УДК 539.3

Міжфазна тріщина на межі розділу кругового включення і матриці

Андрій Улітко[1], Володимир Острик[2]

[1] член-кор. НАН України, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01033, e-mail: ulitko@univ.kiev.ua
[2] д. ф.-м. н., Інститут прикладної фізики НАН України, вул. Петропавлівська, 58, Суми, 40030, e-mail: ostrik_v@rambler.ru

Розглянуто напружений стан жорстко з'єднаних між собою пружних матриці і кругового включення з різних матеріалів, на межі розділу яких є тріщина. Враховано контакт берегів тріщини поблизу її вершин і сили тертя в області контакту. Із застосуванням методу Вінера-Гопфа розв'язок інтегрального рівняння задачі отримано в замкненій формі. Знайдено в явному вигляді довжину області контакту берегів тріщини, розподіл напружень в області контакту та на межі розділу матриці та включення поза тріщиною.

Ключові слова: міжфазна тріщина, контакт, тертя, напруження.

Вступ. Розв'язкам задач про рівновагу пружних тіл із тріщинами на межі розділу середовищ із різних матеріалів властива сингулярна осциляція напружень і обмежена за амплітудою осциляція переміщень в околах вершин тріщини [1]. Осцилюючі розв'язки не можна вважати фізично допустимими, оскільки вони передбачають взаємне проникнення середовищ поблизу вершин тріщини. Незважаючи на те, що у низці випадків зони осциляцій надзвичайно малі порівняно з розміром тріщини, нехтування цими зонами не дає змоги отримати розподіл напружень в околах вершин міжфазної тріщини і коректно ввести коефіцієнт інтенсивності напружень.

У роботах М. Комніноу, огляд яких наведено в [2], для знаходження коректних розв'язків запропоновано вводити малі області контакту берегів тріщини поблизу її вершин. При цьому чисельно досліджено моделі гладкого та фрикційного контакту. Аналітичні розв'язки для міжфазної тріщини в однорідному полі напружень були одержані в [3, 4]. У роботах [5-7] одержано розв'язки в замкненій формі для тріщини з однією зоною контакту між різнорідними ізотропними, ортотропними та п'єзоелектричними матеріалами. У [8] знайдено аналітичний розв'язок для системи міжфазних тріщин у полі зосереджених сил та моментів і чисельно проаналізовано випадок однієї тріщини з урахуванням тільки однієї зони контакту. У роботах [9-12] відповідно з моделями гладкого та фрикційного контакту отримано точні та асимптотично точні розв'язки задач для напівнескінченної та скінченної міжфазної тріщини у разі дії нормальних зосереджених сил, прикладених до берегів тріщини. У статті [13] досліджено фрикційний контакт берегів міжфазної тріщини у полі зсувних та розтягуючих напружень, коли область контакту біля однієї з вершин тріщини може займати значну частину тріщини. В усіх згаданих роботах розглядалися задачі плоскої деформації для двох жорстко з'єднаних різнорідних півплощин із тріщиною на межі. Розв'язок осесиметричної контактної задачі для кругової тріщини на межі розділу двох різнорідних півпросторів, одержано в [14, 15] чисельно та в [16, 17] аналітично. Нижче в рамках фрикційної моделі контакту у замкненому вигляді дається розв'язок контактної задачі для міжфазної тріщини на межі кругового включення у пружній площині.

1. Постановка задачі

Розглянемо всесторонній розтяг пружної півплощини з відшарованим включенням (рис. 1). Модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона включення позначимо G_1 і ν_1, а матриці (площини з круговим отвором) — відповідно G_2 і ν_2. Приймемо радіус включення $R = 1$. Межа розділу ($r = 1$) складається із дуг L' та L'', причому вздовж дуги L' ($\alpha \le \vartheta \le 2\pi - \alpha$) включення і матриця жорстко з'єднані, а вздовж дуги L'' ($-\alpha < \vartheta < \alpha$) є тріщина з вершинами у точках $a = e^{-i\alpha}$ і $b = e^{i\alpha}$ комплексної площини $re^{i\vartheta}$. Береги розрізу L'' вільні від зовнішнього навантаження, а на нескінченності задано розтягуючі напруження $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \sigma^\infty$ ($\tau_{xy}^\infty = 0$). Згідно з моделлю Комніноу вважаємо, що береги

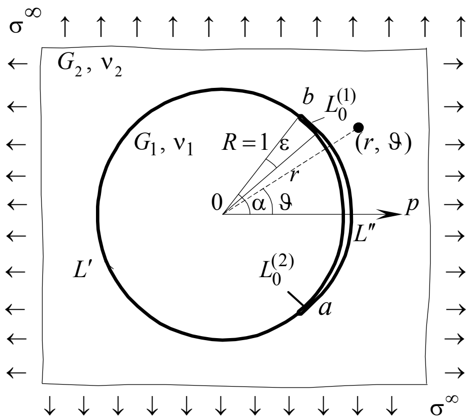

Рис. 1.

