

Локально градієнтний підхід та вплив температури й домішок на поверхневий натяг у шарі

Ольга Грицина¹, Тарас Нагірний², Костянтин Червінка³

¹ к.ф.-м.н., с.н.с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, Україна, 79005, e-mail: gryt@cmm.lviv.ua

² д.ф.-м.н., професор, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, Україна, 79005; Зеленогурський Університет, вул. проф. Шафрана, 4, Зелена Гура, Польща, 65-516, e-mail: tnagirny@yahoo.com

³ к.ф.-м.н., Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, Україна, 79000, e-mail: kostiaa@yahoo.com

Модель локально неоднорідного двокомпонентного твердого розчину застосовано для дослідження напружено-деформованого стану та закономірностей розподілу температури й домішок у термопружному шарі. Отримані співвідношення використано для вивчення впливу температури та домішок на поверхневий натяг у шарі в процесі його нагріву та насичення.

Ключові слова: механотермодифузійні процеси, термопружний твердий розчин, локальна неоднорідність, поверхневий натяг.

Вступ. Відомо, що поведінка деформівних твердих тіл значною мірою визначається станом їх поверхні [1, 2]. З особливим станом приповерхневих областей тіла у літературі пов'язують міцність, розмірні ефекти меж міцності [3-5], текучості та параметрів довговічності [6-8], вплив на них полів різної фізичної природи тощо. Базовим поняттям у механіці поверхневих явищ є поверхневий натяг, який є інтегральною характеристикою розтягуючих приповерхневих напружень у тілі, вільному від зовнішнього силового навантаження. Очевидно, що поверхневий натяг залежить від температури тіла та наявності у ньому домішок.

Одним з ефективних підходів, що дозволяє описувати поведінку деформівних твердих тіл із врахуванням приповерхневих явищ, є локально градієнтний підхід у термомеханіці [9-11]. Згідно цього підходу простір параметрів стану у твердих розчинах розширено градієнтом хімічного потенціалу скелету, який ототожнюється з градієнтом енергії взаємодії. З використанням моделі локально градієнтного твердого розчину у роботах [5, 9-11, 13] та ін. на прикладі модельних задач вивчено вплив температури та домішок на приповерхневу неоднорідність, межу міцності та її розмірний ефект.

У даній роботі за локально градієнтного підходу досліджуються механотермодифузійні процеси в ізотропному шарі. Основна увага зосереджена на аналізі напружено-деформованого стану, на основі якого обчислюється поверхневий натяг та досліджується вплив на нього температури і домішок.

1. Ключова система рівнянь локально градієнтної механотермодифузії

Розглянемо термопружний твердий розчин, який складається з підсистем скелету (підсистема 1) та домішок (підсистема 2). Повна лінеаризована квазістатична система рівнянь локально градієнтної механотермодифузії двокомпонентного твердого розчину складається з рівнянь рівноваги та сумісності деформацій, балансу ентропії й маси підсистем скелету і домішок, а також визначальних співвідношень [5, 10]

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \hat{e} \times \vec{\nabla} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s + \sigma_s; \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho_1 - \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}_m) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{m1}, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial \tau} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{m2}; \quad (3)$$

$$\hat{\sigma} = 2\mu \hat{e} + [\lambda e - (3\lambda + 2\mu)(\alpha_t \theta + \alpha_m^1 \eta_1 + \alpha_m^2 \eta_2)] \hat{I},$$

$$S = \frac{c_v}{T_*} \theta + (3\lambda + 2\mu) \alpha_t e + \alpha_{tm}^1 \eta_1 + \alpha_{tm}^2 \eta_2,$$

$$\rho_k = (3\lambda + 2\mu) \alpha_m^k e + \alpha_{tm}^k \theta + \alpha_m^{k1} \eta_1 + \alpha_m^{k2} \eta_2, \quad (k = 1, 2)$$

$$\vec{\pi}_m = \beta_m \vec{\nabla} \eta_1; \quad (4)$$

$$\vec{j}_{mk} = -\gamma_{kt} \vec{\nabla} \theta - \gamma_{k1} \vec{\nabla} \eta_1 - \gamma_{k2} \vec{\nabla} \eta_2, \quad (k = 1, 2)$$

$$\vec{j}_s = -\gamma_t \vec{\nabla} \theta - \gamma_{1t} \vec{\nabla} \eta_1 - \gamma_{2t} \vec{\nabla} \eta_2. \quad (5)$$

