановка задачі

1.1. Співвідношення моделі. Задано значення інтегральних характеристик функції температури $T(x,t)$, тобто наступні умови

$$\int_0^{\tilde{t}}\int_\Omega \xi_j(x,t)T(x,t)dx = A_j\,, \quad \left(j=\overline{1,N}\right). \tag{1}$$

Тут $\left(0,\tilde{t}\right)$ — інтервал часу спостереження; Ω — область теплопровідного тіла з гладкою границею Γ, $\xi_j(x,t)$ — відомі функції, $t\in\left(0,\tilde{t}\right)$, $x=\left(x_1,\,x_2,\,x_3\right)\in\Omega$, A_j — відомі константи.

Функція $T(x,t)$ задовольняє однорідне рівняння теплопровідності

$$c(x)\frac{\partial T}{\partial t}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x_i}\right), \quad (x,t)\in\Omega\times\left(0,\tilde{t}\right) \tag{2}$$

де коефіцієнти теплоємності $c(x)$ та теплопровідності $\lambda(x)$ є додатними та обмеженими функціями.

При цьому граничну умову приймаємо у вигляді

$$\beta\frac{\partial T}{\partial\nu}+\alpha T=0\,, \quad (x,t)\in\Gamma\times\left(0,\tilde{t}\right), \tag{3}$$

де $\alpha=\alpha(x)$, $\beta=\beta(x)$ — задані невід'ємні неперервні функції на Γ, $\partial/\partial\nu$ — похідна по нормалі до поверхні Γ.

Для коректної постановки задачі до рівняння (2) окрім граничних умов (3) необхідно долучити початкові умови при $t=0$

$$T(x,0)=T_0(x)\,. \tag{4}$$

Для цього потрібно знати функцію $T_0(x)$. Оскільки функція $T_0(x)$ є невідомою і замість (4) маємо умови (1), які не повністю компенсують відсутність початкових умов, то для рівняння (2) отримуємо задачу з неповними даними.

1.2. Принцип мінімуму виробництва ентропії. Сформульований Пригожиним [6] принцип мінімального виробництва ентропії є загальним критерієм стаціонарності термодинамічної системи. Для неперервної системи виробництво ентропії запишемо у вигляді

$$P = \int_{\Omega} \sigma_s dx\,, \tag{5}$$

де σ_s — джерело ентропії.

Якщо теплопровідне тіло розглядати як термодинамічну систему з термодинамічними параметрами T (температура) — s (ентропія), то у разі лінійної залежності потоку тепла $\vec{J}$ від термодинамічної сили $\vec{X}$, джерело ентропії σ_s має вигляд $\sigma_s = \vec{J} \cdot \vec{X} = \lambda\left(\vec{\nabla} T\right)^2$. Тут $\vec{\nabla} T$ — градієнт температури, $\left(\vec{\nabla} T\right)^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\partial T / \partial x_i\right)^2$.

Підставимо у формулу (5) вираз для джерела ентропії та проінтегруємо її на інтервалі часу $\left(0, \tilde{t}\right)$. Вважаючи функцію, яка задає коефіцієнт теплопровідності неоднорідного тіла відомою, отримуємо функціонал від $T(x,t)$ вигляду

$$F(T) = \int_0^{\tilde{t}} \int_{\Omega} \lambda(x)\left[\vec{\nabla} T(x,t)\right]^2 dx dt\,. \tag{6}$$

Використаємо цей функціонал для відтворення поведінки системи, що не зазнає зовнішнього впливу. Згідно з принципом мінімального виробництва ентропії вибиратимемо такі функції для початкового розподілу температури, щоб функціонал $F(T)$ набував найменшого значення.

Зазначимо, що метод мінімізації функціоналу градієнта шуканої функції для інтерполяції фізичних полів, що не змінюються з часом і задані в окремих точках однорідного тіла, використовували в роботах [7, 8], а в [9] для неоднорідного теплопровідного тіла запропонована постановка задачі на основі функціоналу (6).