тріщини вступають у контакт вздовж дуг $L_0^{(1)}$ і $L_0^{(2)}$, прилеглих до вершин b і a тріщини. Приймаємо, що в областях контакту $L_0^{(1)}$ і $L_0^{(2)}$ спостерігається взаємне проковзування берегів тріщини і нормальний тиск та дотичні зусилля підпорядковуються закону тертя Амонтона (Кулона). Кутовий розмір ε областей контакту заздалегідь невідомий і підлягає визначенню.

Маємо наступні змішані умови на межі розділу $L' \cup L''$ ($L_0^{(1)} \cup L_0^{(2)} \subset L''$) матриці та включення

$$u_r^{(1)}\Big|_{r=1} = u_r^{(2)}\Big|_{r=1}, \quad \tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{r=1} = \tau_{r\vartheta}^{(2)}\Big|_{r=1} = \operatorname{sign}\vartheta \cdot \mu_0 \sigma_r^{(1)}\Big|_{r=1} =$$

$$= \operatorname{sign}\vartheta \cdot \mu_0 \sigma_r^{(2)}\Big|_{r=1} \quad (\alpha - \varepsilon \le |\vartheta| < \alpha), \tag{1.1}$$

$$\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=1} = \sigma_r^{(2)}\Big|_{r=1} = 0, \quad \tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{r=1} = \tau_{r\vartheta}^{(2)}\Big|_{r=1} = 0 \quad (|\vartheta| < \alpha - \varepsilon), \tag{1.2}$$

$$u_\vartheta^{(1)}\Big|_{r=1} = u_\vartheta^{(2)}\Big|_{r=1}, \quad u_r^{(1)}\Big|_{r=1} = u_r^{(2)}\Big|_{r=1}, \quad \sigma_r^{(1)}\Big|_{r=1} = \sigma_r^{(2)}\Big|_{r=1},$$

$$\tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{r=1} = \tau_{r\vartheta}^{(2)}\Big|_{r=1} \quad (\alpha \le \vartheta \le 2\pi - \alpha). \tag{1.3}$$

Тут верхній індекс $^{(1)}$ відповідає включенню, $^{(2)}$ — матриці; μ_0 — коефіцієнт тертя. Знак $\operatorname{sign}\vartheta$ при μ_0 у формулі (1.1) вибрано згідно припущення, що для колових переміщень в областях контакту з проковзуванням справджується умова

$$\operatorname{sign}\vartheta \cdot \Delta u_\vartheta = \operatorname{sign}\vartheta \cdot (u_\vartheta^{(2)} - u_\vartheta^{(1)})\Big|_{r=1} < 0 \quad (\alpha - \varepsilon \le |\,\vartheta\,| < \alpha), \tag{1.4}$$

у виконанні якої слід пересвідчитися після розв'язання задачі.

2. Інтегральне рівняння задачі

Введемо невідому функцію контактного тиску

$$\sigma(t) = -\frac{1}{2G_1}\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=1} \quad (t \in L_0^{(1)}, \;\; \alpha - \varepsilon \le \vartheta < \alpha). \tag{2.1}$$

Тоді напруження на берегах тріщини L'' запишемо у вигляді

$$\sigma_r^{(j)}\Big|_{r=1} = \begin{cases} -2G_1\sigma(t), & t \in L_0, \\ 0, & t \in L'' \setminus L_0, \end{cases} \qquad \tau_{r\vartheta}^{(j)}\Big|_{r=1} = \begin{cases} -2G_1\mu_0 \operatorname{sign}\vartheta \cdot \sigma(t), & t \in L_0, \\ 0, & t \in L'' \setminus L_0 \end{cases}$$

$$(j = 1, 2), \quad L_0 = L_0^{(1)} \cup L_0^{(2)}. \tag{2.2}$$

Розв'язок виразимо через комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi_j(z)$, $\Psi_j(z)$ у вигляді [18]

$$\sigma_r^{(j)} + \sigma_\vartheta^{(j)} = 2[\Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)}],$$

$$\sigma_r^{(j)} + i\tau_{r\vartheta}^{(j)} = \Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)} - \bar{z}\overline{\Phi_j'(z)} - \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi_j(z)},$$

$$2G_j(u_r^{(j)} + iu_\vartheta^{(j)}) = e^{-i\vartheta}[\kappa_j\varphi_j(z) - z\overline{\varphi_j'(z)} - \overline{\psi_j(z)}],$$

$$\varphi_j'(z) = \Phi_j(z), \quad \psi_j'(z) = \Psi_j(z), \quad \kappa_j = 3 - 4\nu_j \quad (j = 1, 2). \tag{2.3}$$

При цьому

$$\Phi_2(z) = \sigma^\infty/2 + O(z^{-2}), \quad \Psi_2(z) = O(z^{-2}), \quad |\,z\,| \to \infty. \tag{2.4}$$

Скористаємося розв'язком задачі (1.3), (2.2) без урахування областей контакту, одержаним у [19], де показано, що з введенням допоміжних функцій

$$\Omega_j(z) = -\overline{\Phi}_j\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z}\overline{\Phi}_j'\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z^2}\overline{\Psi}_j\left(\frac{1}{z}\right) \tag{2.5}$$

знаходимо

$$\Omega_j(z) = C - \Phi_j(z), \tag{2.6}$$

де C — невідома стала, підпорядкована умові

$$\overline{\Phi_1(0)} = \sigma^\infty / 2 - C, \tag{2.7}$$

а також

$$\Phi_j(z) = \frac{2G_1G_2}{\kappa_j G_{3-j} + G_j}\left(\Psi(z) + \frac{C}{2G_{3-j}}\right) \quad (j = 1,\ 2), \tag{2.8}$$

$$\Psi(\infty) = C_0 = \frac{\kappa_2 G_1 + G_2}{4G_1G_2}\sigma^\infty - \frac{C}{2G_1}, \tag{2.9}$$

де $\Psi(z)$ — функція, аналітична поза розрізом.