Тут $\hat{e}, \hat{\sigma}$ — тензори деформацій та напружень; e — кульова складова тензора деформацій; \vec{j}_s, \vec{j}_{mk} ($k=1,2$) — вектори потоку ентропії та мас підсистем твердого розчину; $\vec{\pi}_m$ — вектор пружного зміщення маси скелету; ρ_k, η_k ($k=1,2$) — збурення густини маси та хімічних потенціалів скелету й домішок відносно їх початкових значень ρ_*, H_* ($k=1,2$); S — ентропія; θ — збурення температури відносно її початкового значення T_* ; σ_s — виробництво ентропії; τ — час; \hat{I} — одиничний тензор; $\vec{\nabla}$ — вектор-оператор Гамільтона; $\lambda, \mu, c_v, \alpha_t, \alpha_m^k, \alpha_{tm}^k, \alpha_m^{ki}, \beta_m, \gamma_{kt}, \gamma_{ki}, \gamma_t$ ($k, i=1, 2$) — характеристики матеріалу; " \cdot " та " \times " — знаки скалярного та векторного добутків. Тут і надалі приймаємо, що значення індексу $k=1$ стосується підсистеми скелету, а $k=2$ — домішок.

Аналіз балансових рівнянь (3) та визначальних співвідношень (4), (5) показує, що врахування локальної градієнтності хімічного потенціалу скелета призводить до зміни швидкості дифузійних процесів і впливає на характер рівноважного розподілу компонент твердого розчину.

2. Нагрів та насичення термопружного шару

2.1. Постановка задачі та методика розв’язування. Застосуємо систему рівнянь локально градієнтної механотермодифузії (1)-(5) для дослідження впливу домішок та температури на поверхневий натяг у двокомпонентному термопружному шарі. З цією метою розглянемо вільний від зовнішнього силового навантаження шар, який займає область $|x| \leq l$ евклідового простору. Приймаємо, що у початковий момент часу $\tau = 0$ температура тіла є однорідною і дорівнює θ_0 , а рівноважні розподіли хімічних потенціалів скелету та домішок описуються функціями $\eta_{k0}(x)$ ($k = 1, 2$). При $\tau > 0$ на зовнішніх поверхнях шару $x = \pm l$ задаються постійні, відмінні від початкових, значення температури θ_a ($\theta_a \neq \theta_0$) й хімічних потенціалів його компонент η_k^a ($\eta_k^a \neq \eta_{k0}(\pm l) \equiv \eta_k^0$, $k = 1, 2$).

Приймаючи до уваги характер зовнішньої дії, за розв’язуючі функції виберемо тензор напружень $\hat{\sigma}$, температуру θ та хімічні потенціали η_k ($k = 1, 2$) компонент твердого розчину. У розглядуваному випадку ці функції залежать лише від координати x та часу τ .

Якщо знехтувати впливом масоперенесення та деформування на процес теплопровідності, а також впливом кульової складової тензора деформацій на густини компонент твердого розчину, то система рівнянь (1)-(5) набуде вигляду

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_\gamma - a_1 \eta_1 - a_2 \eta_2 - a_3 \theta) = 0, \quad \gamma = \{y, z\}; \quad (6)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} - \kappa_1 \eta_1 - \kappa_2 \eta_2 - \kappa_\theta \theta \right) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (d_1 \eta_1 + d_2 \eta_2 + d_\theta \theta) - \alpha \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} - a_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0.$$

Тут $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — компоненти тензора напружень $\hat{\sigma}$; $\alpha, a, a_i, a_\theta, \kappa_k, \kappa_\theta, d_k, d_\theta$ ($i = \overline{1,3}, k = 1, 2$) — сталі величини, які визначаються характеристиками матеріалу. Зазначимо, що співвідношення (6) є рівнянням рівноваги та рівнянням типу Бельтрамі-Мітчелла; (7) є рівнянням теплопровідності; перше та друге рівняння системи (8) є рівняннями балансу маси континууму центрів мас та підсистеми домішок відповідно.

