УДК 539.3

Основы общей теории независимого управления собственными деформациями

Юрий Няшин[1], Валерий Лохов[2]

[1] д. т. н., профессор, Пермский государственный технический университет, Комсомольский проспект, 29, Пермь, Россия, 614000, e-mail: nyashin@pstu.ru
[2] к. ф.-м. н., Пермский государственный технический университет, Комсомольский проспект, 29, Пермь, Россия, 614000, e-mail: lva@pstu.ru

В работе излагаются основы решения задач управления напряжениями одновременно с деформациями путем наложения поля собственных деформаций. Под собственными деформациями (eigenstrain) понимаются неупругие деформации любой природы, например, температурные, пьезоэлектрические, деформации фазовых переходов, ростовые в живых тканях и другие. Метод основан на свойствах решения краевой задачи с собственными деформациями, которые получены с использованием функционального анализа. Основная идея метода состоит в разложении собственной деформации на нильпотентную (не создающую полной деформации) и импотентную (не создающую напряжений) части. Показано, что такое разложение всегда можно реализовать для любой существующей в теле собственной деформации. Предложенный метод позволяет строить решение задачи управления без полного решения задачи с собственными деформациями и избежать трудоемких и многочисленных решений краевых задач при поиске оптимального решения.

Ключевые слова: собственная деформация, управление, энергетическое пространство, теорема о декомпозиции.

Введение. Задачи управления напряжениями и деформациями являются необходимым звеном в разработке современных конструкций. Особо эти вопросы важны при проектировании интеллектуальных конструкций, которые способны адаптироваться к изменяющимся условиям эксплуатации. Примерами таких систем могут служить задачи сохранения формы зеркала телескопа, а также опорной конструкции зеркала. Часто возникают задачи создания в теле заданных напряжений при сохранении в нем существующих деформаций или создания заданной деформации при сохранении существующих напряжений. В частности, это задачи об исправлении усадки конструкций или опор вследствие форс-мажорных причин (например, при нагреве в условиях открытого космоса). Кроме того, это могут быть задачи об управлении ростовыми деформациями, к примеру, при лечении расщелины твердого неба.

Изначально механизмом управления служил нагрев. Затем с развитием техники стали применять пьезоэлектрическое управление. С математической точки зрения, температурные, ростовые, пьезоэлектрические деформации идентичны. В современной литературе такие деформации называются собственными деформациями.

Термин «собственные деформации» впервые ввел Рейснер (*Reissner*) в 1931 году [1]. Под этим термином он понимал неупругие деформации, соответствующие самоуравновешенным остаточным напряжениям. В 1991 году Мура (*Mura*) [2] предложил более общее определение собственной деформации (*eigenstrain*), принятое в современной научной литературе. В рамках геометрически линейной теории это могут быть неупругие деформации любой природы (температурные, пьезоэлектрические, пластические, ростовые, фазовые и др.). В этой же работе Мура предложил понятие импотентной (*impotent*) собственной деформации (например, температурной деформации) как деформации, не вызывающей напряжения в системе. Позже, в 2001 году, Иршик (*Irschik*) и Циглер (*Ziegler*) [3] ввели понятие нильпотентной (*nilpotent*) собственной деформации, как не создающей полной деформации в любой точке системы.

Использование термина собственной деформации позволяет исследователю абстрагироваться от природы возникновения той или иной собственной деформации. Тем самым, задача решается в два этапа: определение собственной деформации, необходимой для достижения целей управления; создания найденной собственной деформации. При этом в инженера есть возможность выбора или комбинирования типов собственных деформаций.

Теоретические исследования различных аспектов собственных деформаций исследовались учеными различных стран [4-7]. В работе [4] собственная деформация называется дисторсией, монографию [7] отличает обилие прикладных задач. Однако решение задач управления основывается на решении краевой задачи теории упругости с собственными деформациями, что представляет трудности. Алгоритм решения задачи управления основывается на свойствах решения краевой задачи, полученных с использованием функционального анализа, и не требует поиска самого решения.