Для компонент тензора напружень маємо

$$\sigma_r^{(j)} + i\tau_{r\vartheta}^{(j)} = \Phi_j(z) + \left(1 - \frac{1}{z\bar{z}}\right)\overline{\Phi_j(z)} - \left(\bar{z} - \frac{1}{z}\right)\overline{\Phi'_j(z)} +$$

$$+ \frac{2G_1G_2}{\kappa_{3-j}G_j + G_{3-j}}\frac{1}{z\bar{z}}\left[\Psi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) - \frac{\kappa_{3-j}}{2G_{3-j}}C\right] \quad (j = 1,\ 2). \tag{2.10}$$

Із (2.10) отримуємо умову спряження

$$\Psi^+(t) + \frac{\kappa_1 G_2 + G_1}{\kappa_2 G_1 + G_2}\Psi^-(t) = h(t) \quad (t \in L''), \tag{2.11}$$

де $\Psi^+(t)$ означає граничне значення функції $\Psi(z)$ на контурі L'' з області $|z| < 1$, а $\Psi^-(t)$ — з області $|z| > 1$. Права частина рівності (2.11) є такою

$$h(t) = \frac{\kappa_1 G_2 + G_1}{2G_1G_2}\left(\sigma_r^{(1)} + i\tau_{r\vartheta}^{(1)}\right)\Big|_{r=1} + \frac{\kappa_1\kappa_2 - 1}{2(\kappa_2 G_1 + G_2)}C. \tag{2.12}$$

Розв'язок задачі спряження (2.11) з урахуванням (2.9) має вигляд [18]

$$\Psi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L''}\frac{h(t)dt}{X(t)(t - z)} + (C_0 z + C_1)X(z),$$

$$X(z) = (z - a)^{-1/2 - i\theta}(z - b)^{-1/2 + i\theta}, \quad \theta = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\kappa_2 G_1 + G_2}{\kappa_1 G_2 + G_1} > 0,$$

$$X^+(t) = X(t), \quad X^-(t) = -\frac{\kappa_2 G_1 + G_2}{\kappa_1 G_2 + G_1}X(t), \quad C_1 = -(\cos\alpha + 2\theta\sin\alpha)C_0. \tag{2.13}$$

З урахуванням (2.12), (2.2) і формули [18]

$$\int_{L''} \frac{dt}{\mathrm{X}(t)(t-z)} = \frac{2\pi i}{1+e^{-2\pi\theta}} \left(\frac{1}{\mathrm{X}(z)} - z + \cos\alpha + 2\theta \sin\alpha \right) \tag{2.14}$$

із співвідношень (2.13) маємо

$$\Psi(z) = \left[-\left(\kappa_1 + \frac{G_1}{G_2} \right)(1+i\mu_0) \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\sigma(t)dt}{\mathrm{X}(t)(t-z)} + \frac{C'}{1+e^{-2\pi\theta}} \left(\frac{1}{\mathrm{X}(z)} - z + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cos\alpha + 2\theta\sin\alpha \right) + C_0 z + C_1 \right] \mathrm{X}(z), \quad C' = \frac{C}{2} \frac{\kappa_1\kappa_2 - 1}{\kappa_2 G_1 + G_2}. \tag{2.15}$$

Якщо у розв'язку (2.15) знехтувати значенням інтеграла при $z = 0$ (величиною порядку $O(\varepsilon^{1-i\theta})$ при $\varepsilon \to 0$), то, враховуючи вираз (2.8), з умови (2.7) отримаємо

$$C = \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{\kappa_1 G_2 + G_1 - (\kappa_2 G_1 + G_2)\alpha_0}{\dfrac{(\kappa_1\kappa_2 - 1)G_1 G_2}{(\kappa_1+1)G_2 + (\kappa_2+1)G_1}(1-\alpha_0) + \kappa_1 G_2 + 2G_1 - G_2\alpha_0}, \tag{2.16}$$

де

$$\alpha_0 = e^{-2\theta\alpha}(\cos\alpha + 2\theta\sin\alpha).$$

Розв'язок (2.15) задачі (1.3), (2.2) використаємо далі як інтегральне представлення розв'язку контактної задачі (1.1)-(1.3), (2.2). При цьому функція $\Psi(z)$ із формули (2.15) задовольняє всі граничні умови (1.1)-(1.3) окрім першої з умов (1.1) на радіальні переміщення в областях контакту, з якої отримаємо інтегральне рівняння для визначення функції контактного тиску $\sigma(t)$.