Крайові умови сформульованої задачі приймаємо у вигляді

$$\theta = \theta_0, \quad \eta_k = \eta_{k0}(x) \quad (k = 1, 2) \quad \text{при} \quad \tau = 0;$$

$$\vec{n} \cdot \hat{\sigma} = 0, \quad \theta = \theta_a, \quad \eta_k = \eta_k^a \quad (k = 1, 2) \quad \text{при} \quad x = \pm l. \quad (9)$$

Функції $\eta_{k0}(x)$ описують початковий рівноважний розподіл домішок, тому, на основі результатів отриманих у роботі [5], для них приймаємо

$$\eta_{10}(x) = \eta_1^0 + B_0 \left[\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - 1 \right], \quad \eta_{20}(x) = \eta_2^0 - \alpha B_0 \left[\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - 1 \right], \quad (10)$$

де $\xi = \sqrt{\kappa_1 - \alpha \kappa_2}$, $B_0 = (\kappa_1 \eta_1^0 + \kappa_2 \eta_2^0 + \kappa_\theta \theta_0) / \xi^2$.

Зроблені вище припущення дозволяють розв'язати крайову задачу у три послідовних етапи: на першому — визначити температурне поле у шарі з рівняння теплопровідності (7) та відповідних крайових умов (9); на другому — знайти хімічні потенціали скелету та домішок із системи рівнянь (8), відповідних початкових та граничних умов (9); на третьому — обчислити компоненти тензора напружень на основі (6), (9) та інтегральних умов

$$\int_{-l}^l \sigma_\gamma dx = 0, \quad \int_{-l}^l x \sigma_\gamma dx = 0 \quad \gamma = \{y, z\}, \quad (11)$$

які повинні справджуватися у довільних поперечних перерізах $y = \text{const}$, $z = \text{const}$ шару.

2.2. Розподіли температури та компонент твердого розчину в шарі. Згідно запропонованої методики, на першому етапі на основі співвідношення (7) визначаємо температуру тіла. Розв'язком рівняння теплопровідності, що задовольняє крайовим умовам задачі, є [12]

$$\theta(x, \tau) = \theta_a + 2(\theta_0 - \theta_a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{k_n l} \cos(k_n x) \exp(-k_n^2 a \tau). \quad (12)$$

Тут $k_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2l}$, ($n \in \mathbf{N}$).

На другому етапі отриманий розподіл температури в тілі (12) використаємо для знаходження хімічних потенціалів скелету $\eta_1(x, \tau)$ та домішок $\eta_2(x, \tau)$. Для визначення $\eta_k(x, \tau)$ використаємо методику, запропоновану у роботі [13]. Тому подамо шукані функції $\eta_k(x, \tau)$ у вигляді суми двох складових

$$\eta_k(x, \tau) = \eta_k^s(x) + \eta_k^d(x, \tau), \quad (k = 1, 2). \quad (13)$$

Складові $\eta_k^s(x)$ є розв'язками такої стаціонарної задачі

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \eta_1^s}{dx^2} - \kappa_1 \eta_1^s - \kappa_2 \eta_2^s &= \kappa_\theta \theta_a, \\ \alpha \frac{d^2 \eta_1^s}{dx^2} + \frac{d^2 \eta_2^s}{dx^2} &= 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\eta_1^s = \eta_1^a, \quad \eta_2^s = \eta_2^a \quad \text{при } x = \pm l. \quad (15)$$

Відповідно до співвідношень (7)-(9) та (13)-(15) складові $\eta_k^d(x, \tau)$ повинні задовольняти рівнянням

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_1^d}{\partial x^2} - \kappa_1 \eta_1^d - \kappa_2 \eta_2^d &= \kappa_\theta (\theta - \theta_a), \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (d_1 \eta_1^d + d_2 \eta_2^d) - \alpha \frac{\partial^2 \eta_1^d}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta_2^d}{\partial x^2} &= (a_\theta - ad_\theta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}; \end{aligned} \quad (16)$$

нульовим граничним

$$\eta_1^d = 0, \quad \eta_2^d = 0 \quad \text{при } x = \pm l \quad (17)$$

і таким початковим умовам

$$\begin{aligned} \eta_1^d &= \eta_1^0 + B_0 \left[\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - 1 \right] - \eta_1^s(x), \\ \eta_2^d &= \eta_2^0 - \alpha B_0 \left[\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - 1 \right] - \eta_2^s(x) \quad \text{при } \tau = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Зазначимо, що права частина системи рівнянь (16) є відомою функцією координати та часу.

Розв'язок задачі (14), (15) має вигляд

$$\begin{aligned} \eta_1^s(x) &= \eta_1^a + (B_a + B_a^\theta) \left[\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - 1 \right], \\ \eta_2^s(x) &= \eta_2^a - \alpha (B_a + B_a^\theta) \left[\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Тут $B_a = (\kappa_1 \eta_1^a + \kappa_2 \eta_2^a) / \xi^2$, $B_a^\theta = \theta_a \kappa_\theta / \xi^2$.