1. Постановка задачи и основные понятия

Рассмотрим обобщенную постановку краевой задачи. Исследуемое тело занимает ограниченную область Ω трехмерного евклидова пространства E^3. Замыкание области обозначено через $\bar{\Omega}$, граница (которая считается достаточно гладкой) — через Γ ($\bar{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$). Деформации считаются малыми и аддитивными. Тогда тензор малой деформации $\hat{\varepsilon}$ является суммой упругой $\hat{\varepsilon}^e$ и собственной $\hat{\varepsilon}^*$ деформаций

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^e + \hat{\varepsilon}^*, \quad \vec{x} \in \bar{\Omega}. \tag{1}$$

Граница области Γ делится на две взаимно непересекающиеся части: $\Gamma = \Gamma_u \bigcup \Gamma_\sigma$. На границе Γ_u заданы нулевые кинематические граничные условия, на Γ_σ — вектор напряжений

$$\vec{u} = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_u,$$
$$\vec{n} \cdot \hat{\sigma} = \vec{P}, \quad \vec{x} \in \Gamma_\sigma. \tag{2}$$

Здесь кинематические граничные условия предполагаются такими, что движение тела как жесткого целого невозможно.

Назовем обобщенным решением задачи симметричный тензор $\tilde{\sigma}$, который определяется обобщенным законом Гука

$$\hat{\sigma} = \hat{C}^{(4)} : \left[\hat{\varepsilon}(\vec{u}) - \hat{\varepsilon}^* \right], \text{ где } \vec{u} \in (W_2^1(\Omega))^3,\ \vec{u} = 0,\ \vec{x} \in \Gamma_u, \tag{3}$$

и для которого имеет место соотношение

$$\int_\Omega \hat{\sigma} : \hat{\varepsilon}(\vec{w})\, dV - \int_{\Gamma_\sigma} \vec{P} \cdot \vec{w}\, dS - \int_\Omega \vec{Q} \cdot \vec{w}\, dV = 0, \tag{4}$$

$$\vec{w} \in (W_2^1(\Omega))^3,\ \ \vec{w} = 0,\ \ \vec{x} \in \Gamma_u.$$

Здесь W_2^1 — пространство Соболева функций, имеющих первую обобщенную производную и интегрируемых в квадрате вместе с производной. Деформации $\tilde{\varepsilon}(\vec{u})$ и $\tilde{\varepsilon}(\vec{w})$ определяются геометрическими соотношениями Коши, где производные понимаются в обобщенном смысле. Значения перемещений $\vec{u}$ и $\vec{w}$ на границе вычисляются посредством оператора следа [8]. В обобщенной постановке задачи считается, что $\vec{P} \in (L_2(\Gamma_\sigma))^3$, $\vec{Q} \in (L_2(\Omega))^3$, $\hat{\varepsilon}^* \in (L_2(\Omega))^6$, компоненты $C_{ijkl}(i, j, k, l = 1, 2, 3)$ являются кусочно-непрерывными функциями координат.

В работе [8] доказана теорема, утверждающая, что для решаемой задачи обобщенное решение существует и единственно.

Благодаря малости и аддитивности деформаций задачу (1)-(4) можно разделить на две:

1. задачу теории упругости с нулевой собственной деформацией;
2. задачу теории упругости с собственными деформациями при отсутствии объемных и поверхностных сил.

Решением исходной задачи будет сумма решений задач 1 и 2. Первая задача решается классическими методами теории упругости, а решение второй задачи часто бывает затруднительным, особенно в задачах управления.

Для дальнейшего изложения и анализа второй задачи необходимо ввести пространство H тензоров деформации, компоненты которых принадлежат функциональному пространству L_2. Скалярное произведение в H введено следующим образом

$$(\hat{A}, \hat{B})_H = \int_\Omega A_{ij}\, C_{ijkl}\, B_{kl}\, dV. \tag{5}$$

Норма порождена скалярным произведением (5)

$$\left\| \hat{A} \right\|_H = \sqrt{(\hat{A}, \hat{A})_H}. \tag{6}$$

Можно показать, что выражение (5) удовлетворяет аксиомам скалярного произведения.