Також, як і для прямолінійної міжфазної тріщини в однорідному полі розтягуючих напружень [2], приймемо, що розмір областей контакту значно (на декілька порядків) менший за розмір самої тріщини. Це припущення буде підтверджено далі фактичним розв'язком задачі. Тоді у поданні (2.3) для переміщень у точках контуру $L_0^{(1)}$ покладемо $e^{-i\vartheta} = e^{-i\alpha}$ і перейдемо до виразів для похідних переміщень (j = 1, 2)

$$2G_j \frac{d}{d\vartheta}(u_r^{(j)} + i u_\vartheta^{(j)})\Big|_{r=1} = i\left[\kappa_j \Phi_j^{\pm}(t) - \overline{\Phi_j^{\pm}(t)} - \bar{t}\,\overline{\Phi_j'^{\pm}(t)} + \frac{\bar{t}}{t}\overline{\Psi_j^{\pm}(t)} \right], \quad t \in L_0^{(1)}, \tag{2.17}$$

звідки на підставі (2.5)-(2.8) будемо мати

$$\frac{d}{d\vartheta}\left[u_r^{(2)} - u_r^{(1)} + i(u_\vartheta^{(2)} - u_\vartheta^{(1)}) \right]\Big|_{r=1} = i[\Psi^+(t) - \Psi^-(t)], \quad t \in L_0^{(1)}. \tag{2.18}$$

Якщо знехтувати взаємовпливом малих областей контакту $L_0^{(1)}$ і $L_0^{(2)}$, то, диференціюючи першу граничну умову (1.1) по ϑ і задовольняючи її за допомогою виразів (2.18), (2.15), отримуємо інтегральне рівняння відносно функції $\sigma(t)$

$$\mu_0 \operatorname{th}(\pi\theta)\sigma(t) - \operatorname{Im}\left((1+i\mu_0)\frac{X(t)}{\pi i}\int\limits_{L_0^{(1)}}\frac{\sigma(\tau)d\tau}{X(\tau)(\tau-t)}\right) =$$

$$= -\frac{2G_2C''}{\kappa_1 G_2 + G_1}\operatorname{Im}[(C_0 t + C_1)X(t)], \quad t \in L_0^{(1)}, \tag{2.19}$$

де

$$C'' = 1 - \frac{C'}{C_0(1+e^{-2\pi\theta})}. \tag{2.20}$$

З огляду на малість кутового розміру ε області контакту $L_0^{(1)}$ дамо асимптотичне спрощення при $\varepsilon \to 0$ рівняння (2.19). Виконуючи заміну змінних

$$\tau = e^{i\alpha}(1 - i\varepsilon e^{-\eta}), \quad t = e^{i\alpha}(1 - i\varepsilon e^{-\xi}), \quad (0 < \eta, \xi < \infty) \tag{2.21}$$

і переходячи до нової невідомої функції

$$\varphi(\eta) = \sigma\left[e^{i\alpha}(1 - i\varepsilon e^{-\eta})\right]e^{-\eta}, \tag{2.22}$$

отримаємо інтегральне рівняння на півосі з різницевим ядром

$$\int\limits_0^\infty k(\xi-\eta)\varphi(\eta)d\eta = f(\xi), \quad (0 \le \xi < \infty), \tag{2.23}$$

$$k(\xi-\eta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\lambda)e^{-i\lambda(\xi-\eta)}d\lambda, \quad K(\lambda) = \frac{\operatorname{sh}\pi\lambda \operatorname{ch}\pi(\lambda + i\gamma)}{\operatorname{ch}\pi(\lambda+\theta)\operatorname{ch}\pi(\lambda-\theta)},$$

$$f(\xi) = \frac{\sigma^\infty}{2iG_1}C''\cos\pi\gamma \cdot \sqrt{\frac{\sin\alpha}{2\varepsilon}}\, e^{\theta(\pi-\alpha)} \operatorname{Re}\left((1-2i\theta)e^{i\alpha/2}e^{-i\theta\ln\frac{\varepsilon}{2\sin\alpha}}e^{-(1/2-i\theta)\xi}\right),$$

де

$$\gamma = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(\mu_0 \operatorname{th}\pi\theta). \tag{2.24}$$

3. Розв'язування інтегрального рівняння

Для знаходження точного розв'язку інтегрального рівняння (2.23) застосуємо метод Вінера-Гопфа [20]. Для функцій

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \varphi(\xi)e^{iz\xi}d\xi, \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^0 e^{iz\xi}d\xi\int\limits_0^\infty k(\xi-\eta)\varphi(\eta)d\eta, \tag{3.1}$$

аналітичних відповідно у верхній ($\operatorname{Im} z > c^+$, $c^+ < 0$) і нижній ($\operatorname{Im} z < c^-$, $c^- > 0$) півплощинах комплексної площини, маємо функціональне рівняння

$$K(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z) = F(z) \quad (c^+ < \operatorname{Im} z < c^-), \tag{3.2}$$

де

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(\xi) e^{iz\xi} d\xi\,. \tag{3.3}$$