Для знаходження розв'язку задачі (16)-(18) використаємо розвинення шуканих функцій у ряд Фур'є. В результаті отримуємо

$$\begin{aligned} \eta_1^d(x, \tau) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{k_n l} \left[(M_{1n} - M_{2n}) \exp(-\lambda_n \tau) + M_{3n} \exp(-k_n^2 a \tau) \right] \cos(k_n x), \\ \eta_2^d(x, \tau) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k_n l} \cdot \frac{k_n^2 + \kappa_1}{\kappa_2} \left[(M_{1n} - M_{2n}) \exp(-\lambda_n \tau) + \right. \\ &\quad \left. + M_{4n} \exp(-k_n^2 a \tau) \right] \cos(k_n x). \end{aligned} \quad (20)$$

Тут

$$M_{1n} = \eta_1^0 - \eta_1^a - \frac{\kappa_1(\eta_1^0 - \eta_1^a) + \kappa_2(\eta_2^0 - \eta_2^a)}{k_n^2 + \xi^2}, \quad M_{2n} = M_{3n} + \frac{(\theta_0 - \theta_a)\kappa_\theta}{k_n^2 + \xi^2},$$

$$M_{3n} = \frac{(\theta_0 - \theta_a)\lambda_n}{(k_n^2 + \xi^2)(\lambda_n - ak_n^2)} \left[\kappa_\theta(1 - ad_2) + \kappa_2(ad_\theta - a_\theta) \right],$$

$$M_{4n} = M_{3n} + \frac{(\theta_0 - \theta_a)\kappa_\theta}{k_n^2 + \kappa_1}, \quad \lambda_n = \frac{k_n^2(k_n^2 + \xi^2)}{(k_n^2 + \kappa_1)d_2 - \kappa_2d_1}.$$

На основі формул (13), (19), (20), для хімічних потенціалів $\eta_k(x, \tau)$ одержуємо

$$\eta_1(x, \tau) = \eta_1^a + (B_a + B_a^\theta) \left[\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - 1 \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{k_n l} \times$$

$$\times \left[(M_{1n} - M_{2n}) \exp(-\lambda_n \tau) + M_{3n} \exp(-k_n^2 a \tau) \right] \cos(k_n x),$$

$$\eta_2(x, \tau) = \eta_2^a - \alpha (B_a + B_a^\theta) \left[\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - 1 \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k_n l} \cdot \frac{k_n^2 + \kappa_1}{\kappa_2} \times$$

$$\times \left[(M_{1n} - M_{2n}) \exp(-\lambda_n \tau) + M_{4n} \exp(-k_n^2 a \tau) \right] \cos(k_n x). \quad (21)$$

Аналіз співвідношень (21) показує, що хімічні потенціали компонент твердого розчину змінюються від заданих значень η_1^a , η_2^a на поверхнях $x = \pm l$ до екстремальних — на серединній поверхні $x = 0$ шару

$$\eta_1(0, \tau) = \eta_1^a + (B_a + B_a^\theta) \left[\frac{1}{\text{ch}(\xi l)} - 1 \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{k_n l} \times$$

$$\times \left[(M_{1n} - M_{2n}) \exp(-\lambda_n \tau) + M_{3n} \exp(-k_n^2 a \tau) \right],$$

$$\eta_2(0, \tau) = \eta_2^a - \alpha (B_a + B_a^\theta) \left[\frac{1}{\text{ch}(\xi l)} - 1 \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k_n l} \cdot \frac{k_n^2 + \kappa_1}{\kappa_2} \times$$

$$\times \left[(M_{1n} - M_{2n}) \exp(-\lambda_n \tau) + M_{4n} \exp(-k_n^2 a \tau) \right]. \quad (22)$$

Зазначимо, що у формулах (21) складові, пропорційні B_a^θ та M_{in} ($i = \overline{2,4}$), відображають вплив температурного поля на зміну хімічних потенціалів скелету та домішок. Як частковий випадок за ізотермічних умов ($\theta = \theta_a = \text{const}$) на основі формул (21) отримуємо співвідношення

$$\eta_1^c(x, \tau) = \eta_1^a + (B_a + B_a^\theta) \left[\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - 1 \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{k_n l} M_{1n} \exp(-\lambda_n \tau) \cos(k_n x),$$

$$\eta_2^c(x, \tau) = \eta_2^a - \alpha(B_a + B_a^\theta) \left[\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - 1 \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k_n l} \cdot \frac{k_n^2 + \kappa_1}{\kappa_2} \times \\ \times M_{1n} \exp(-\lambda_n \tau) \cos(k_n x), \quad (23)$$

які описують закономірності розподілу хімічних потенціалів скелету й домішок у пружному шарі внаслідок його дифузійного насичення.

