УДК 517.958:519.6

Гетерогенний підхід до моделювання процесу теплоперенесення в багатошарових конструкціях із врахуванням малих товщин окремих шарів

Лілія Дяконюк[1], Ярема Савула[2]

[1] к. ф.-м. н., асистент, кафедра прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів

[2] д. ф.-м. н., професор, кафедра прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail: savula@franko.lviv.ua

У роботі на основі варіаційного підходу побудовано математичну модель нестаціонарного процесу теплоперенесення у середовищах з тонкими покриттями та включеннями. Для врахування малих товщин окремих шарів використано гетерогенний підхід, який передбачає пониження вимірності ключових рівнянь математичної моделі в областях тонких включень. Сформульовані варіаційна задача і теорема про існування та єдиність її розв'язку. Розроблена чисельна схема дослідження описаних задач, яка базується на напіваналітичному методі скінченних елементів для дискретизації варіаційної задачі за просторовими змінними та різницевою схемою Кранка-Ніколсона для дискретизації за часом. Сформульовані теореми про існування, єдиність та швидкість збіжності числового розв'язку. Наведено приклад стаціонарного процесу в тришаровій параболічній області.

Ключові слова: теплоперенесення, багатошарове середовище, варіаційне формулювання, напіваналітичний метод скінченних елементів.

Вступ. У багатьох випадках структура середовищ, в яких відбуваються процеси теплоперенесення, є неоднорідною. Якщо розміри неоднорідностей співмірні з розмірами тіла, то закономірності процесів вивчають на основі розв'язків відповідних крайових задач математичної фізики [3-5]. У випадку, коли один з характерних розмірів включення є значно меншим від інших, виникають труднощі в моделюванні та використанні відомих числових методів. Для подолання цієї проблеми використовують різні підходи. Це, зокрема, моделі, запропоновані в роботах [4, 5]. У даній роботі розвивається запропонований у публікаціях [1, 2] альтернативний гетерогенний підхід, який передбачає пониження вимірності ключових рівнянь математичної моделі в областях тонких включень.

1. Формулювання задачі

Дослідимо процес теплоперенесення у багатошаровому середовищі складної форми, яке займає область $V = \bigcup V_i,\ i = \overline{1,n}$, з різними фізичними характеристиками кожного шару V_i. Позначимо через J_2 множину, утворену індексами j областей V_j, які відповідають тонким шарам. Множину, утворену рештою індексів, позначимо через J_3; $J_2 \bigcup J_3 = \{1,\ldots n\}$. Границя кожної з областей V_i ($i \in J_2 \bigcup J_3$) складається з бічних S_i та лицевих поверхонь S_i^+ та S_i^-, які є ліпшицевими. Приймаємо, що на границі контакту з зовнішнім середовищем задано граничні умови третього роду, а у початковий момент часу $\tau = 0$ відомі розподіли шуканих функцій.

Зазначимо, що таке формулювання дозволяє досліджувати процес теплоперенесення у шаруватих тілах з різноманітними фізико-геометричними характеристиками. Зокрема, формулювання охоплює тіла з тонкими покриттями та включеннями, шаруваті середовища, у яких усі шари мають малі товщини, області без тонких включень тощо. Використання у формулюванні задач граничних умов третього роду дозволяє також шляхом вибору коефіцієнтів у цій умові досліджувати крайові задачі з умовами першого і другого родів. При цьому для кожного з типів задач дослідження питань коректності вимагає окремого розгляду.

Віднесемо кожну з областей V_i до деяких систем координат $\left(\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)},\alpha_3^{(i)}\right)$, $i \in J_2 \bigcup J_3$. Тоді процес теплопровідності в області V_i опишемо рівнянням

$$c_i \rho_i \frac{\partial T_i}{\partial \tau} = div\left(\lambda_i grad T_i\right) + q_i, \quad i = \overline{1,n}\,, \tag{1}$$

де c_i — питома теплоємність, λ_i — коефіцієнт теплопровідності, ρ_i — густина маси, q_i — об'ємна густина теплових джерел, $T_i = T_i\left(\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)},\alpha_3^{(i)},\tau\right)$ — функція розподілу температури в області V_i, τ — час, $\tau \in [0,\Theta]$.