Факторизуємо коефіцієнт $K(z)$ і праву частину $F(z)$ рівняння (3.2)

$$\frac{K(z)}{z} = K^+(z)K^-(z)\,, \quad K^\pm(z) = \frac{\Gamma(1/2 \mp iz \mp i\theta)\,\Gamma(1/2 \mp iz \pm i\theta)}{\Gamma(1 \mp iz)\,\Gamma(1/2 \mp iz \pm \gamma)}\,,$$

$$F(z)\big/K^-(z) = f^+(z) - f^-(z)\,, \quad f^+(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{N}{z+\theta+i/2} + \frac{\overline{N}}{z-\theta+i/2}\right),$$

$$N = -\frac{\sigma^\infty}{2G_1} C'' \sqrt{\pi} \cos(\pi\gamma) \sqrt{\frac{\sin\alpha}{2\varepsilon}}\, e^{\theta(\pi-\alpha)} (1/2 - i\theta)^2 \frac{\Gamma(1-\gamma-i\theta)}{\Gamma(1-i\theta)} e^{i\alpha/2} e^{-i\theta \ln\frac{\varepsilon}{8\sin\alpha}}\,. \tag{3.4}$$

Розв’язок функціонального рівняння (3.2) має вигляд [20]

$$\Phi^+(z) = \frac{f^+(z)}{zK^+(z)}\,, \quad \Phi^-(z) = K^-(z) f^-(z) \tag{3.5}$$

за умови, що $f^+(0) = 0$, тобто

$$\operatorname{Re} \frac{N}{1/2 - i\theta} = 0\,. \tag{3.6}$$

Умову (3.6) з урахуванням виразу для N із (3.4) запишемо у вигляді рівняння

$$\cos\left[\frac{\alpha}{2} - \theta \ln\frac{\varepsilon}{8\sin\alpha} - \arg\left((1/2 + i\theta)\frac{\Gamma(1-\gamma+i\theta)}{\Gamma(1+i\theta)}\right)\right] = 0\,, \tag{3.7}$$

найменший додатний корінь якого визначає кутовий розмір області контакту

$$\varepsilon = 8\sin\alpha \cdot \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\left[\frac{\pi-\alpha}{2} + \arg\left((1/2 + i\theta)\frac{\Gamma(1-\gamma+i\theta)}{\Gamma(1+i\theta)}\right)\right]\right\}. \tag{3.8}$$

Інші додатні корені дають нефізичні розв’язки, для яких протилежні береги тріщини поза областю контакту взаємно перекриваються [9]. Від’ємні корені також приводять до нефізичних розв’язків, коли область контакту займає більше, ніж половину тріщини ($\varepsilon > \alpha$).

За допомогою оберненого перетворення Фур’є з формул (3.1) з урахуванням (3.5) отримуємо розв’язок інтегрального рівняння (2.23)

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^+(\lambda)}{\lambda K^+(\lambda)} e^{-i\lambda\xi} d\lambda\,. \tag{3.9}$$

4. Розподіл напружень

Знайдемо розподіл напружень на межі розділу матриці та включення ($r = 1$) в ε-околі вершини тріщини b: в області контакту берегів тріщини ($\alpha - \varepsilon \le \vartheta < \alpha$) і на продовженні тріщини ($\alpha \le \vartheta < \alpha + \varepsilon$). Обчислюючи інтеграл із (3.9) за теорією лишків і переходячи від функції $\varphi(\xi)$ за формулами (2.1), (2.22) до $\sigma_r^{(1)}\big|_{r=1}$, з урахуванням (3.8) отримаємо вираз для нормальних напружень в області контактного тиску ($r = 1$, $\alpha - \varepsilon \le \vartheta < \alpha$) через гіпергеометричну функцію Гауса ${}_2F_1(a_1,\, a_2;\, a_3;\, z)$ [21]

$$\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=1} = \frac{A}{\left|\Gamma(1+i\theta)\right|}\left[\operatorname{ch}\pi\theta\cdot\frac{\left|\Gamma(1-\gamma+i\theta)\right|}{\Gamma(3/2-\gamma)}\,{}_2F_1\!\left(\tfrac{1}{2}+i\theta,\, \tfrac{1}{2}-i\theta;\, \tfrac{3}{2}-\gamma;\, \frac{\alpha-\vartheta}{\varepsilon}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{\Gamma(1/2+\gamma)\left|\Gamma(1-\gamma+i\theta)\right|}\,{}_2F_1\!\left(\gamma+i\theta,\, \gamma-i\theta;\, \tfrac{1}{2}+\gamma;\, \frac{\alpha-\vartheta}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\alpha-\vartheta}{\varepsilon}\right)^{-1/2+\gamma}\right], \quad (4.1)$$

де

$$A = \sigma^{\infty} C'' \theta\sqrt{1+4\theta^2}\, e^{\theta(\pi-\alpha)}\sqrt{\frac{\pi\sin\alpha}{2\varepsilon}}\ . \quad (4.2)$$

Із формули (4.1) визначаємо асимптотичну поведінку контактних напружень в околі вершини тріщини

$$\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=1} \sim -\frac{\pi A}{\Gamma(1/2+\gamma)\left|\,\Gamma(1+i\theta)\Gamma(1-\gamma+i\theta)\right|}\left(\frac{\alpha-\vartheta}{\varepsilon}\right)^{-1/2+\gamma}, \quad \vartheta \to \alpha - 0\,. \quad (4.3)$$