Інтегруючи (6) по частинах та враховуючи рівняння (2), запишемо цей функціонал у вигляді:

$$F(T) = \int_0^{\tilde{t}} \int_{\Gamma} T \lambda \frac{\partial T}{\partial \nu} d\gamma\, dt + \frac{1}{2}\int_{\Omega} c(x)\left[T^2(x,0) - T^2\left(x,\tilde{t}\right)\right] dx\,. \tag{7}$$

Розглянемо окремі випадки:

1) температура поверхні тіла не змінюється і $T\big|_{\Gamma} = 0$;

2) поверхня тіла теплоізольована $\left.\dfrac{\partial T}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = 0$.

В обох випадках отримаємо, що

$$F(T) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} c(x)\left[T^2(x,0) - T^2\left(x,\tilde{t}\right)\right] dx \tag{8}$$

і $F(T)$ залежить лише від початкових умов $T(x,0)=T_0(x)$ та розподілу $T(x,\tilde{t})$ в момент часу завершення спостережень. Якщо $\tilde{t}$ достатньо велике, то у першому випадку функція $T(x,\tilde{t})$ близька до нуля і величина $F(T)$ визначається початковою умовою. Коли поверхня тіла теплоізольована, то при великих $\tilde{t}$ температура $T(x,\tilde{t})$ наближається до середньої температури $T_c = \int\limits_{\Omega} T(x,0)dx$. Значення $F(T)$ при цьому залежатиме від відхилення початкового розподілу температури від усередненої за об'ємом температури тіла $\theta(x)=T(x,0)-T_c$.

1.3. Постановка задачі відтворення функції температури. Потрібно визначити початкові умови (4), тобто функцію $T_0(x)$, що забезпечує виконання співвідношень (1), якщо еволюційний процес описується рівняннями (2), (3). Оскільки існує нескінченна множина неперервних функцій $T_0(x)$, які задовольняють умови (1)-(3), то для визначення однієї з них використаємо умову мінімуму функціонального критерію (6).

Задачу визначення невідомого температурного поля $T(x,t)$ і його початкового стану $T_0(x)$ розглядаємо як задачу умовної мінімізації функціоналу

$$F(T) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\tilde{t}}\int\limits_{\Omega}\lambda(x)\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)^2 dxdt \tag{9}$$

при виконанні рівностей

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)-c(x)\frac{\partial T}{\partial t}=0, \quad (x,t)\in\Omega\times(0,\tilde{t}), \tag{10}$$

$$\beta\frac{\partial T}{\partial \nu}+\alpha T=0, \quad (x,t)\in\Gamma\times(0,\tilde{t}), \tag{11}$$

$$\int\limits_0^{\tilde{t}}\int\limits_{\Omega}\xi_j(x,t)T(x,t)dx = A_j, \left(j=\overline{1,N}\right). \tag{12}$$

2. Розв'язання задачі відтворення початкового розподілу температури тіла

2.1. Необхідні умови мінімізації функціоналу. Розв'язуючи задачу умовної мінімізації $F(T)$ отримуємо

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda(x)\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)+c(x)\frac{\partial \Phi}{\partial t}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)-\sum_{j=1}^{J}\sigma_j\xi_j=0, \ (x,t)\in\Omega\times(0,\tilde{t}) \tag{13}$$

$$\beta\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}+\alpha\Phi-\beta\frac{\partial T}{\partial \nu}=0, \quad (x,t)\in\Gamma\times(0,\tilde{t}); \tag{14}$$

$$\Phi(x,\tilde{t})=0, \Phi(x,0)=0, \quad x\in\Omega, \tag{15}$$

де $\Phi(x,t)$ — допоміжна функція, $\sigma_1,\ldots,\sigma_N$ — сталі параметри.