При $\tau \rightarrow \infty$ для хімічних потенціалів скелету та домішок отримуємо

$$\eta_1^\infty(x) = \eta_1^s(x), \quad \eta_2^\infty(x) = \eta_2^s(x). \quad (24)$$

Неоднорідність розподілу η_k^∞ ($k = 1, 2$) у стаціонарному стані зумовлена врахуванням у модельному описі локальної градієнтності хімічного потенціалу скелету. Аналіз співвідношень (19), (24) показує, що для $\xi l \sim 1$ (тонкі шари) неоднорідність розподілу притаманна всій області тіла, тоді як для “товстих” шарів ($\xi l \gg 1$) неоднорідність має суто приповерхневий характер. Хімічні потенціали η_k^∞ ($k = 1, 2$) монотонно змінюються від заданих поверхневих η_1^a , η_2^a до екстремальних значень $\eta_1^a + (B_a + B_a^\theta)(1/\text{ch}(\xi l) - 1)$, $\eta_2^a - \alpha(B_a + B_a^\theta)(1/\text{ch}(\xi l) - 1)$ на серединній поверхні тіла. Якщо в модельному описі знехтувати ефектами локальної неоднорідності, то в усталеному режимі отримуємо постійне по товщині шару значення хімічного потенціалу, а отже і густини домішок.

2.3. Напружений стан шару. На третьому етапі, з використанням співвідношень (12) і (21), які описують закономірності розподілу температури та хімічних потенціалів компонент твердого розчину в термопружному шарі, для ненульових компонент σ_y та σ_z тензора напружень $\hat{\sigma}$ на основі рівнянь (6), умов (9), (11) одержуємо

$$\sigma_y(x, \tau) = \sigma_z(x, \tau) = A(B_a + B_a^\theta) \left[\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n l} \left[a_1 - a_2 \frac{k_n^2 + \kappa_1}{\kappa_2} \right] \times \\ \times \left[(M_{1n} - M_{2n}) \exp(-\lambda_n \tau) + M_{5n} \exp(-k_n^2 a \tau) \right] \left[(-1)^{n+1} \cos(k_n x) - \frac{1}{k_n l} \right], \quad (25)$$

$$\text{де } A = a_1 - \alpha a_2, \quad M_{5n} = M_{3n} + (\theta_0 - \theta_a) \frac{a_3 \kappa_2 - a_2 \kappa_\theta}{a_1 \kappa_2 - a_2 (k_n^2 + \kappa_1)}.$$

Напруження σ_y та σ_z на поверхнях $x = \pm l$ шару є розтягуючими. При відході від поверхонь у глибину тіла при деякому $x = \pm l_a$ ці напруження дорівнюють нулю і при $|x| < l_a$ стають стискаючими.

Відомо, що характерні часи процесів теплопровідності та дифузії суттєво відрізняються. Коли зміна напруженого стану двокомпонентного шару визначається тепловими процесами, тоді з формул (25) одержуємо

$$\sigma_y^\theta(x, \tau) = \sigma_z^\theta(x, \tau) = A(B_a + B_a^\theta) \left[\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n l} \left[a_1 - a_2 \frac{k_n^2 + \kappa_1}{\kappa_2} \right] \times \\ \times \left\{ M_{1n} - M_{2n} + M_{5n} \exp(-k_n^2 \alpha \tau) \right\} \left[(-1)^{n+1} \cos(k_n x) - \frac{1}{k_n l} \right]. \quad (26)$$

Якщо ж температура практично досягнула усталеного рівня, то з плином часу зміна напруженого стану тіла зумовлюється протіканням дифузійних процесів. Для таких часів із співвідношень (25) одержуємо

$$\sigma_y^c(x, \tau) = \sigma_z^c(x, \tau) = A(B_a + B_a^\theta) \left[\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n l} \times \\ \times \left\{ (M_{1n} - M_{2n}) \exp(-\lambda_n \tau) + M_{5n} \right\} \left[(-1)^{n+1} \cos(k_n x) - \frac{1}{k_n l} \right]. \quad (27)$$

При $\tau \rightarrow \infty$

$$\sigma_y^\infty(x) = \sigma_z^\infty(x) = A(B_a + B_a^\theta) \left[\frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right]. \quad (28)$$

Величина напружень σ_y^∞ визначається поверхневими значеннями хімічних потенціалів η_i^a і температури θ_a . Зазначимо, що у рамках класичної моделі термопружного твердого розчину рівноважні розподіли температури та домішок не впливають на напружений стан шару.