У випадку гладкого контакту ($\gamma = 0$) гіпергеометричні функції, які входять у співвідношення (4.1), виражаються через елементарні функції [21], і співвідношення (4.1) набуде вигляду

$$\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=1} = -\frac{A}{\theta\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha-\vartheta}}\operatorname{sh}\left(2\theta\arccos\sqrt{\frac{\alpha-\vartheta}{\varepsilon}}\right) \quad (\alpha-\varepsilon \le \vartheta < \alpha\,,\ \mu_0 = 0). \quad (4.4)$$

Виходячи із співвідношень (2.10), (2.8), отримаємо напруження на лінії L' спряження матриці та включення. В ε-околі вершини b тріщини маємо

$$(\sigma_r^{(1)} + i\tau_{r\vartheta}^{(1)})\Big|_{r=1} = \operatorname{ch}\pi\theta\left\{2G_1(1+i\mu_0)\frac{e^{i\xi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi^{+}(\lambda)}{\operatorname{ch}\left[\pi(\lambda-\theta)\right]}e^{-i\lambda\xi}d\lambda - iAe^{(1/2-i\theta)\xi}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[i\left(2\theta\ln 2-\arg\frac{\Gamma(1-\gamma+i\theta)}{\Gamma(1+i\theta)}\right)\right]\right\}, \quad e^{-\xi} = \frac{\vartheta-\alpha}{\varepsilon} \quad (\alpha \le \vartheta < \alpha+\varepsilon\,). \quad (4.5)$$

Після обчислення інтеграла з (4.5) за теорією лишків, знаходимо

$$\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=1} = \frac{A\left|\Gamma(1-\gamma+i\theta\right|\operatorname{ch}\pi\theta}{\Gamma(3/2-\gamma)\left|\Gamma(1+i\theta)\right|}\,{}_2F_1\!\left(\tfrac{1}{2}+i\theta,\, \tfrac{1}{2}-i\theta;\, \tfrac{3}{2}-\gamma;\, \frac{\alpha-\vartheta}{\varepsilon}\right),$$

$$\tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{r=1} = \mu_0 \sigma_r^{(1)}\Big|_{r=1} - \frac{\pi A \operatorname{cth}\pi\theta}{\Gamma(1/2+\gamma)\left|\Gamma(1+i\theta)\Gamma(1-\gamma+i\theta)\right|\cos\pi\gamma} \times$$

$$\times\, {}_2F_1\!\left(\gamma+i\theta,\ \gamma-i\theta;\ \tfrac{1}{2}+\gamma;\ \frac{\alpha-\vartheta}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\vartheta-\alpha}{\varepsilon}\right)^{-1/2+\gamma} \quad (\alpha \le \vartheta < \alpha+\varepsilon). \tag{4.6}$$

Нормальні напруження мають скінченне значення при $\vartheta \to \alpha + 0$

$$\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=1,\ \vartheta=\alpha+0} = \frac{A\left|\Gamma(1-\gamma+i\theta\right|\operatorname{ch}\pi\theta}{\Gamma(3/2-\gamma)\left|\Gamma(1+i\theta)\right|}\ . \tag{4.7}$$

Дотичні напруження мають степеневу особливість у вершині тріщини

$$\tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{r=1} \sim -\frac{\pi A \operatorname{cth}\pi\theta}{\Gamma(1/2+\gamma)\left|\Gamma(1+i\theta)\Gamma(1-\gamma+i\theta)\right|\cos\pi\gamma}\left(\frac{\vartheta-\alpha}{\varepsilon}\right)^{-1/2+\gamma},\ \vartheta\to\alpha+0. \tag{4.8}$$

На основі асимптотичної поведінки дотичних напружень (4.8) поблизу вершини тріщини визначаємо коефіцієнт інтенсивності зсувних напружень

$$K_{\mathrm{II}} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^\infty}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}\lim_{\vartheta\to\alpha+0}\left(\frac{\vartheta-\alpha}{\varepsilon}\right)^{1/2-\gamma}\tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{r=1} =$$

$$= \frac{\pi^2 C''\theta\sqrt{1+4\theta^2}\ \operatorname{cth}\pi\theta}{\Gamma(1/2+\gamma)\left|\Gamma(1+i\theta)\Gamma(1-\gamma+i\theta)\right|\cos\pi\gamma}\, e^{\theta(\pi-\alpha)}\sqrt{\frac{\sin\alpha}{\alpha}}\ . \tag{4.9}$$

У випадку гладкого контакту із співвідношень (4.6) отримуємо наступний розподіл напружень на продовженні тріщини

$$\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=1} = \frac{A\operatorname{ch}\pi\theta}{\theta\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\vartheta-\alpha}}\sin\left(2\theta\operatorname{arsh}\sqrt{\frac{\vartheta-\alpha}{\varepsilon}}\right),$$

$$\tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{r=1} = -\frac{A\operatorname{ch}\pi\theta}{\theta\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\vartheta-\alpha}}\cos\left(2\theta\operatorname{arsh}\sqrt{\frac{\vartheta-\alpha}{\varepsilon}}\right) \quad (\alpha \le \vartheta < \alpha+\varepsilon,\ \mu_0 = 0). \tag{4.10}$$

