УДК 510.633+164.04

Про тотожність логічних операцій та арифметичного додавання індексів булевих функцій

Ігор Дуцяк

к. т. н., доцент, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 67, Київ, 01000, e-mail: dutsyak@rambler.ru

Проаналізовано можливості заміни логічних операцій над аргументами булевих функцій арифметичним додаванням індексів цих функцій. Прийнято, що індексами булевих функцій є десяткові числа, які відповідають значенням функцій, проінтерпретованим як двійкові числа. Обґрунтовано теореми щодо тотожності логічних операцій та арифметичного додавання індексів функцій для кон'юнкції, диз'юнкції, строгої диз'юнкції, а також обернених функцій. Оскільки всі булеві функції можна виразити через антикон'юнкцію або антидиз'юнкцію, то використання доведених теорем уможливлює заміну логічних операцій будь-яких булевих функцій арифметичним додаванням їх індексів, що значно спрощує обчислення.

Ключові слова: моделювання процесів обробки знань, булеві функції, арифметичні операції.

Вступ. Однією з важливих проблем моделювання інтелектуальної діяльності людини є реалізація логічного отримання нових знань з набору фактів і правил: «Кожен інтелектуальний об'єкт повинен володіти здатністю логічно отримувати інтелектуальні знання з наявного опису реального світу» [1]. Людина формує знання реченнями природної мови, суттю яких є фіксування відношень між множинами. Ці відношення можна записати формулами булевої алгебри у разі неоднозначного [2] та однозначного [3] їх фіксування. У підсумку виникає можливість здійснювати автоматичну обробку знань за допомогою дій над цими формулами. Одним із методів автоматичної обробки знань є формування висновку про відношення між двома множинами на підставі знання відношень кожної з них до третьої. У процесі генерування правил виводу такого типу виникає потреба отримання з диз'юнкції кількох булевих формул виду $(x f_i y) \vee (x f_j y) \vee \ldots \vee (x f_m y)$ однієї формули $(x f_z y)$. Функції можуть містити не тільки два, як у наведеному прикладі, а довільну кількість аргументів.

Такі задачі можна розв'язувати шляхом побудови таблиці істинності диз'юнкції вихідних формул $(x f_i y) \vee (x f_j y) \vee \ldots \vee (x f_m y)$. У підсумку отримують функцію виду $(x f_e y)$, значення якої тотожні значенням формули $(x f_i y) \vee (x f_j y) \vee \ldots \vee (x f_m y)$. Водночас важливою є можливість зменшення кількості дій для отримання шуканого результату, тобто актуальним є пошук інших, простіших процедур розв'язування задач описаного типу. Одним із шляхів спрощення реалізації логічних операцій є заміна багатьох операцій поцифрового

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2005, вип. 2, 126-132

логічного додавання значень істинності булевих формул однією дією — арифметичним додаванням десяткових чисел, які відповідають послідовностям значень булевих функцій (ці послідовності інтерпретуємо як двійкові числа). Зазначене стало предметом дослідження, результати якого наведено в цій публікації.

1. Теореми щодо диз'юнкції

Насамперед розв'яжемо задачу для випадку, коли десяткові індекси булевих функцій (відповідні значенням цих функцій, які інтерпретуємо як двійкові числа) набувають тільки значень рівних певному значенню степені числа два. Візьмемо для прикладу двоаргументні булеві функції. Індексами булевих функцій приймемо значення цих функцій у десятковій системі числення. Отримаємо таку послідовність позначень

Значення булевої функції	Позначення функції
0001	f_1
0010	f_2
…	…
1110	f_{14}
1111	f_{15}

У межах від 1 до 15 (номер останньої з двоаргументних булевих функцій) є лише чотири числа, які є степенями числа два (їх значення наведено нижче). Це є ті чотири булеві функції, різними диз'юнктивними поєднаннями яких можна отримати всі решта двоаргументих функцій.

Значення булевої функції	Позначення функції
0001	f_1
0010	f_2
0100	f_4
1000	f_8

Аналогічним чином із восьми триаргументних булевих функцій різними диз'юнктивними поєднаннями можна отримати решта 247 триаргументних функцій (функцію, всі значення якої дорівнюють нулю, не приймаємо до уваги, оскільки їй відповідає суперечність). У загальному випадку кількість таких функцій дорівнює кількості значень n-аргументної функції, яка є рівною 2^n.