Задамо також такі граничні та початкові умови

$$\left.\left(-\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial \nu^{(i)}} - a_i\left(T_i - T_{c_i}\right)\right)\right|_{S^i} = 0\,, \tag{2}$$

$$\left.T_i\right|_{\tau=0} = T_i^0\,, \tag{3}$$

де

$$S^i = \begin{cases} S_1 \bigcup S_1^-, & \text{для } i = 1, \\ S_i, & \text{для } i = \overline{2,n-1}; \\ S_n \bigcup S_n^+, & \text{для } i = n, \end{cases}$$

$\nu^{(i)}$ — зовнішня нормаль до поверхні S^i, a_i — коефіцієнт теплообміну з середовищем, температура якого T_{c_i}, T_i^0 — розподіл температури в *i*-му шарі у початковий момент часу $\tau = 0$.

Зазначимо, що на границях контакту областей V_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ задаються умови ідеального теплового контакту.

Ієрархічну математичну модель процесу теплоперенесення у багатошаровому середовищі будуємо на основі варіаційного підходу, використовуючи математичну модель тонкого шару V_j [1, 2], серединна поверхня якого є Ω_j, $j\in J_2$. При цьому вважаємо, що розподіл шуканої функції температури у довільному поперечному перерізі шару відбувається за лінійним законом

$$T\left(\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)},\alpha_3^{(j)},\tau\right)=t_1^{(j)}\left(\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)},\tau\right)+\frac{2\alpha_3^{(j)}}{h_j}t_2^{(j)}\left(\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)},\tau\right),\ j\in J_2, \tag{4}$$

де h_j — товщина j-го шару, $t_1^{(j)}\left(\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)},\tau\right)$, $t_2^{(j)}\left(\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)},\tau\right)$ — шукані коефіцієнти розвинення.

Враховуючи це, математичну модель можна подати як наступну систему диференціальних рівнянь різної вимірності за просторовими координатами

$$c_k\rho_k\frac{\partial T_k}{\partial\tau}=\sum_{l=1}^{3}\frac{1}{H_1^{(k)}H_2^{(k)}}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_l^{(k)}}\lambda_k\frac{H_1^{(k)}H_2^{(k)}}{H_l^{(k)}}\frac{\partial T_k}{\partial\alpha_l}\right),\ k\in J_3; \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&c_j\rho_j h_j\frac{\partial t_1^{(j)}}{\partial\tau}+c_j\rho_j\frac{h_j^{\,2}}{6}\left(k_1^{(j)}+k_2^{(j)}\right)\frac{\partial t_2^{(j)}}{\partial\tau}=\\
&=\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{h_j}{A_1^{(j)}A_2^{(j)}}\frac{\partial}{\partial\alpha_i^{(j)}}\left(\lambda_j\frac{A_{3-i}^{(j)}}{A_i^{(j)}}\frac{\partial t_1^{(j)}}{\partial\alpha_i^{(j)}}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{h_j^{\,2}}{6A_1^{(j)}A_2^{(j)}}\frac{\partial}{\partial\alpha_i^{(j)}}\left(\lambda_j\frac{A_{3-i}^{(j)}}{A_i^{(j)}}\left(k_{3-i}^{(j)}-k_i^{(j)}\right)\frac{\partial t_2^{(j)}}{\partial\alpha_i^{(j)}}\right)\right)+\\
&+\left(1+k_1^{(j)}\frac{h_j}{2}\right)\left(1+k_2^{(j)}\frac{h_j}{2}\right)q_n^{(j)+}+\left(1-k_1^{(j)}\frac{h_j}{2}\right)\left(1-k_2^{(j)}\frac{h_j}{2}\right)q_n^{(j)-}-q_1^{(j)}=0,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&c_j\rho_j\frac{h_j^{\,2}}{6}\left(k_1^{(j)}+k_2^{(j)}\right)\frac{\partial t_1^{(j)}}{\partial\tau}+c_j\rho_j\frac{h_j}{3}\frac{\partial t_2^{(j)}}{\partial\tau}=\\
&=\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{h_j^{\,2}}{6A_1^{(j)}A_2^{(j)}}\frac{\partial}{\partial\alpha_i^{(j)}}\left(\lambda_j\frac{A_{3-i}^{(j)}}{A_i^{(j)}}\left(k_{3-i}^{(j)}-k_i^{(j)}\right)\frac{\partial t_1^{(j)}}{\partial\alpha_i^{(j)}}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{h_j}{3A_1^{(j)}A_2^{(j)}}\frac{\partial}{\partial\alpha_i^{(j)}}\left(\lambda_j\frac{A_{3-i}^{(j)}}{A_i^{(j)}}\frac{\partial t_2^{(j)}}{\partial\alpha_i^{(j)}}\right)\right)+\left(1+k_1^{(j)}\frac{h_j}{2}\right)\left(1+k_2^{(j)}\frac{h_j}{2}\right)q_n^{(j)+}+
\end{aligned}$$