Далее выделено подпространство совместных деформаций.

Тензор $\hat{f} \in H$ принадлежит подпространству H_u, если существует такая вектор-функция (перемещение) $\vec{u} \in (W_2^1(\Omega))^3$, что $\vec{u} = 0$ при $\vec{x} \in \Gamma_u$ и

$$\hat{f} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{u}\vec{\nabla}),$$

где производные понимаются в обобщенном смысле, а значение функции $\vec{u}$ на границе Γ_u определяется посредством оператора следа.

Импотентная собственная деформация принадлежит подпространству H_u. И наоборот, если собственная деформация принадлежит подпространству H_u, то она является импотентной [9].

Подпространство нильпотентных собственных деформаций H_σ введено посредством условия, что полные деформации системы (1) равны нулю, тогда собственная деформация вычисляется следующим образом

$$\hat{\varepsilon}_\sigma^* = -\left[\hat{C}^{(4)}\right]^{-1} : \hat{\sigma}, \quad \vec{x} \in \bar{\Omega}, \tag{7}$$

где напряжения $\hat{\sigma}$ являются статически допустимыми при отсутствии внешних сил (уравновешенные напряжения)

$$\int_\Omega \hat{\sigma} : \hat{\varepsilon}(\vec{w})\, dV = 0, \quad \forall\, \vec{w} \in \left(W_2^1(\Omega)\right)^3, \quad \vec{w} = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_u. \tag{8}$$

Эти напряжения не ограничиваются классом самоуравновешенных напряжений ввиду наличия реакций опор на границе Γ_u.

Множество собственных деформаций $\hat{\varepsilon}_\sigma^*$ в выражении (7) образует линейное подпространство H_σ.

Для того, чтобы собственная деформация была нильпотентной необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (7), (8).

На основе введенных понятий формулируется теорема, определяющая общие свойства собственной деформации.

2. Теорема о декомпозиции

Теорема. Любая существующая в теле собственная деформация $\hat{\varepsilon}^*$ может быть единственным образом разложена на импотентную $\hat{\varepsilon}_u^*$ и нильпотентную $\hat{\varepsilon}_\sigma^*$ части

$$\hat{\varepsilon}^* = \hat{\varepsilon}_u^* + \hat{\varepsilon}_\sigma^*, \tag{9}$$

где $\hat{\varepsilon}_u^* \in H_u$ и $\hat{\varepsilon}_\sigma^* \in H_\sigma$.

Доказательство. Сначала докажем существование разложения. Рассмотрим произвольное распределение собственных деформаций $\hat{\varepsilon}^*$, существующих в теле. Это вызывает в теле упругие деформации $\hat{\varepsilon}^e$ и полные деформации $\hat{\varepsilon}$

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^e + \hat{\varepsilon}^*. \tag{10}$$

Очевидно, что собственная деформация, равная полной деформации ($\hat{\varepsilon}_1^* = \hat{\varepsilon}$), принадлежит подпространству H_u. Она является импотентной и не создает в теле напряжений. Собственная деформация $(-\hat{\varepsilon}_1^*)$ обладает аналогичными свойствами. После добавления импотентной собственной деформации $(-\hat{\varepsilon}_1^*)$ к собственной деформации $\hat{\varepsilon}^*$ состояние системы описывается следующим соотношением

$$\hat{\varepsilon}^e + \hat{\varepsilon}^* - \hat{\varepsilon}_1^* = 0 . \tag{11}$$

С учетом обозначения

$$\hat{\varepsilon}^* - \hat{\varepsilon}_1^* \equiv \hat{\varepsilon}_2^* , \tag{12}$$

