УДК 539.3

Проблемы построения теории тонких пластин (исторический комментарий)

Эдуард Григолюк[1], Виктор Мамай[2]

[1] д. ф.-м. н., профессор, член-кор. РАН, Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова
[2] д. ф.-м. н., профессор, Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Мичуринский проспект, 1, Москва, В-234, Россия, 117234, e-mail: mamai@imec.msu.ru

Обсуждаются основные этапы построения теории изгиба тонких пластин. Рассматривается вклад различных ученых в решение этой проблемы. Приведены основные библиографические источники по этому вопросу.

Ключевые слова: тонкие пластины, теория изгиба, исторический обзор.

Введение. Рассмотрим основные этапы построения уравнений теории изгиба пластин на примерах линейной технической теории изгиба тонких пластин и нелинейной квадратичной теории изгиба гибких пластин Фёппля-Кармана.

Расчет по технической теории пластин сводится к интегрированию одного уравнения Жермен-Лагранжа [1], [2] (1811 г.)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q}{D} \text{ или } \Delta\Delta w=\frac{q}{D} \tag{1}$$

где w — прогиб срединной плоскости пластины, q — поперечная внешняя нагрузка; Δ — оператор Лапласа, $D=Eh^3/\left[12(1-\nu^2)\right]$ — цилиндрическая жесткость, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина пластины. При этом для w на каждой кромке пластины должны быть выполнены по два граничных условия.

В случае малых поперечных изгибных колебаний пластины соответствующее уравнение имеет вид [1] (1811 г.)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+k^2\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=0, \tag{2}$$

где $k^2=-D/m$, m — удельная масса пластины.

Расчет по теории пластин Фёппля-Кармана [5], [6] сводится к нахождению прогиба пластины w и функции напряжений F из следующей системы уравнений Т. Кармана [6] (1910 г.)

$$\Delta\Delta w = \frac{1}{D}\left\{q + h\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right]\right\},$$

$$\Delta\Delta F = E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]. \qquad (3)$$

В дополнение к двум граничным условиям относительно w на каждой кромке пластины должны быть поставлены дополнительные условия для функции F или на перемещения u_1 и u_2 в срединной плоскости пластины.

Обсудим известный нам материал по этой проблеме в следующей последовательности:

- физические гипотезы, позволяющие свести трехмерную задачу к двумерной;
- потенциальная энергия деформации пластины;
- соотношения закона Гука;
- дифференциальные уравнения, граничные условия и первые решения задачи теории изгиба пластин.

1. Физические гипотезы

В идейном смысле гипотезы теории изгиба пластин восходят к гипотезам теории изгиба стержней Бернулли-Эйлера, поэтому имеет смысл их здесь напомнить.

Теория стержней Бернулли-Эйлера основана на следующих двух основных допущениях.

- Принимается гипотеза плоских сечений, согласно которой поперечные сечения стержня, первоначально плоские и нормальные к центральной оси стержня, остаются плоскими и нормальными к деформированной оси.
- Пренебрегается нормальными напряжениями в площадках, параллельных оси стержня, т. е. считается, что продольные слои стержня не давят друг на друга.

В ряде случаев устанавливаются также ограничения на величину прогибов стержня. В технической теории изгиба стержней, когда для кривизны принимается приближенное выражение

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 w}{dx^2},$$

считается, что прогибы стержня не должны превышать его толщины. В эластиках Эйлера, когда принимается точное выражение для кривизны

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 w / dx^2}{\left[1 + (dw/dx)^2\right]^{3/2}},$$

прогибы могут быть любыми. В приведенных формулах для кривизн обозначено: w — прогиб центральной оси стержня, x — продольная координата, ρ — текущий радиус кривизны стержня.

Считается, что первое из этих допущений– гипотеза плоских сечений, была сформулирована Якобом Бернулли I (старшим) (Bernoulli Jacob, 1654-1705) в работах [9] 1694 г. и [11] 1705 гг. (см. С. П. Тимошенко [30], с. 37-38).

В отличие от Галилея и Мариотта, которые исследовали прочность стержней, Я. Бернулли изучал прогибы стержня при его изгибе. Он рассматривал изгиб консольного защемленного призматического стержня прямоугольного поперечного сечения под действием сосредоточенной силы P на свободном конце при прогибах, сравнимых с толщиной стержня. Я. Бернулли считал, что при изгибе изучаемого им стержня справедлива, в современной терминологии, гипотеза плоских сечений. Геометрические представления в соответствии с этой гипотезой позволили ему записать основное уравнение изгиба стержня в следующем виде

$$C\frac{1}{\rho}=Px,$$

где $1/\rho=d^2w/dx^2$, C — изгибная жесткость, которую Я. Бернулли вычислил не совсем точно.