Отже, шукана функція $T(x,t)$ визначається як розв'язок взаємозв'язаної системи рівнянь у часткових похідних (10), (13) щодо функцій $T(x,t)$ і $\Phi(x,t)$ з початковими умовами (15), граничними умовами (11), (14) та додатковими умовами (12), які потрібні для знаходження постійних параметрів σ_j.

Оскільки умови (12) — лінійні, то для визначення невідомих параметрів σ_j отримуємо систему лінійних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{J} a_{ij}\sigma_j = b_i\,, \quad \left(i=\overline{1,J}\right). \tag{16}$$

Коефіцієнти системи (16) мають вигляд [10]

$$a_{ij} = \int_0^{\tilde t}\int_\Omega \xi_i(x,t)T_j(x,t)\,dx\,dt\,, \quad b_i = A_i - \int_0^{\tilde t}\int_\Omega \xi_i(x,t)T_0(x,t)\,dx\,dt\,,$$

і визначаються через складові функцій T і Φ поданих у вигляді сум

$$T(x,t) = \sum_{j=1}^{N}\sigma_j T_j(x,t); \tag{17}$$

$$\Phi(x,t) = \sum_{j=1}^{N}\sigma_j\left[\Phi_j(x,t)+\phi_j(x,t)\right]. \tag{18}$$

Ці функції є розв'язками систем рівнянь вигляду (10)-(13) з відомими граничними і часовими умовами. Функції ϕ_j $\left(j=\overline{1,N}\right)$ повністю визначаються лише через апаратні функції ξ_j, що входять в умови (12), і знаходяться як розв'язки задачі

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda(x)\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}\right)+c(x)\frac{\partial\phi_j}{\partial t}=\xi_j\,, \quad (x,t)\in\Omega\times\left(0,\tilde t\right); \tag{19}$$

$$\beta\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}+\alpha\phi_j=0\,, \quad (x,t)\in\Gamma\times\left(0,\tilde t\right); \tag{20}$$

$$\phi_j\left(x,\tilde t\right)=0\,, \quad x\in\Omega\,. \tag{21}$$

Якщо ϕ_j є визначеними, то можемо отримати T_j і Φ_j як розв'язки такої змішаної задачі

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda(x)\frac{\partial T_j}{\partial x_i}\right)-c(x)\frac{\partial T_j}{\partial t}=0\,,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda(x)\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_i}\right)-c(x)\frac{\partial\Phi_j}{\partial t}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda(x)\frac{\partial T_j}{\partial x_i}\right)=0\,,\ (x,t)\in\Omega\times\left(0,\tilde t\right), \tag{22}$$

$$\beta \frac{\partial T_j}{\partial \nu} + \alpha T_j = 0, \quad \beta \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu} + \alpha \Phi_j = 0, \quad (x,t) \in \Gamma \times \left(0, \tilde{t}\right); \tag{23}$$

$$\Phi_j(x,0) = \phi_j(x,0), \quad \Phi_j\left(x, \tilde{t}\right) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{24}$$

Враховуючи розв'язок задачі (22)-(24) та формули (17), (18), визначаємо температуру $T(x,t)$, а функцію $T_0(x)$ знаходимо як граничне значення $T(x,t)$ при $t \to 0$.

2.2. Умови незалежності вимірювань. Для коректності задачі (10)-(15), окрім існування розв'язків систем (19)-(21), потрібно щоб існував єдиний розв'язок системи лінійних рівнянь (16). Це означає, що функції $\xi_j(x,t)$ не можуть бути довільними. Вони вибираються таким чином, щоб кожне із співвідношень (12) давало незалежну додаткову інформацію про шукані функції. Запишемо умови для перевірки придатності функцій $\xi_j(x,t)$ для відтворення невідомого початкового розподілу температури.