У процесі аналізу сформульованої проблеми встановлено, що операція диз'юнкції над формулами, які містять тільки описані функції, є тотожна операції арифметичного додавання індексів булевих функцій. Зокрема, можна сформулювати теорему 1.

Якщо: 1) $i \neq j \neq \ldots \neq z$, і 2) $i, j, \ldots, z \in \{2^t\}$, де $t \in \{0 \ldots \infty\}$, то

$$(x\, f_i\, y) \vee (x\, f_j\, y) \vee \ldots \vee (x\, f_z\, y) \equiv (x\, f_{i+j+\ldots+z}\, y). \quad (1)$$

Доведення. Результат дії диз'юнкції відрізняється від додавання у числовій алгебрі лише тоді, коли кожен із аргументів набуває значення 1. Оскільки у разі побудови таблиці істинності об'єктами дії диз'юнкції вибираємо двійкові числа, кожне з яких має одиницю в іншій позиції (умови 1 і 2), то результат дії диз'юнкції над такими числами тотожний операції додавання в числовій алгебрі. Арифметичне додавання значень функцій, які є двійковими відповідниками індексів цих функцій (десяткових чисел $i, j, \ldots, z$) дає такий же результат як і додавання самих цих десяткових чисел, тобто індексів.

У підсумку отримано, що в таких задачах побудова таблиці істинності може бути замінена арифметичним додаванням індексів булевих функцій. Значення функції легко отримати перевівши її індекс із десяткової системи числення у двійкову.

Для прикладу візьмемо побудову диз'юнкції формул $(x\, f_1\, y)$ і $(x\, f_8\, y)$. Оскільки індекси функцій f_1 і f_8 є степенями числа 2, то $((x\, f_1\, y) \vee (x\, f_8\, y)) \equiv$ $\equiv (x\, f_{1+8}\, y) \equiv (x\, f_9\, y)$. Перевівши десятковий індекс отриманої булевої функції (f_9) у двійкову систему числення, отримуємо значення цієї функції (1001). (Поєднавши диз'юнктивно антидиз'юнкцію і кон'юнкцію, отримали еквіваленцію, у правильності чого можна переконатися побудувавши таблицю істинності).

Вище було обґрунтовано теорему, чинну тільки для тих булевих функцій, значення яких містять лише одну одиницю (решта значень — нулі), тобто для таких функцій значення яких, будучи проінтерпретовані як двійкові числа, є рівними певним степеням числа 2. Водночас, можна узагальнити цю теорему на випадок, коли диз'юнктивно об'єднуються довільні булеві функції.

Проаналізуємо узагальнення наведеного вище закону для двоаргументних функцій. Нехай маємо дві довільні булеві функції $(x\, f_i\, y)$ і $(x\, f_j\, y)$. Оскільки взято двоагрументні функції, то їхні індекси набувають значень у межах від 1 до 15. Індекси i та j можна розкласти на суму чисел, кожне з яких є степенем числа 2. Це можна зробити, для прикладу, беручи логарифм за основою 2 від числа, яке треба розкласти. Якщо аналізоване число є степенем числа 2, то його логарифм (s_1) буде цілим числом і розкладання аналізованого числа припиняється. В іншому випадку (коли логарифм аналізованого числа не є цілим, тобто коли він має вигляд $s_1,abc\ldots$), діємо так. Отримуємо перше число з-посеред тих, на які розкладаємо число i: $p_1 = 2^{s_1}$. Окрім того, беремо логарифм за основою 2 від різниці i та p_1: $\log_2(i - p_1) = s_2$. Отримавши s_2, обчислюємо p_2. Ці дії продовжуємо доти, поки внаслідок логарифмування не отримаємо ціле число. У підсумку отримаємо послідовність чисел $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, кожне з яких є степенем числа 2, і сума яких рівна аналізованому числу.

Нехай за допомогою описаної процедури індекс i функції $(x\, f_i\, y)$ розкладено на послідовність чисел $(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n)$, тобто $i = (p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n)$; індекс j розкладено, відповідно, на послідовність чисел $(p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}, p_m)$. Нехай також, $p_{n-1}\, p_n$ — це числа, які відсутні з-посеред тих, на які розкладено число j, а $p_{m-1}\, p_m$ — це числа, які відсутні з-посеред тих, на які розкладено число i. Сформулюємо теорему 2.