выражение (11) принимает вид

$$\hat{\varepsilon}^e + \hat{\varepsilon}_2^* = 0 . \tag{13}$$

Из выражения (13) можно сделать вывод, что собственная деформация $\hat{\varepsilon}_2^*$ дает состояние с нулевой полной деформацией и поэтому является нильпотентной. Перегруппированное выражение (12) показывает, что выполнено разложение собственной деформации

$$\hat{\varepsilon}^* = \hat{\varepsilon}_1^* + \hat{\varepsilon}_2^* ,$$

где $\hat{\varepsilon}_1^* \in H_u$ и $\hat{\varepsilon}_2^* \in H_\sigma$. Таким образом, доказана возможность разложения собственной деформации.

На следующем шаге покажем, что разложение единственно. Для этого предположим, что существуют $\hat{\varepsilon}_1^* \in H_u$ и $\hat{\varepsilon}_2^* \in H_\sigma$, но разложение (9) не единственно. Иными словами, предположим, что существует иное разложение

$$\hat{\varepsilon}^* = \hat{v}_1^* + \hat{v}_2^* , \tag{14}$$

где $\hat{v}_1^* \in H_u$ и $\hat{v}_2^* \in H_\sigma$. Тогда

$$\hat{\varepsilon}_1^* + \hat{\varepsilon}_2^* = \hat{v}_1^* + \hat{v}_2^* , \tag{15}$$

$$\hat{\varepsilon}_1^* - \hat{v}_1^* = \hat{v}_2^* - \hat{\varepsilon}_2^* . \tag{16}$$

Подстановка следующих обозначений

$$\hat{\varepsilon}_1^* - \hat{v}_1^* = \hat{w}_1^* \in H_u , \qquad \hat{v}_2^* - \hat{\varepsilon}_2^* = \hat{w}_2^* \in H_\sigma , \tag{17}$$

в уравнение (16) позволяет просто показать, что

$$\hat{w}_1^* = \hat{w}_2^* . \tag{18}$$

Элемент, который принадлежит обоим подпространствам H_u и H_σ (то есть не вызывает ни напряжений, ни деформаций системы), должен быть нулевым. Поэтому

$$\hat{w}_1^* = \hat{w}_2^* = 0\,, \quad \hat{\varepsilon}_1^* = \hat{v}_1^*\,, \quad \hat{\varepsilon}_2^* = \hat{v}_2^*\,. \tag{19}$$

Следовательно, разложение (9) единственно.

Кроме того, подпространства H_u и H_σ взаимно ортогональны, то есть любые элементы $\hat{\varepsilon}_1^* \in H_u$ и $\hat{\varepsilon}_2^* \in H_\sigma$ ортогональны в смысле скалярного произведения.

Если выполнена декомпозиция собственной деформации, то напряжения $\hat{\sigma}$ и полная деформация $\hat{\varepsilon}$ тела с собственной деформацией $\hat{\varepsilon}^*$ при отсутствии внешних сил на границе Γ_σ вычисляются следующим образом

$$\hat{\sigma} = -\hat{C}^{(4)} : \hat{\varepsilon}_\sigma^*, \quad \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_u^*\,. \tag{20}$$

Таким образом, решение задачи теории упругости с собственными деформациями сводится к выполнению декомпозиции существующей в теле собственной деформации.

Введенные понятия импотентных и нильпотентных собственных деформаций, а также теорема о декомпозиции открывают возможность независимого управления напряжениями (посредством нильпотентных собственных деформаций) и деформациями (посредством импотентных собственных деформаций).

Как правило, разложение элемента на составляющие проводится путем использования базиса в подпространствах. Задача состоит в построении указанного базиса, то есть необходимо найти базисные элементы $(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, ...) \in H_\sigma$ и $(\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, ...) \in H_u$ (рис. 1.). Отметим, что базисные элементы в подпространстве H_u или H_σ могут не обладать свойством ортогональности, $(\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_j)_H \neq 0$, но базисные элементы разных подпространств ортогональны $(\hat{\psi}_i, \hat{\pi}_j)_H = 0$.