$$+\left(1-k_1^{(j)}\frac{h_j}{2}\right)\left(1-k_2^{(j)}\frac{h_j}{2}\right)q_n^{(j)-}+\frac{4\lambda_j}{h_j}t_2^{(j)}-q_2^{(j)}=0,\ j\in J_2, \tag{7}$$

де $H_1^{(k)},H_2^{(k)}$ — коефіцієнти Ляме k-го шару; $A_1^{(j)},A_2^{(j)}$ — коефіцієнти першої квадратичної форми серединних поверхонь, а $k_1^{(j)},k_2^{(j)}$ — коефіцієнти кривизни тонкого j-го шару,

$$q_1^{(j)}=\int\limits_{-h_j/2}^{h_j/2}q_j\left(1+k_1^{(j)}\alpha_3^{(j)}\right)\left(1+k_2^{(j)}\alpha_3^{(j)}\right)d\alpha_3^{(j)},$$

$$q_2^{(j)}=\frac{2}{h_j}\int\limits_{-h_j/2}^{h_j/2}q_j\left(1+k_1^{(j)}\alpha_3^{(j)}\right)\left(1+k_2^{(j)}\alpha_3^{(j)}\right)\alpha_3^{(j)}d\alpha_3^{(j)},$$

$$q_n^{(j)+}=-\lambda_j\frac{\partial T_j}{\partial\alpha_3^{(j)}},\ \text{для}\ \alpha_3^{(j)}=\frac{h_j}{2};\quad q_n^{(j)-}=\lambda_j\frac{\partial T_j}{\partial\alpha_3^{(j)}},\ \text{для}\ \alpha_3^{(j)}=-\frac{h_j}{2}.$$

На границі з зовнішнім середовищем шукані функції повинні задовольняти співвідношення

$$\left.\left(-\lambda_k\frac{\partial T_k}{\partial\nu^{(k)}}-a_k\left(T_k-T_{c_k}\right)\right)\right|_{S^k}=0,\ k\in J_3, \tag{8}$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\lambda_jh_j}{A_i^{(j)}}\frac{\partial t_1^{(j)}}{\partial\alpha_i^{(j)}}+\frac{1}{6}\frac{\lambda_jh_j^{\,2}}{A_i^{(j)}}\left(k_{3-i}^{(j)}-k_i^{(j)}\right)\frac{\partial t_2^{(j)}}{\partial\alpha_i^{(j)}}\right)\nu_i^{(j)}=$$