Перевіримо виконання умови (1.4) на тангенціальні переміщення в областях контакту. Із (2.18) отримуємо ($\rho = \operatorname{arctg}(\mu_0 \operatorname{cth}\pi\theta)/\pi$)

$$\Delta u_\vartheta = -\left(\frac{1-\nu_1}{G_1} + \frac{1-\nu_2}{G_2}\right)\frac{A\mu_0\varepsilon\cos[\pi(\rho-\gamma)]\left|\Gamma(\gamma+i\theta)\right|}{\sqrt{1+\mu_0^2}\ \operatorname{sh}(\pi\theta)\sin(\pi\rho)\Gamma(3/2+\gamma)\left|\Gamma(1+i\theta)\right|} \times$$

$$\times\, {}_2F_1\!\left(\gamma+i\theta,\ \gamma-i\theta;\ \tfrac{3}{2}+\gamma;\ \frac{\alpha-\vartheta}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\alpha-\vartheta}{\varepsilon}\right)^{1/2+\gamma} \quad (\alpha-\varepsilon \le \vartheta < \alpha). \tag{4.11}$$

З огляду на те, що гіпергеометрична функція ${}_2F_1\!\left(\gamma+i\theta,\ \gamma-i\theta;\ \tfrac{3}{2}+\gamma;\ (\alpha-\vartheta)/\varepsilon\right)$, яка входить до виразу (4.11), при даних значеннях своїх параметрів та аргументу набуває тільки дійсних додатних значень, в усіх точках області контакту біля вершини тріщини b різниця переміщень Δu_ϑ згідно (4.11) завжди від'ємна: $\Delta u_\vartheta < 0$, що підтверджує припущення (1.4) про напрямок відносного переміщення берегів тріщини в областях контакту і вибір знаку при коефіцієнті тертя μ_0 у другій граничній умові (1.1).

5. Результати обчислень

Числові значення кутового розміру області контакту ε і коефіцієнта інтенсивності напружень K_{II}, які обчислені за формулами (3.8) і (4.9) для різних відношень модулів зсуву G_1/G_2 і кутів піврозхилу тріщини α та $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, подано у табл. 1, 2. Верхні значення відповідають гладкому контакту ($\mu_0 = 0$), нижні — фрикційному контакту ($\mu_0 = 0{,}5$) берегів тріщини. Припущення, що $\varepsilon << \alpha$, зроблене при виведенні інтегрального рівняння, підтверджується табличними даними величини ε, яка істотно залежить як від кутового розміру тріщини, так і від відношення модулів зсуву включення та матриці. Із зростанням відношення модулів зсуву G_1/G_2 матеріалів включення та матриці розмір області контакту ε і коефіцієнт інтенсивності напружень K_{II} збільшуються. Разом з тим коефіцієнт K_{II} зменшується зі збільшенням кутового розміру тріщини 2α. Врахування сил тертя в областях контактного тиску берегів тріщини дає поправку до значення коефіцієнта інтенсивності зсувних напружень до 7%, якщо коефіцієнт тертя $\mu_0 = 0{,}5$.

Таблиця 1. Значення ε ($\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, $\mu_0 = 0$ та 0,5)

G_1/G_2 \ α	1°	30°	60°	90°	120°	150°
1,5	$1{,}05\cdot10^{-39}$ $1{,}06\cdot10^{-39}$	$3{,}26\cdot10^{-32}$ $3{,}31\cdot10^{-32}$	$9{,}91\cdot10^{-26}$ $1{,}01\cdot10^{-25}$	$2{,}01\cdot10^{-19}$ $2{,}04\cdot10^{-19}$	$3{,}05\cdot10^{-13}$ $3{,}10\cdot10^{-13}$	$3{,}09\cdot10^{-7}$ $3{,}14\cdot10^{-7}$
4	$9{,}34\cdot10^{-15}$ $9{,}77\cdot10^{-15}$	$2{,}64\cdot10^{-11}$ $2{,}76\cdot10^{-11}$	$5{,}29\cdot10^{-9}$ $5{,}53\cdot10^{-9}$	$7{,}06\cdot10^{-7}$ $7{,}39\cdot10^{-7}$	$7{,}07\cdot10^{-5}$ $7{,}40\cdot10^{-5}$	$4{,}72\cdot10^{-3}$ $4{,}94\cdot10^{-3}$
∞	$1{,}08\cdot10^{-9}$ $1{,}17\cdot10^{-9}$	$4{,}64\cdot10^{-7}$ $5{,}01\cdot10^{-7}$	$1{,}32\cdot10^{-5}$ $1{,}42\cdot10^{-5}$	$2{,}50\cdot10^{-4}$ $2{,}70\cdot10^{-4}$	$3{,}56\cdot10^{-3}$ $3{,}84\cdot10^{-3}$	$3{,}37\cdot10^{-2}$ $3{,}64\cdot10^{-2}$

Таблиця 2. Значення K_{II} ($\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, $\mu_0 = 0$ та 0,5)

G_1/G_2 \ α	1°	30°	60°	90°	120°	150°
1,5	1,905 1,930	1,815 1,839	1,604 1,625	1,321 1,338	1,003 1,016	0,652 0,661
4	2,194 2,282	2,066 2,149	1,825 1,898	1,511 1,571	1,151 1,197	0,746 0,776
∞	2,520 2,694	2,349 2,511	2,082 2,225	1,739 1,859	1,335 1,427	0,864 0,923

Висновки. Таким чином, розмір областей контакту берегів міжфазної тріщини на межі розділу кругового включення та матриці, як і у випадку тріщини на межі розділу двох різнорідних півплощин, в умовах усестороннього розтягу на декілька порядків менший від розміру самої тріщини. З огляду на надзвичайно малий розмір областей контактного тиску, врахування контакту берегів міжфазної тріщини не впливає поза малими околами вершин тріщини на напружено-деформований стан пружної матриці з включенням. Проте введення областей контакту, по-перше, усуває фізичну суперечливість розв'язку щодо перекриття берегів тріщини і, по-друге, дає можливість коректно визначити коефіцієнт інтенсивності зсувних напружень.