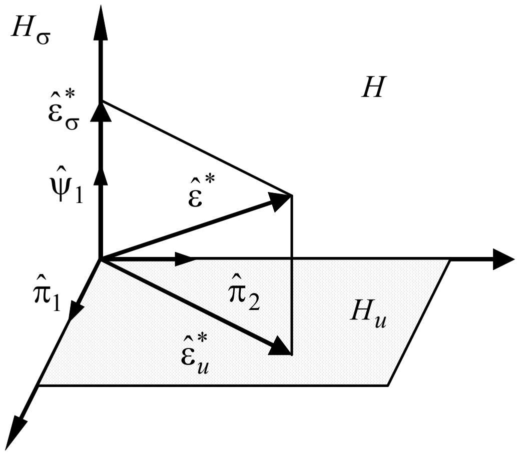

Рис. 1. Иллюстрация к разложению собственной деформации

3. Формула Майзеля

В качестве примера приведем новый вывод формулы Майзеля, основанный на теореме о декомпозиции. Применение принципа возможных перемещений совместно с разложением собственной деформации дает альтернативный и достаточно простой вывод формулы Майзеля.

Рассмотрим единичную силу, приложенную к точке $\vec{x}$ в направлении $\vec{e}_\alpha$, и выберем деформации, вызванные наложением собственной деформации как возможные. Тогда принцип возможных перемещений дает следующее соотношение [7]

$$1\, u_{\alpha(\varepsilon)}(\vec{x}) = \int\limits_\Omega \sigma_{ij(\alpha)}(\vec{\xi},\vec{x})\,\varepsilon_{ij}(\vec{\xi})\, dV\,, \tag{21}$$

где $u_{\alpha(\varepsilon)}(\vec{x})$ — перемещение частицы $\vec{x}$ в направлении α, $\sigma_{ij(\alpha)}(\vec{\xi},\vec{x})$ — напряжение в точке $\vec{\xi}$ от действия единичной силы в точке $\vec{x}$ в направлении α, $\varepsilon_{ij}(\vec{\xi})$ — существующая в теле деформация.

Полная деформация ε_{ij} является суммой упругой деформации ε^e_{ij}, вызванной наложением собственной деформации, и собственной деформации ε^*_{ij}

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^*_{ij}\,.$$

Согласно теореме о декомпозиции любая собственная деформация ε^*_{ij} может быть разложена на импотентную $\varepsilon^{*(u)}_{ij}$ и нильпотентную $\varepsilon^{*(\sigma)}_{ij}$ части

$$\varepsilon^*_{ij} = \varepsilon^{*(u)}_{ij} + \varepsilon^{*(\sigma)}_{ij}\,.$$

Таким образом, с учетом свойств нильпотентной собственной деформации полная деформация принимает вид

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^*_{ij} = C_{ijkl}\,\sigma_{kl} + \varepsilon^{*(u)}_{ij} - C_{ijkl}\,\sigma_{kl}\,,$$
$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{*(u)}_{ij}\,.$$

В результате соотношение (21) преобразуется к следующему виду

$$1\, u_{\alpha(\varepsilon)}(\vec{x}) = \int\limits_\Omega \sigma_{ij(\alpha)}(\vec{\xi},\vec{x})\,\varepsilon^{*(u)}_{ij}(\vec{\xi})\, dV\,. \tag{22}$$

Так как нильпотентная часть не влияет на полные деформации системы, то соотношение (22) можно переписать в форме обобщенной формулы Майзеля

$$1\, u_{\alpha(\varepsilon)}(\vec{x}) = \int\limits_\Omega \sigma_{ij(\alpha)}(\vec{\xi},\vec{x})\,\varepsilon^{*}_{ij}(\vec{\xi})\, dV\,. \tag{23}$$

Таким образом, представлен простой вывод формулы Майзеля для случая, когда тело подвержено воздействию собственной деформации.