Зупинимося детальніше на аналізі максимальних напружень у шарі. Найбільшими розтягуючими напруженнями є поверхневі напруження σ_y , σ_z . Для них на основі співвідношень (25) маємо

$$\sigma_y(\pm l, \tau) = \sigma_z(\pm l, \tau) = A(B_a + B_a^\theta) \left[1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(k_n l)^2} \times \\ \times \left[a_1 - a_2 \frac{k_n^2 + \kappa_1}{\kappa_2} \right] \left\{ (M_{1n} - M_{2n}) \exp(-\lambda_n \tau) + M_{5n} \exp(-k_n^2 \alpha \tau) \right\}. \quad (29)$$

Залежно від характеристик матеріалу та зовнішньої дії (значень θ_a , η_k^a) поверхневі напруження з плином часу можуть збільшуватися або зменшуватися. Якщо ці характеристики є такими, що процеси теплопровідності та масоперенесення призводять до збільшення поверхневих напружень, то найбільшими будуть напруження при $\tau \rightarrow \infty$. Для них на основі формул (28) одержуємо

$$\sigma_y^\infty(\pm l) = \sigma_z^\infty(\pm l) = A(B_a + B_a^\theta) \left[1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right]. \quad (30)$$

Якщо ж внаслідок нагріву (охолодження) шару та його насичення домішками поверхневі напруження зменшуються, то найбільшими будуть значення поверхневих напружень у початковий момент часу $\tau = 0$

$$\sigma_y(\pm l, 0) = \sigma_z(\pm l, 0) = AB_0 \left[1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right]. \quad (31)$$

У разі, коли нагрів (охолодження) тіла понижує рівень поверхневих напружень, а насичення домішками — підвищує, то найбільшими можуть бути напруження у початковий ($\tau = 0$) момент часу або напруження, які досягаються при $\tau \rightarrow \infty$. Це залежить від параметрів зовнішньої дії θ_a , η_{2a} та властивостей матеріалу.

Якщо процес теплопровідності призводить до збільшення поверхневих напружень, а процес масоперенесення — до їх зменшення, то найбільшими будуть поверхневі напруження у деякий момент часу τ_* ($0 < \tau_* < \infty$). Це зумовлено тим, що температура в шарі змінюється значно швидше, ніж відбувається перерозподіл домішок. При $\tau \rightarrow \tau_*$ температурна складова поверхневих напружень σ_y , σ_z практично досягає свого найбільшого значення, тоді як складова, зумовлена перерозподілом домішок є нехтувально малою. При $\tau > \tau_*$, коли температурна складова поверхневих напружень практично не змінюється, визначальним стає вплив на поверхневі напруження процесу масоперенесення, що призводить до зменшення значень поверхневих напружень. Для конкретних фізичних властивостей тіла значення τ_* може бути визначено на основі співвідношення (29).

Зазначимо також, що величина поверхневих напружень в усталеному режимі залежить від товщини шару l , тому формулу (30) можна трактувати як таку, що описує розмірний ефект поверхневих напружень. Для товстих шарів ($\xi l \gg 1$) складовою пропорційною $\text{th}(\xi l)/(\xi l)$ можна знехтувати і тоді $\sigma_y^\infty(\pm l) = \sigma_z^\infty(\pm l) = A(\kappa_1 \eta_1^a + \kappa_2 \eta_2^a + \kappa_\theta \theta_a) / \xi^2$.

3. Поверхневий натяг

Використаємо отриманий розв'язок задачі для дослідження впливу температури та домішок на величину поверхневого натягу f_p , який є інтегральною характеристикою розтягуючих приповерхневих напружень. У розглядуваному випадку

$$f_p(\tau) = \int_{l_a}^l \sigma_\gamma(x, \tau) dx, \quad \gamma = \{y, z\} \quad (32)$$

де l_a ($0 < l_a < l$) є точкою переходу розтягуючих напружень у стискаючі.