$$=a_j\left(h_jt_1^{(j)}+\frac{h_j^{\,2}}{6}k_\Gamma^{(j)}t_2^{(j)}-t_1^c\right),$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{6}\frac{\lambda_jh_j^{\,2}}{A_i^{(j)}}\left(k_{3-i}^{(j)}-k_i^{(j)}\right)\frac{\partial t_1^{(j)}}{\partial\alpha_i^{(j)}}+\frac{h_j}{3}\frac{\lambda_j}{A_i^{(j)}}\frac{\partial t_2^{(j)}}{\partial\alpha_i^{(j)}}\right)\nu_i^{(j)}=$$

$$=a_j\left(\frac{h_j^{\,2}}{6}k_\Gamma^{(j)}t_1^{(j)}+\frac{h_j}{3}t_2^{(j)}-t_2^c\right),\quad j\in J_2 \tag{9}$$

та початкові умови

$$T_k\left(\alpha_1^{(k)},\alpha_2^{(k)},\alpha_3^{(k)},0\right)=T_k^0\left(\alpha_1^{(k)},\alpha_2^{(k)},\alpha_3^{(k)}\right),\quad k\in J_3, \tag{10}$$

$$h_jt_1^{(j)}\left(\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)},0\right)+\frac{h_j^{\,2}}{6}\left(k_1^{(j)}+k_2^{(j)}\right)t_2^{(j)}\left(\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)},0\right)=t_1^{(j)0},$$

$$\frac{h_j^{\,2}}{6}\left(k_1^{(j)}+k_2^{(j)}\right)t_1^{(j)}\left(\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)},0\right)+\frac{h_j}{3}t_2^{(j)}\left(\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)},0\right)=t_2^{(j)0},\ \ j\in J_2. \qquad (11)$$

Тут

$$t_1^c=\int_{-h_j/2}^{h_j/2}T_c\left(1+k_\Gamma^{(j)}\alpha_3^{(j)}\right)d\alpha_3^{(j)},\qquad t_2^c=\frac{2}{h_j}\int_{-h_j/2}^{h_j/2}T_c\left(1+k_\Gamma^{(j)}\alpha_3^{(j)}\right)\alpha_3^{(j)}d\alpha_3^{(j)},$$

$$k_\Gamma^{(j)}=k_1^{(j)}\left(\nu_2^{(j)}\right)^2+k_2^{(j)}\left(\nu_1^{(j)}\right)^2,$$

$$t_1^{(j)0}=\int_{-h_j/2}^{h_j/2}T_j^0\left(1+k_1^{(j)}\alpha_3^{(j)}\right)\left(1+k_2^{(j)}\alpha_3^{(j)}\right)d\alpha_3^{(j)},$$

$$t_2^{(j)0}=\frac{2}{h_j}\int_{-h_j/2}^{h_j/2}T_j^0\left(1+k_1^{(j)}\alpha_3^{(j)}\right)\left(1+k_2^{(j)}\alpha_3^{(j)}\right)\alpha_3^{(j)}d\alpha_3^{(j)},$$

де $\nu_1^{(j)}$, $\nu_2^{(j)}$ — координати нормалі до границі серединної поверхні тонкого шару.

Для забезпечення однозначності розв'язку сформульованої задачі потрібно врахувати ще умови контакту, які задають рівність температур та теплових потоків на поверхнях контакту областей, тобто

$$T_j\Big|_{s_j^+}=T_{j+1}\Big|_{s_j^+},$$

$$\lambda_j\frac{\partial T_j}{\partial\nu^{(j)}}\bigg|_{s_j^+}=\lambda_{j+1}\frac{\partial T_{j+1}}{\partial\nu^{(j+1)}}\bigg|_{s_j^+},\ \text{для}\ j,j+1\in J_3. \qquad (12)$$