Якщо прийняти, що функції $\phi_j(x,0)$, які визначаються з (19)-(21), є лінійно залежними, то отримуємо лінійну залежність $T_j(x,t)$. Тоді стовпці матриці з елементами a_{ij} (див. систему рівнянь (16)), будуть лінійно залежними і її визначник дорівнює нулю. Щоб цього не сталося, накладаємо додаткову вимогу на вигляд апаратних функцій $\xi_j(x,t)$, яку назвемо достатньою умовою незалежності вимірювань: функції $\xi_j(x,t)$ $\left(j = \overline{1,N}\right)$ повинні бути такими, щоб отримані при розв'язанні початково-крайових задач (19)-(21) функції $\phi_j(x,t)$ при $t = 0$ були лінійно незалежними в області Ω.

Для лінійної незалежності функцій $\phi_j(x,0)$ достатньо показати, що в області тіла знайдеться множина точок M_i $\left(i = \overline{1,N}\right)$ таких, що обчислені в них значення $c_{ij} = \phi_j(M_i,0)$ $\left(i = \overline{1,N},\ j = \overline{1,N}\right)$ є елементами матриці, визначник якої не дорівнює нулю.

Якщо умови незалежності вимірювань виконані, то функція $T(x,t)$, яка задовольняє співвідношення (10)-(12) і мінімізує функціонал (9), визначається з системи взаємозв'язаних рівнянь (10), (13) та умов (11), (12), (14), (15).

2.3. Числові дослідження. Числові розрахунки проведемо для теплопровідного шару, який у декартовій системі координат (x, y, z) займає область $0 \le x \le 1$. Поверхні шару $x = 0$ та $x = 1$ теплоізольовані. Значення A_j − відповідають замірам температури в окремих точках $0 < m_j < 1$ всередині шару в задані моменти часу $t = t_j$ $\left(j = \overline{1,N}\right)$, що реалізується з використанням узагальнених дельта-функцій при формуванні $\xi_j(x,t)$ у співвідношеннях (12). Розрахункові формули отримуються розвиненням шуканих функцій в ряди, як це зроблено в [10].

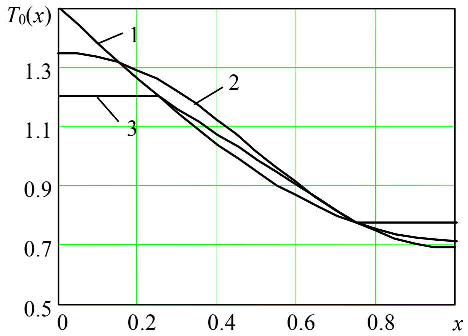

Рис. 1. Залежність відтвореного початкового розподілу температури для різних моментів часу задання температури (1 – тестова функція; криві 2 та 3 відповідають $t_j = 0{,}5\,\tilde{t}$ та $t_j = 0$)

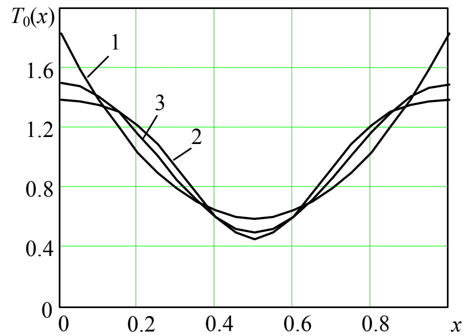

Рис. 2. Залежність відтвореного початкового розподілу температури для різної кількості точок задання температури при $t_j = 0{,}2\,\tilde{t}$ (1 – тестова функція; крива 2 – $N = 3$, $m_1 = 0{,}25$, $m_2 = 0{,}5$, $m_3 = 0{,}75$; крива 3 – $N = 4$, $m_1 = 0{,}1$, $m_2 = 0{,}4$, $m_3 = 0{,}6$, $m_4 = 0{,}9$

На рис. 1 показано порівняння функції початкового розподілу температури шару $T_0(x)$ (крива 1), який використовувався для моделювання даних, з результатами обчислень. Вхідні дані для оберненої задачі у цьому випадку задавалися лише у двох точках всередині шару $m_1 = 0{,}25$ та $m_2 = 0{,}75$. Як і слід було очікувати, якщо $t_j = 0$, тобто при визначенні розподілу температури не враховується процес теплопровідності, за мінімізації її першої похідної отримуємо функцію, що представлена на графіку ділянками прямих ліній (крива 3). При $t_j > 0$ початковий розподіл температури визначається із врахуванням характеру процесу теплопровідності, а отже отримуємо гладку функцію (крива 2), яка краще відповідає шуканому розподілу температури.