Якщо: 1) $i = (p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n)$; $j = (p_1 + p_2 + \ldots + p_{m-1} + p_m)$;

2) $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n, \ldots, p_{m-1}, p_m \in \{2^t\}$, де $t \in \{0\ldots\infty\}$;

3) $p_{n-1}, p_n \notin \{p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}, p_m\}$; $p_{m-1}, p_m \notin \{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n\}$, то

$$(x\, f_i\; y) \vee (x\, f_j\; y) \equiv (x\, f_{i+p_{m-1}+p_m} y) \equiv (x\, f_{j+p_{n-1}+p_n} y). \quad (2)$$

Доведення. Якщо індекс i можна розкласти на суму чисел, які є степенями числа 2: $(p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n)$, то, згідно з теоремою 1, можна записати

$$(x\, f_i\; y) \equiv (x\, f_{p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}+p_n} y) \equiv (x\, f_{p_1} y) \vee (x\, f_{p_2} y) \vee (x\, f_{p_{n-1}} y) \vee (x\, f_{p_n} y).$$

Відповідно, для індекса j маємо

$$(x\, f_j\; y) \equiv (x\, f_{p_1+p_2+\ldots+p_{m-1}+p_m} y) \equiv (x\, f_{p_1} y) \vee (x\, f_{p_2} y) \vee (x\, f_{p_{m-1}} y) \vee (x\, f_{p_m} y).$$

У такому разі для диз'юнкції формул $(x\, f_i\, y)$ і $(x\, f_j\, y)$ отримаємо таку тотожність

$$(x\, f_i\; y) \vee (x\, f_j\; y) \equiv (x\, f_{p_1} y) \vee (x\, f_{p_2} y) \vee (x\, f_{p_{n-1}} y) \vee (x\, f_{p_n} y) \vee$$

$$\vee (x\, f_{p_1} y) \vee (x\, f_{p_2} y) \vee (x\, f_{p_{n-1}} y) \vee (x\, f_{p_n} y).$$

Відповідно до закону ідемпотентості вилучимо формулу

$$(x\, f_{p_1} y) \vee (x\, f_{p_2} y)$$

і після застосування теореми 1 і скорочень отримаємо в підсумку

$$(x\, f_i\; y) \vee (x\, f_j\; y) \equiv (x\, f_{i+p_{m-1}+p_m} y) \equiv (x\, f_{j+p_{n-1}+p_n} y),$$

що й треба було довести.

Для прикладу проаналізуємо побудову диз'юнкції формул $(x\, f_9\, y)$ і $(x\, f_{12}\, y)$ (функція f_9 це еквіваленція, а значення функції f_{12} рівне значенню першого аргумента). Індекс функції f_9 розкладається на два числа, кожне з яких є степенем числа 2, це числа 8 і 1; індекс функції f_{12} розкладається також на два числа, кожне з яких є степенем числа 2, це числа 8 і 4. У такому разі множина чисел (степенів числа 2) з яких складено перший індекс не містить числа 4 (із множини чисел, з яких складено другий індекс). Отже, внаслідок операції диз'юнкції над формулами $(x\, f_9\, y)$ і $(x\, f_{12}\, y)$ маємо

$$(x\, f_9\, y) \vee (x\, f_{12}\, y) \equiv (x\, f_{8+1}\, y) \vee (x\, f_{8+4}\, y) \equiv (x\, f_{9+4}\, y) \equiv (x\, f_{12+1}\, y) \equiv (x\, f_{13}\, y).$$

Значення цієї функції (це реплікація) можна отримати перевівши індекс функції $(x\, f_{13}\, y)$ у двійкову систему числення, внаслідок чого отримаємо 1101.

2. Теореми щодо кон'юнкції та строгої диз'юнкції

Виявлення можливості заміни низки логічних дій однією арифметичною викликає запитання: чи таку властивість має тільки логічне додавання (тобто диз'юнкція), чи воно поширюється, скажімо, і на логічне множення (тобто кон'юнкцію).