Література

[1] *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1952. — Vol. 19, № 4. — P. 526-535.

[2] *Дундурс Я., Комниноу М.* Обзор и перспективы исследования межфазной трещины // Разрушение композит. материалов. — Рига, 1979. — С. 78-87.

[3] *Симонов И. В.* Межфазная трещина в однородном поле напряжений // Механика композит. материалов. — 1985. — № 6. — С. 969-976.

[4] *Gautesen A. K., Dundurs J.* The interface crack under a combined loading // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1988. — Vol. 55. — P. 580-586.

[5] *Loboda V. V.* The quasi-invariant in the theory of interface crack // Eng. Fract. Mech. — 1993. — Vol. 44. — P. 573-580.

[6] *Herrmann K. P., Loboda V. V.* On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // Arch. Appl. Mech. — 1999. — Vol. 69. — P. 311-335.

[7] *Herrmann K. P., Loboda V. V.* Fracture-mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models // Arch. Appl. Mech. — 2000. — Vol. 70. — P. 127-143.

[8] *Харун І. В., Лобода В. В.* Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил і моментів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2002. — Т. 45, № 2. — С. 103-113.

[9] *Улитко А. Ф.* Полубесконечный разрез вдоль границы жестко соединенных полуплоскостей из различных материалов // Соврем. проблемы механики сплошной среды. — Ростов-на-Дону, 1995. — С. 185-193.

[10] *Острик В. І., Улітко А. Ф.* Тріщина на межі розділу півплощин з різних матеріалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2000. — Т. 43, № 2. — С. 119-126.

[11] *Острик В. І., Улітко А. Ф.* Контактна задача для міжфазної напівнескінченної тріщини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2001. — Т. 44, № 3. — С. 88-95.

[12] *Улітко А. Ф., Острик В. І.* Міжфазна тріщина за умови фрикційного контакту берегів // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. — 2002. — Вип. 2. — С. 133-141.

[13] *Острик В. І.* Контакт з тертям берегів міжфазної тріщини за розтягу та зсуву // Фізико-хімічна механіка матеріалів. — 2003. — Т. 39, № 2. — С. 58-65.

[14] *Martin-Moran C. J., Barber J. R., Comninou M.* The penny-shaped interface crack with heat flow. Part 1: Perfect contact // J. of Applied Mechanics. — 1983. — Vol. 50, № 1. — P. 29-36.

[15] *Barber J. R., Comninou M.* The penny-shaped interface crack with heat flow. Part 2: Imperfect contact // J. of Applied Mechanics. — 1983. — Vol. 50, № 4a. — P. 770-776.

[16] *Острик В. І., Улітко А. Ф.* Осесиметрична контактна задача для міжфазної тріщини // Фізико-хімічна механіка матеріалів. — 2004. — Т. 40, № 1. — С. 21-26.
[17] *Острик В. І., Улітко А. Ф.* Кругова міжфазна тріщина за умови фрикційного контакту поверхонь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — Т. 47, № 1. — С. 84-94.
[18] *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 707 с.
[19] *Черепанов Г. П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1962. — № 1.
[20] *Нобл Б.* Метод Винера-Хопфа. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 280 с.
[21] Справочник по специальным функціям; под ред. *Абрамовича М.* и *Стиган И.* — М.: Наука, 1979. — 832 с.

Межфазная трещина на границе раздела кругового включения и матрицы

Андрей Улитко, Владимир Острик

Рассмотрено напряженное состояние жестко соединенных между собой упругих матрицы и кругового включения из разных материалов, на границе раздела которых находится трещина. Учтен контакт берегов трещины вблизи ее вершин и силы трения в области контакта. С использованием метода Винера-Хопфа решение интегрального уравнения задачи получено в замкнутой форме. Найдены в явном виде длина области контакта берегов трещины, распределение напряжений в области контакта и на границе раздела матрицы и включения вне трещины.

An Interphase Crack on Circular Inclusion and Matrix Interface

Andriy Ulitko, Volodimir Ostrik

The tension state of rigidly connected elastic matrix and circular inclusion from different materials with the crack on their interface is studied. The contact of shore of the crack close to its vertices is taken into account. Friction forces are taken into account in the contact zone. Using Wiener-Hopf method the solving of the integral equation of the problem is received in the closed form. The size of the contact domain of the shores of the crack, the distribution of tensions in the contact domain and on their interface of matrix and inclusion out of the crack are found in the closed form.

Отримано 22.12.05