Якщо один або оба з контактуючих шарів є тонкими, то

$$\left(t_1^{(j)}+t_2^{(j)}\right)\Big|_{s_j^+}=T_{j+1}\Big|_{s_j^+},\ \text{для}\ j\in J_2,\ j+1\in J_3, \qquad (13)$$

$$T_j\Big|_{s_j^+}=\left(t_1^{(j+1)}-t_2^{(j+1)}\right)\Big|_{s_j^+},\ \text{для}\ j\in J_3,\ j+1\in J_2, \qquad (14)$$

$$\left(t_1^{(j)}+t_2^{(j)}\right)\Big|_{s_j^+}=\left(t_1^{(j+1)}-t_2^{(j+1)}\right)\Big|_{s_j^+},\ \text{для}\ j\in J_2,\ j+1\in J_2. \qquad (15)$$

Таким чином, для визначення невідомих шуканих функцій температури ми отримали замкнену систему диференціальних рівнянь другого порядку (5)-(7) та умови (8)-(15).

2. Варіаційне формулювання задачі

Потрібно знайти невідомі функції $T_k \in L_2\left(W_2^1(V_k);(0,\Theta)\right)$, $k \in J_3$; $t_j = \left(t_1^{(j)},\ t_2^{(j)}\right)$; $t_1^{(j)},\ t_2^{(j)} \in L_2\left(W_2^1\left(\Omega_j\right),\ (0,\Theta)\right)$, $j \in J_2$, які задовольняють наступні рівняння для довільних функцій $u_k \in W_2^1(V_k)$, $u_1^{(j)},\ u_2^{(j)} \in W_2^1\left(\Omega_j\right)$

$$\sum_{k\in J_3} A^{(k)}\left(T_k, u^{(k)}\right) + \sum_{j\in J_2} a^{(j)}\left(t_j, u^{(j)}\right) + \sum_{k\in J_3} M^{(k)}\left(T_k', u^{(k)}\right) +$$

$$+\sum_{j\in J_2} m^{(j)}\left(t_j', u^{(j)}\right) = \sum_{k\in J_3}\left(f_k, u^{(k)}\right) + \sum_{j\in J_2}\left(f^{(j)}, u^{(j)}\right), \tag{16}$$

$$\sum_{k\in J_3} M^{(k)}\left(T_k\left(\alpha_1^{(k)},\alpha_2^{(k)},\alpha_3^{(k)},0\right) - T_k^0, u^{(k)}\right) +$$

$$+\sum_{j\in J_2} m^{(j)}\left(t^{(j)}\left(\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)},0\right) - t_0^{(j)}, u^{(j)}\right) = 0$$

та головні умови на границях контакту шарів.

Білінійні форми $A^k\left(T_k, u^{(k)}\right), a^j\left(t_j, u^{(j)}\right), M^k\left(T_k', u^{(k)}\right), m^j\left(t_j', u^{(j)}\right)$ та лінійні форми $\left(f_k, u^{(k)}\right)$, $\left(f^{(j)}, u^{(j)}\right)$ у варіаційних рівняннях наведені в роботі [1].

3. Числовий алгоритм

Для розв'язування сформульованої варіаційної задачі використаємо алгоритм, який базується на використанні напіваналітичного методу скінченних елементів для апроксимацій за просторовими змінними та різницевої схеми Кранка-Ніколсона для дискретизації за часовою змінною.

Тому подамо шукані функції у вигляді таких розвинень

$$T_k^h\left(\alpha_1^{(k)},\alpha_2^{(k)},\alpha_3^{(k)},\tau\right) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} T_{ij}^k(\tau)\tilde{\varphi}_j\left(\alpha_1^{(k)},\alpha_2^{(k)}\right)\tilde{\psi}_i\left(\alpha_3^{(k)}\right),$$

$$t_1^{jh}\left(\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)},\tau\right) = \sum_{i=1}^{N} t_{1i}^{(j)}(\tau)\tilde{\varphi}_i\left(\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)}\right),$$

$$t_2^{jh}\left(\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)},\tau\right) = \sum_{i=1}^{N} t_{2i}^{(j)}(\tau)\tilde{\varphi}_i\left(\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)}\right), \tag{17}$$