Адже, якщо дія логічного додавання над числами 1 і 0 лише частково ідентична дії арифметичного додавання, то дія логічного множення над цими числами є повністю тотожна дії арифметичного множення. Тож виникає думка, що для кон'юнкції тим більше повинен існувати аналогічний закон. Насправді, з'ясувалося, що це не так. Шляхом позиційного додавання цифр двійкових чисел (якими є значення булевих функцій) водночас додають ці двійкові числа, що може бути замінено додаванням їхніх десяткових відповідників — індексів функцій. У разі позиційного перемноження (не має значення, логічного чи арифметичного) цифр двійкових чисел, якими є значення булевих функцій, не отримують добутку цих чисел. Тому позиційне множення двійкових чисел, яким отримують значення нової булевої функції, не тотожне множенню значень булевих функцій проінтерпретованих як двійкові числа (чи відповідних їм десяткових чисел).

Водночас є інша можливість реалізації кон'юнкції, за допомогою дій над індексами булевих функцій. Її також можна здійснити шляхом додавання індексів функцій. Для обґрунтування такої можливості і з'ясування того, реалізацію яких із булевих функцій можна звести безпосередньо до додавання індексів функцій, проаналізуємо можливі варіанти додавання цифр, з яких складені двійкові числа. Візьмемо для аналізу двійкові числа 14 (тобто 1110) і 6 (тобто 0110). Можливі тільки три варіанти додавання різних частин цих чисел, які відтворено у таблиці нижче (прийнято, що 1 + 1 = 1; це легко реалізувати, якщо не додавати однакові частини індексів функцій, що відповідає закону ідемпотентності).

Описана вище заміна логічної операції над аргументами (диз'юнкції) відповідає 5-ій колонці наведеної таблиці. Відповідно до 3-ї колонки таблиці можна сформулювати аналогічні закони для строгої диз'юнкції (антиеквіваленції), а відповідно до 4-ї колонки — для кон'юнкції.

Сформулюємо теорему 3 для антиеквіваленції.

Якщо: 1) $i = (p_1 + p_2 + \ldots + p_{n\text{-}1} + p_n)$; $j = (p_1 + p_2 + \ldots + p_{m\text{-}1} + p_m)$;

2) $p_1, p_2, \ldots, p_{n\text{-}1}, p_n, \ldots, p_{m\text{-}1}, p_m \in \{2^t\}$, де $t \in \{0 \ldots \infty\}$;

3) $p_{n\text{-}1}, p_n \notin \{p_1, p_2, \ldots, p_{m\text{-}1}, p_m\}$; $p_{m\text{-}1}, p_m \notin \{p_1, p_2, \ldots, p_{n\text{-}1}, p_n\}$, то

$$(x\ f_i\ y)\overline{\leftrightarrow}(x\ f_j\ y) \equiv (x\ f_{P_{n-1}+P_n+P_{m-1}+P_m}\ y). \tag{3}$$

Значення функцій, які додають		Додавання тих частин двійкових чисел, які мають різні значення (інші значення дорівнюють 0)	Додавання тих частин двійкових чисел, які мають однакові значення (інші значення дорівнюють 0)	Додавання і тих частин двійкових чисел, які мають однакові значення і тих, які мають різні значення
1	2	3	4	5
f_{14}	f_6	f_8	f_6	f_{14}
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	0	1	1
0	0	0	0	0

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2005, вип. 2, 126-132

Нехай, для прикладу, $i = 14$, $j = 6$. Індекс 14 розкладається на суму $8 + 4 + 2$, а індекс 6 — на 4 і 2. Згідно з теоремою 3 індекс нової функції повинен дорівнювати сумі тих чисел (на які розкладено i та j), які не дублюються, отже

$$(x\, f_{14}\, y) \ \overline{\leftrightarrow}\ (x\, f_6\, y) \equiv (x\, f_{8+4+2}\, y) \ \overline{\leftrightarrow}\ (x\, f_{4+2}\, y) \equiv (x\, f_8\, y).$$

Сформулюємо також теорему 4 для кон'юнкції.

Якщо 1) $i = (p_1 + p_2 + \ldots + p_{n\text{-}1} + p_n)$; $j = (p_1 + p_2 + \ldots + p_{m\text{-}1} + p_m)$;

2) $p_1, p_2, \ldots, p_{n\text{-}1}, p_n, \ldots, p_{m\text{-}1}, p_m \in \{2^t\}$, де $t \in \{0\ldots\infty\}$;