На основі формул (25) та (32) для поверхневого натягу f_p у шарі одержуємо

$$f_p(\tau) = A(B_a + B_a^\theta) l_a \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \left(1 - \frac{l}{l_a} \frac{\text{sh}(\xi l_a)}{\text{sh}(\xi l)} \right) + 2l_a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(k_n l)^2} \left(a_1 - a_2 \frac{k_n^2 + \kappa_1}{\kappa_2} \right) \times \\ \times \left[(M_{1n} - M_{2n}) \exp(-\lambda_n \tau) + M_{3n} \exp(-k_n^2 a \tau) \right] \cdot \left[1 + (-1)^n \frac{l}{l_a} \sin(k_n l_a) \right]. \quad (33)$$

А точка переходу розтягуючих напружень у стискаючі визначається з рівняння

$$A(B_a + B_a^\theta) \left[\frac{\text{ch}(\xi l_a)}{\text{ch}(\xi l)} - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n l} \cdot \left[a_1 - a_2 \frac{k_n^2 + \kappa_1}{\kappa_2} \right] \times \\ \times \left\{ (M_{1n} - M_{2n}) \exp(-\lambda_n \tau) + M_{5n} \exp(-k_n^2 a \tau) \right\} \left[(-1)^{n+1} \cos(k_n l_a) - \frac{1}{k_n l} \right] = 0. \quad (34)$$

Загальний розв'язок рівняння (34) в аналітичному вигляді записати складно. Для усталеного режиму ($\tau \rightarrow \infty$) розв'язок цього рівняння буде мати вигляд

$$l_a^\infty = \frac{1}{\xi} \ln \left[2 \frac{\text{sh}(\xi l)}{\xi l} \right]. \quad (35)$$

Якщо додатково прийняти, що $\xi l \gg 1$, то останнє співвідношення набуде вигляду

$$l_a^\infty = l \left[1 - \frac{\ln(\xi l)}{\xi l} \right]. \quad (36)$$

Враховуючи дане співвідношення, для поверхневого натягу в усталеному режимі f_p^∞ отримуємо

$$f_p^\infty = A \frac{\kappa_1 \eta_1^a + \kappa_2 \eta_2^a + \kappa_\theta \theta_a}{\xi^3} \left[1 - \frac{1}{\xi l} - \frac{\ln(\xi l)}{\xi l} \right]. \quad (37)$$

Із збільшенням товщини шару (див. рис. 1), поверхневий натяг зростає, прямуючи до значення $f_p^* = A(\kappa_1 \eta_1^a + \kappa_2 \eta_2^a + \kappa_\theta \theta_a) / \xi^3$. Залежність характерного значення f_p^* від температури θ_a та хімічного потенціалу домішок η_2^a є лінійною.

У процесі нагріву шару координата точки переходу розтягуючих напружень у стискаючі не

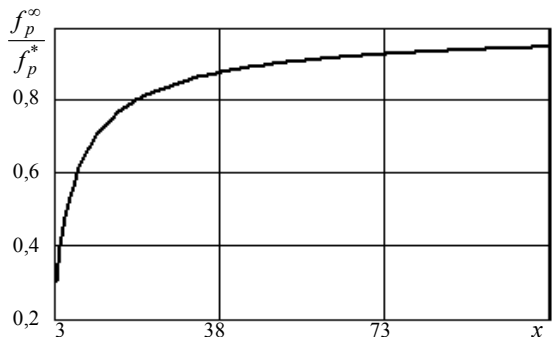


Рис. 1. Залежність поверхневого натягу в шарі від його товщини

змінюється [14], тобто значення l_a практично не залежить від часу і визначається формулою (36). Тому, якщо перерозподіл напружень у шарі зумовлений його нагрівом (охолодженням), а розподіл домішок незначно відрізняється від початкового, то на основі формул (26), (32) та (36) для поверхневого натягу можна записати

$$f_p^\theta = \frac{AB_0}{\xi} \left(1 - \frac{1}{\xi l} - \frac{\ln(\xi l)}{\xi l} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi}{k_n} \frac{2}{k_n l} \left[a_1 - a_2 \frac{k_n^2 + \kappa_1}{\kappa_2} \right] \times \\ \times M_{5n} \exp(-k_n^2 a \tau) \left(\cos\left(\frac{k_n}{\xi} \ln(\xi l)\right) - 1 + \frac{\ln(\xi l)}{k_n l} \right). \quad (38)$$

Висновки. Найбільшими напруженнями у вільному від зовнішнього силового навантаження шарі є поверхневі напруження. Залежно від параметрів матеріалу та характеру зовнішньої дії ці напруження з часом можуть монотонно збільшуватися (зменшуватися), або ж до деякого моменту часу $\tau = \tau_*$ збільшуватися (зменшуватися), а при $\tau > \tau_*$ — зменшуватися (збільшуватися). Таким чином, вибором температурного режиму можна досягати потрібного рівня найбільших напружень у шарі в процесі його дифузійного насичення.