де $\tilde{\varphi}_j\left(\alpha_1^{(k)},\alpha_2^{(k)}\right)$, $\tilde{\varphi}_i\left(\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)}\right)$ — відомі базисні функції методу скінченних елементів, а $\tilde{\psi}_i\left(\alpha_3^{(k)}\right)$ на відрізку $[-1,1]$ можна подати як

$$\psi_1(\xi)=\frac{1+\xi}{2}, \quad \psi_2(\xi)=\frac{1-\xi}{2}, \quad \psi_i(\xi)=\Phi_{i-1}(\xi), \quad i=3,4,\ldots, \tag{18}$$

де $\Phi_i(\xi)=\sqrt{\frac{2i-1}{2}}\int\limits_{-1}^{\xi}P_{i-1}(t)\,dt$, $P_i(t)$ — поліноми Лежандра, N,M — відповідно кількість базисних функцій $\tilde{\varphi}_j\left(\alpha_1^{(k)},\alpha_2^{(k)}\right)$ та $\tilde{\psi}_i\left(\alpha_3^{(k)}\right)$ на одному скінченному елементі, ξ — координата локального базису.

Враховуючи (17)-(18) у формулах (16), отримуємо дискретизовану за просторовими змінними задачу

$$\sum_{k\in J_3}A^k\left(T_k^h,u^{(k)}\right)+\sum_{j\in J_2}a^j\left(t_j^h,u^{(j)}\right)+\sum_{k\in J_3}M^k\left(T_k'^h,u^{(k)}\right)+\sum_{j\in J_2}m^j\left(t_j'^h,u^{(j)}\right)=$$

$$=\sum_{k\in J_3}\left(f_k,u^{(k)}\right)+\sum_{j\in J_2}\left(f^{(j)},u^{(j)}\right),$$

$$\sum_{k\in J_3}M^k\left(T_k^h\left(\alpha_1^{(k)},\alpha_2^{(k)},0\right)-T_k^0,u^{(k)}\right)+\sum_{j\in J_2}m^j\left(t_j^h\left(\alpha_1^{(j)},\alpha_2^{(j)},0\right)-t_j^0,u^{(j)}\right)=0\,. \tag{19}$$

При використанні зазначених напівдискретних апроксимацій побудовано енергетичне рівняння

$$\sum_{k\in J_3}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|T_k^h\right\|^2+\sum_{j\in J_2}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|t_j^h\right\|^2+\sum_{k\in J_3}\left\|T_k^h\right\|^2+\sum_{j\in J_2}\left\|t_j^h\right\|^2=$$

$$=\sum_{k\in J_3}\left(f_k,T_k^h\right)+\sum_{j\in J_2}\left(f^j,t_j^h\right), \tag{20}$$

в якому застосована енергетична норма.

З рівняння (20) можна отримати такі апріорні оцінки напівдискретного наближення шуканого розв'язку

$$\left\|T^h(t)\right\|_H^2+\int\limits_0^t\left\|T^h(\tau)\right\|_U^2d\tau\le\left\|T_0\right\|_H^2+\frac{1}{C}\int\limits_0^t\left\|T^h(\tau)\right\|_U^2d\tau\le$$

$$\le\left\|T_0\right\|_H^2+\int\limits_0^t\left\|T^h(\tau)\right\|_U^2d\tau\le\int\limits_0^t\left\|f(\tau)\right\|_H^2d\tau, \tag{21}$$

$$\left\|T^h(t)\right\|\le e^{-\alpha^2t}\left\|T_0\right\|+\int\limits_0^te^{-\alpha^2(t-\tau)}\left\|f(\tau)\right\|d\tau\,. \tag{22}$$

Вони показують, що напівдискретні апроксимації $\left\{T^h\right\}$ утворюють обмежену множину в просторі $L^\infty\left(L^2\left(V\right);\left(0,\Theta\right)\right)\cap L^2\left(U;\left(0,\Theta\right)\right)$.