Выводы. Доказана общая теорема, позволяющая разделить решение задачи управления напряжениями и деформациями на две независимые задачи. Предложенная методика оказывается полезной при решении задач о компенсации осадки опор, лечении расщелины твердого неба у детей и других задач механики и биомеханики.

Работа выполнена в рамках Соглашения о сотрудничестве между Венским техническим университетом (*Vienna University of Technology*) и Пермским государственным техническим университетом. Авторы благодарны профессору Францу Циглеру (Венский Технический Университет) за полезные дискуссии.

Литература

[1] *Reissner H.* Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen // ZAMM. — 1931. — Vol. 11. — P. 1-8.
[2] *Mura T.* Micromechanics of Defects in Solids // Martinus Nijhoff. — Dordrecht, 1987.
[3] *Irschik H.*, *Ziegler F.* Eigenstrain without stress and static shape control of structures // AIAA Journal. — 2001. — Vol. 39, № 10. — P. 1985-1990.
[4] *Новацкий В.* Термоупругость.— М.: Мир, 1975.
[5] *Боли Б.*, *Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. — М.: Мир, 1964.
[6] *Мелан Э.*, *Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. — М.: ФизматГИЗ, 1958.
[7] *Циглер Ф.* Механика твердых тел и жидкостей. — Москва-Ижевск: РХД, 2002.
[8] *Дюво Г.*, *Лионс Х.-Л.* Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980.
[9] *Nyashin Y.*, *Lokhov V.*, *Ziegler F.* Decomposition method in linear elastic problems with eigenstrain // ZAMM. — 2005. — Vol. 85, № 8. — P. 557-570.
[10] *Nyashin Y.*, *Lokhov V.*, *Ziegler F.* Stress-free displacement control of structures // Acta Mechanica. — 2005. — Vol. 175, № 1-4. — P. 45-56.

Fundamentals of the Theory of Independent Stress and Deformation Control by Eigenstrain

Yuriy Nyashin, Valeriy Lokhov

The foundation of solution of independent stress and deformation control problems by eigenstrain is given. By eigenstrain it is possible to consider inelastic strain of any nature such as thermal expansion strain, piezoelectric strain, deformation due to phase transitions, growth and remodeling deformations in living tissues, etc. The approach is based on the properties of solution of boundary value problem with eigenstrain obtained by means of functional analysis. The main idea is the decomposition of existing eigenstrain into impotent (stress-free) and nilpotent (deformation-free) constituents. It is shown that there is a possibility to perform the decomposition for any eigenstrain existing in the body and that obtained decomposition is unique one. Suggested theory allows us to obtain the solution of stress and deformation control problem without straightforward solution of boundary value problem with eigenstrain. In addition, the novel method avoids numerous and cumbersome solutions of boundary value problem with eigenstrain.

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2006, вип. 3, 129-137

Основи загальної теорії незалежного управління власними деформаціями

Юрій Няшин, Валерій Лохов

У роботі подаються основи розв'язування задач керування напруженнями одночасно з деформаціями шляхом накладання поля власних деформацій. Під власними деформаціями (eigenstrain) розуміють непружні деформації довільного походження, наприклад, температурні, п'єзоелектричні, деформації фазових переходів, росту у живих тканинах тощо. Метод ґрунтується на властивостях розв'язків крайової задачі з власними деформаціями, які отримуються з використанням функціонального аналізу. Основна ідея методу полягає у розкладі власної деформації на нільпотентну (яка не створює повної деформації) й імпотентну (яка не створює напружень) частини. Показано, що такий розклад завжди можна реалізувати для будь-якої власної деформації, що існує в тілі. Запропонований метод дає змогу будувати розв'язок задачі керування без повного розв'язування задачі з власними деформаціями та уникнути трудомістких і численних розв'язувань крайових задач при пошуку оптимального розв'язку.

Отримано 10.09.05