Завдяки збільшенню кількості точок із даними про температуру, вдається краще наблизити розрахункові функції до тестової, з якої отримувались дані для модельних випадків. Так, на рис. 2 для порівняння показано функції початкового розподілу: тестова функція $T_0(x)$ (крива 1) та отримані з розв’язку задачі при $N = 3$ (крива 2) та $N = 4$ (крива 3).

Числові дослідження також показали залежність отриманих результатів від вигляду вхідних даних для оберненої задачі, тобто від апаратних функцій $\xi_j(x,t)$, і необхідність надалі враховувати цей чинник при математичному моделюванні відтворення еволюційних процесів.

Висновки. Показано ефективність застосування функціоналу мінімального виробництва ентропії для відтворення початкового розподілу температури тіла у разі задання невеликої кількості її значень у наступні моменти часу.

Література

[1] *Тихонов А. Н.*, *Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 288 с.

[2] *Латтес Р.*, *Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. — М.: Мир, 1970. — 336 с.

[3] *Lions J. L.* Remarks on systems with uncomplete data // Variat. Methods in Geosciences. Proc. Int. Symp. (Norman. Oklah., Oct. 15-17, 1985). — Amsterdam, Elsevier, 1986. — p. 145-159.

[4] *Lions J. L.* Distributed systems with uncomlete data and Lagrange multiplies. — Lect. Notes in Math., 1986, 20. — № 1190.

[5] *Burak Ya., Chaplia Ye., Gera B.* Thermodynamic models and investigation methods of heterophase multicomponent systems // XXXV Sympozjon "Modelowanie w mechanice". — Gliwice: Politechnika Slaska. — 1996. — C. 29-34.

[6] *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. — М.: Мир, 1973. — 280 с.

[7] *Веселов В. В.*, *Гонтов Д. П.*, *Пустыльников Л. М.* Вариационный подход к задачам интерполяции физических полей. — М.: Наука, 1983. — 120 с.

[8] *Вабищевич П. Н.* Вариационный метод штрафа в задачах интерполяции и сглаживания на произвольной сетке наблюдений // Журн. вычисл. математики и математической физики. — 1985. — Т. 25, № 8. — С. 1252-1255.

[9] *Гера Б. В.* Восстановление физических полей в неоднородной среде // II Всесоюзн. конф. по механике неоднородных структур. — Львов: 1987. — Т 2. — С. 75.

[10] *Гера Б. В.* Відтворення температурного поля у теплопровідному тілі за неповних часових даних: Зб. наук. пр. — К.: ІПМЕ НАН України, 2001. — Вип. 13. — С. 129-137.

Restoring of Initial Distribution of Body Temperature Under Uncompleted Data

Bogdan Gera

The expression for source of entropy of thermodynamic system is used for regularization of the inverse problem of initial thermal condition determining on the basis of known integral temperature values. The solution of variational problem and conditions of data independence are obtained. The results of calculations are presented.

Восстановление начального распределения температуры тела при неполных данных

Богдан Гера

Интегральное выражение источника энтропии термодинамической системы используется в качестве критерия регуляризации в обратной задаче определения начального состояния теплопроводного тела при заданных значениях отдельных интегральных характеристик температуры тела. Получено решение вариационной задачи и условия независимости исходных данных. Приведены результаты численных расчетов.

Отримано 10.09.04