Теорема 1. Сформульована варіаційна задача (16) має і до того ж єдиний розв'язок $T^h\in L^\infty\left(L^2\left(V\right);\left(0,\Theta\right)\right)\cap L^2\left(U;(0,\Theta)\right)$, який однозначно визначається розвиненнями (17).

Тут U — простір функцій, які належать простору $W_2^1\left(V\right)$ і які задовольняють головні умови на границях контакту шарів.

Зазначимо, що доведення сформульованої теореми базується на підході, запропонованому в роботі [3], та врахуванні теореми про властивості білінійних форм, сформульованої та доведеної в статтях [1, 2].

Теорема 2. Нехай T — розв'язок варіаційної задачі, побудованої без врахування малих товщин окремих шарів, $T\in H^{2S}\left(\Omega\times\left[-\frac{H}{2},\frac{H}{2}\right]\right)$, $T_h^{M,R}$ — числовий розв'язок варіаційної задачі ієрархічної моделі, в рівняннях якої знехтувано членами порядку $O\left(\gamma^{R+1}\right)$, де $\gamma=\max\left(\left|k_j\right|\frac{h_j}{2}\right)$, $j\in J_2$. Тоді швидкість збіжності характеризується оцінкою

$$\left\|T-T_h^{M,R}\right\|\le\hat{C}_1\frac{H}{2\sqrt{M\left(M+1\right)}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left\|L_iT\right\|^2}+\mu_2\hat{C}_2\gamma^{R+1}+\mu_2\hat{C}_3\frac{d^{\min(p,2S)}}{p^{2S-1}}\left|t^R\right|,\quad(23)$$

де p — порядок апроксимації Гальоркіна, d — максимальний діаметр скінченних елементів, H — товщина тіла.

Доведення теореми базується на використанні декомпозиції похибки, властивостей апроксимацій Гальоркіна та властивостей білінійних форм в енергетичній нормі оператора. Зауважимо, що застосування напівдискретизаційної процедури Гальоркіна приводить до задачі Коші, яку розв'язуємо за допомогою різницевого методу Кранка-Ніколсона. Для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що виникає в результаті застосування схеми, використовуємо метод Гауса для стрічкових матриць.

4. Приклад

Розглянемо стаціонарний процес теплоперенесення в двовимірній тришаровій криволінійній області, серединна поверхня кожного шару якої є параболою, еквідистантною до параболи cx^2 у декартовій системі координат (x, y, z), $x\in\left[0,1\right]$.

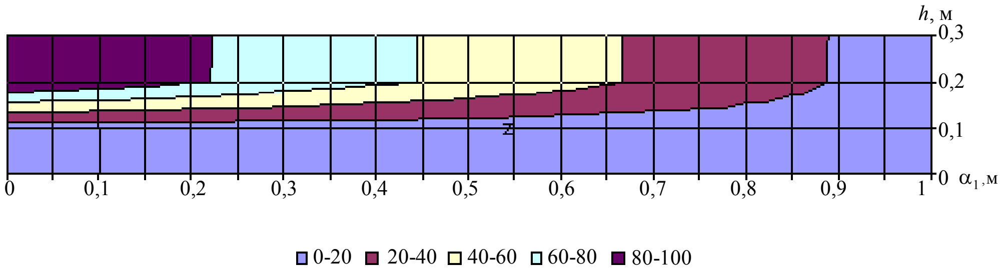

Рис. 1. Розподіл температури у тришаровій параболічній області

Товщина кожного шару постійна і дорівнює 0,1 м. На зовнішній поверхні S_1^- підтримується стала температура $T_{c1} = 10\ K$, а на поверхні S_3^+ — температура зовнішнього середовища змінюється за законом Ньютона з коефіцієнтом теплообміну $800\ \text{Äæ}/(\text{Ê}\cdot\text{ì}^{\,2}\cdot\text{ñ})$ та температурою зовнішнього середовища $T_{c3} = C_1\alpha_1^{(3)} + C_2$, де $C_1 = -90$ К/м, $C_2 = 100$ К, а бічні поверхні теплоізольовані. Коефіцієнти теплопровідності 1 і 3 шарів $750{,}009\ \text{Äæ}/(\text{Ê}\cdot\text{ì}\ \cdot\text{ñ})$, а другого — $1{,}119\ \text{Äæ}/(\text{Ê}\cdot\text{ì}\ \cdot\text{ñ})$.