У рівноважному стані координата точки переходу приповерхневих розтягуючих напружень у стискаючі не залежить від температури та густини домішок. Разом із тим, температура та густина домішок можуть суттєво впливати на величину поверхневих напружень.

Отримані співвідношення можна використати для дослідження впливу температури та домішок на поверхневий натяг і його розмірний ефект як в процесі насичення й нагріву, так і в усталеному режимі.

У рівноважному стані зі збільшенням товщини шару значення поверхневого натягу, віднесене до величини поверхневого натягу у півпросторі з такими ж характеристиками матеріалу, монотонно збільшується, прямуючи до одиниці. Показано, що залежність поверхневого натягу від заданих на границі значень температури та хімічного потенціалу домішок є лінійною.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки Фонду фундаментальних досліджень Міністерства науки та освіти України.

Література

- [1] Подстригач Я. С., Повстенко Ю. З. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. — К.: Наук. думка, 1985. — 200 с.
- [2] Беляев А., Жемчужина Е. А. Поверхностные явления в металлургических процессах. — М.: Металлургиздат, 1952. — 144 с.
- [3] Бартнев Г. М., Зуев Ю. С. Прочность и разрушение высокоэластических материалов. — М.-Л.: Химия, 1964. — 388 с.
- [4] Комник Ю. Ф. Физика металлических пленок. — М.: Атомиздат, 1979. — 264 с.

- [5] Бурак Я. И., Нагирный Т. С., Грицина О. Р., Червинка К. А. Поверхностные напряжения в слое. Влияние температуры и примесей на прочность // Проблемы прочности. — 2000. — № 6. — С. 35–43.
- [6] Васильев В. З., Каптелин С. Ю. О физико-механической природе эффекта упрочнения материала нитевидных кристаллов и тонких нитей // Прикл. мех. и техн. физика. — 1992. — № 4. — С. 135–141.
- [7] Коршунов А. И., Новиков С. А. Влияние масштабного эффекта на параметры долговечности // Проблемы прочности. — 1990. — № 7. — С. 56–58.
- [8] Новиков Н. В., Левитас В. И., Шестаков С. И. Численное моделирование прочности и долговечности конструкций с учетом масштабного эффекта // Проблемы прочности. — 1991. — № 5. — С. 37–43.
- [9] Бурак Я. И., Нагирный Т. С. Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах // Прикладная механика. — 1992. — Т. 28, № 12. — С. 3–23.
- [10] Бурак Я. И., Нагирный Т. С., Грицина О. Р. Про термодинамічне моделювання приповерхневих явищ в термомеханіці // ДАН УРСР. Сер. А. — 1991. — № 9. — С. 66–70.
- [11] Нагирный Т. С., Червинка К. А. Поверхневі напруження в шарі. Вплив температури на приповерхневий натяг та міцність // Доп. НАН України. — 2000. — № 10. — С. 57–62.
- [12] Лыков А. В. Теория теплопроводности. — М.: Высшая шк., 1967. — 599 с.
- [13] Бурак Я. И., Нагирный Т. С., Грицина О. Р. Вплив домішок на приповерхневу неоднорідність та міцність шару в процесі його насичення // Доп. НАН України. — 2001. — № 4. — С. 51–57.

Locally Gradient Approach and Temperature and Admixtures Effect on Surface Tension in the Layer

Olha Hrytsyna, Taras Nahirnyy, Kostiantyn Tchervinka

The model of the local nonhomogeneous binary solid solution is applied to investigation of stressed-strained state and regularities of temperature and admixture distributions in thermoelastic layer. The obtained relations are used for study of temperature and admixture influence on surface tension in the layer during its heating and saturation process.

Локально градиентный подход и влияние температуры и примесей на поверхностное натяжение в слое

Ольга Грицина, Тарас Нагирный, Константин Червинка

Модель локально градиентного двухкомпонентного твердого раствора использована для исследования напряженно-деформированного состояния и закономерностей распределения температуры и примесей в термоупругом слое. Полученные соотношения использованы для изучения влияния температуры и примесей на поверхностное натяжение в слое в процессе его нагрева и диффузионного насыщения.

Отримано 17.09.04