3) $p_{n\text{-}1}, p_n \notin \{p_1, p_2, \ldots, p_{m\text{-}1}, p_m\}$; $p_{m\text{-}1}, p_m \notin \{p_1, p_2, \ldots, p_{n\text{-}1}, p_n\}$, то

$$(x\ f_i\ y) \wedge (x\ f_j\ y) \equiv (x\ f_{P_1+P_2}\, y). \tag{4}$$

Якщо прийняти $i = 14$, $j = 6$ (індекс 14 розкладається на суму $8 + 4 + 2$, а індекс 6 — на 4 і 2), то, згідно з теоремою 4, індекс нової функції повинен визначатись як сума тих чисел (на які розкладено i та j), що дублюються, отже

$$(x\, f_{14}\, y) \wedge (x\, f_6\, y) \equiv (x\, f_{8+4+2}\, y) \wedge (x\, f_{4+2}\, y) \equiv (x\, f_{4+2}\, y) \equiv (x\, f_6\, y).$$

Заміна таких логічних операцій над аргументами, як кон'юнкція, диз'юнкція, строга диз'юнкція арифметичними операціями над індексами функцій уможливлює зведення до арифметичних операцій над індексами також обернених функцій, тобто антикон'юнкції, антидиз'юнкції, еквіваленції відповідно. Функцію, обернену до функції $(x\, f_e\, y)$, можна обчислити за формулою: $(x\, f_{u-e}\, y)$, де u — кількість булевих функцій для заданої кількості аргументів ($u = 2^k - 1$); k — кількість варіантів значень аргументів ($k = 2^v$); v — кількість аргументів. У разі двох аргументів кількість булевих функцій $u = 15$ (функцію, яка за всіх значень аргументів набуває значення 0, не беремо до уваги). У такому разі, функція, обернена, для прикладу, до диз'юнкції (диз'юнкція — це f_{14}), обчислюється за формулою: $(x\, f_{15-14}\, y) = (x\, f_1\, y)$. Перевівши індекс цієї функції у двійкову систему числення, отримуємо її значення (0001). Зведення антидиз'юнкції й антикон'юнкції до арифметичних дій над індексами цих функцій дає змогу звести до арифметичних дій над індексами усі булеві функції — адже усі вони можуть бути виражені як через антидиз'юнкцію, так і через антикон'юнкцію.

Висновки. Доведені теореми чинні тільки за певного способу позначення булевих функцій — у разі, коли десяткові індекси булевих функцій рівні значенням цих функцій, проінтерпретованим як двійкові числа. За допомогою цих теорем можна значно підвищити ефективність обчислень, зокрема, числового моделювання обробки знань у знаковому вигляді, тобто у вигляді знаків природної мови. Спрощення реалізації диз'юнкції у процесі обчислень може бути використане у процедурах генерування правил виводу. Запропоновані теореми чинні не тільки для двоаргументних булевих функцій — кількість аргументів може бути довільною.

Література

[1] *Люгер Дж. Ф.* Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем. — М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. — 864 с.

[2] *Boole G.* An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities. — N. Y.: Dover publications, INC. — 424 P.

[3] *Дуцяк І. З.* Теоретичні засади логіки. — Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, Палітра друку, 2000. — 233 с.

About Identity for Logical Operations and Arithmetical Addition of Boolean Functions Indexes

Igor Dutsjak

Possibilities of replacement of logic operations above arguments of Boolean functions arithmetical addition of indexes of these functions are analyzed. It is accepted, that indexes of Boolean functions are decimal numbers which answer the values of functions interpreted as binary number. It is proved theorems concerning identity of logic operations and arithmetical addition of functions indexes for conjunction, disjunction, strict disjunction, and also for inverse functions. As all Boolean functions can be expressed through an anticonjunction or an antidisjunction use of the proved theorems does possible replacement of logic operations of any Boolean functions with arithmetical addition of their indexes, that considerably simplifies evaluations.

О тождестве логических операций арифметическому сложению индексов булевых функций

Игорь Дуцяк

Проанализирована возможность замены логических операций над аргументами булевых функций арифметическим сложением индексов этих функций. Принято, что индексами булевых функций являются десятичные числа, соответствующие значениям функций, проинтерпретированным как двоичные числа. Обосновано теоремы о тождестве логических операций и арифметического сложения индексов функций для конъюнкции, дизъюнкции и строгой дизъюнкции, а также для обратных функций. Поскольку все булевы функции можно выразить через антиконъюнкцию или антидизъюнкцию, то использование приведенных теорем делает возможной замену логических операций любых булевых функций арифметическим сложением их индексов, что значительно упрощает вычисления.

Отримано 12.10.2005