На рис. 1 показано розподіл температури, отриманий в результаті числового експерименту з 20 скінченними елементами з коефіцієнтом параболи $c = 0{,}1$.

Проводились порівняння числових розв'язків із значеннями температури в тришаровій плоскій області з такими ж характеристиками матеріалу та крайовими умовами. Результати відрізняються в межах обчислювальної похибки, що відповідає очікуваним даним.

Висновки. У роботі побудовано математичну модель теплоперенесення у середовищах з тонкими покриттями та включеннями. Для її побудови використано гетерогенний підхід, який базується на варіаційному формулюванні і дозволяє враховувати малі товщини тонких шарів та включень. Запропоновано числовий алгоритм розв'язування сформульованої варіаційної задачі, який базується на використанні апроксимацій напіваналітичного методу скінченних елементів та різницевої схеми Кранка-Ніколсона.

Побудовано енергетичне рівняння та встановлено апріорні оцінки, а також сформульовані теореми про існування, єдиність та швидкість збіжності числового розв'язку. Наведені результати показують коректність запропонованої математичної моделі.

Література

[1] *Дяконюк Л., Кухарський В., Савула Я.* Математичне моделювання процесів теплопровідності у багатошарових середовищах із тонкими включеннями // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. — Львів. — 2000. — Т. 1. — С. 212-215.

[2] *Дяконюк Л. М.* Аналіз варіаційної задачі ієрархічної моделі пониженої вимірності теплопровідності в багатошарових середовищах з тонкими включеннями // Волинський математичний вісник. — Вип. 8. — 2001. — С. 61-64.
[3] *Ладыженска О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 407 с.
[4] *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. — К.: Наук. думка, 1995. — 459 с.
[5] *Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. — К.: Наук. думка, 1991. — 432 с.

Heterogeneous Approach to Modeling of Process of Heat Transfer in Multilayer Designs Considering Small Thickness of Separate Layers

Liliya Dyakonuk, Yarema Savula

In present work the mathematical model of non-stationary heat transfer in environments with thin coverings and inclusions is constructed on the basis of the variational approach. For modeling of small thickness of separate layers the heterogeneous approach is used which provides dimensional reduction of key equations of the mathematical model in the regions of thin inclusions. The numerical method for the above-mentioned class of problems based on semianalitical Finite Element Method for the space-variable discretization and Finite Difference Method for time discretization has been developed. The theorems of existence, uniqueness and speed of convergence of the numerical decision are formulated. The example of research of stationary process of heat transfer in a parabolic area with three layers is presented.

Гетерогенный поход к моделированию процесса теплопереноса в многослойных конструкциях с учетом малых толщин отдельных слоев

Лилия Дяконюк, Ярема Савула

В работе на основании вариационного похода построена математическая модель нестационарного процесса теплопереноса в средах с тонкими покрытиями и включениями. Для учета малых толщин отдельных слоев использован гетерогенный подход, который предусматривает снижения размерности уравнений математической модели в областях тонких включений. Сформулированы вариационная задача и теорема о существовании и единственности ее решения. Разработана числовая схема решения исследуемых задач, базирующаяся на полуаналитическом методе конечных элементов для дискретизации вариационной задачи по пространственных переменных и разностной схеме Кранка-Николсона для дискретизации по времени. Сформулированы теоремы о существовании, единственности и скорости сходимости числового решения. Приведен пример исследования стационарного процесса теплопроводности в трехслойной параболической области.

Отримано 28.01.05