Эти исследования продолжил Леонард Эйлер (Euler Leonhard, 1707-1783) [13], который, следуя Я. Бернулли, принял, что кривизна изогнутой оси стержня в каждой ее точке пропорциональна изгибающему моменту в этой точке. Задача была решена Л. Эйлером вариационным методом: Л. Эйлер, следуя Д. Бернулли, ввел понятие энергии деформации изгиба стержня и искал минимум следующего функционала

$$\int_0^S \frac{1}{\rho^2}\,ds, \tag{4}$$

где ρ — кривизна стержня.

При этом дифференциальное уравнение для случая консольного стержня имеет вид

$$C\frac{d^2w/dx^2}{\left[1+(dw/dx)^2\right]^{3/2}}=Px.$$

Л. Эйлер проинтегрировал это уравнение, используя представление для прогиба w в виде степенного ряда. Найденное нелинейное решение задачи в предельном случае малых прогибов дает известный результат о величине прогиба консольного стержня

$$w=\frac{Pl^3}{3C},$$

где $C = EJ$.

Таким образом, Эйлер считал, что первая гипотеза, гипотеза плоских сечений, справедлива при произвольных изгибах стержня. Вторая гипотеза стержней неявно использована Л. Эйлером, так же как и Я. Бернулли, принятием в качестве исходного функционала энергии деформации изгиба. Закон Гука нигде не использовался.

Работы Я. Бернулли I (1691 г. [8], 1694 г. [9], 1695 г. [11]) и Л. Эйлера (1744 г., [13]) по упругим кривым переведены на немецкий язык в 1910 г. [12] в серии «Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. № 175».

Техническая теория пластин построена на следующих основных гипотезах, введенных Г. Кирхгоффом [18].

- Гипотеза плоских недеформируемых нормалей, согласно которой нормаль к срединной плоскости пластины до деформации остается нормалью к срединной поверхности пластины в течение всего процесса деформации и элемент нормали в пределах толщины не деформируется (не сжимается и не растягивается).
- Считается, что поперечные нормальные напряжения существенно меньше нормальных напряжений, расположенных в плоскости пластины, и поэтому ими можно пренебречь.

В теории пластин Фёппля-Кармана принимаются следующие допущения [5, 6].

- Рассматриваемая пластина является настолько тонкой, что справедливы сформулированные выше гипотезы Г. Кирхгоффа технической теории пластин.
- Рассматриваемая пластина настолько тонкая, что усилия, стремящиеся вызвать деформацию срединного слоя пластины, могут оказать значительные влияния на ее прогиб под действием поперечной нагрузки.
- Рассматриваемая пластина прогибается столь значительно, что нельзя пренебрегать влиянием ее прогиба на усилия, стремящиеся вызвать деформацию ее срединного слоя.

Первое из этих допущений называют гипотезой прямых нормалей. В теории изгиба тонких пластин ей принадлежит такое же место, какое занимает в теории изгиба стержней гипотеза плоских сечений. Второе допущение требует, чтобы усилия, деформирующие срединную поверхность в ее плоскости, были приняты во внимание при составлении уравнений равновесия ее под действием поперечной нагрузки. Третье допущение требует, чтобы при составлении общего выражения для деформации срединной поверхности пластины было учтено влияние прогиба на величину этих деформаций.

Введем систему декартовых координат x, y и z так, что оси x и y находятся в срединной плоскости пластины. Перемещения точек срединной поверхности вдоль осей x, y и z обозначим через u_1, u_2 и w соответственно.

Выпишем соотношения между деформациями и перемещениями, которые следуют из приведенных гипотез.

Как известно, точные выражения для компонент деформации ε_1, ε_2 и γ_{12} срединной поверхности получены Густавом Кирхгоффом (Kirchhoff Gustav Robert, 1824-1887) в 1876 г. [20] и имеют вид

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 + 2\frac{\partial u_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1,$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{1 + 2\frac{\partial u_2}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} - 1,$$

$$\gamma_{12} = \arcsin \frac{\left[\frac{\partial u_1}{\partial y}\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial u_2}{\partial x}\left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]}{\left[(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\right]}. \tag{5}$$

Там же [20] приведены приближенные выражения для деформаций ε_1, ε_2 и γ_{12}, принятые в нелинейной теории изгиба гибких пластин Фёппля-Кармана

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + 1\Big/2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \ \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y} + 1\Big/2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{6}$$

В технической теории тонких пластин соотношения (6) еще упрощаются и имеют вид

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \ \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}. \tag{7}$$

Перемещения u_1^z, u_2^z, w^z точек пластины при $|z| \le h/2$ определяются, в соответствии с принятыми гипотезами, следующими формулами

$$u_1^z = u_1 - z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_2^z = u_2 - z\frac{\partial w}{\partial y}, \quad w^z = w. \tag{8}$$

Наконец, деформации $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ и ε_{12} в плоскости, отстоящей от срединной плоскости пластины на $|z| \le h/2$, в обеих теориях имеют вид

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \ \varepsilon_{12} = \gamma_{12} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{9}$$

2. Потенциальная энергия деформации пластины

Потенциальная энергия деформации пластины длительное время была предметом оживленных дискуссий.

В технической теории тонких пластин принимается во внимание только изгиб пластины, и потенциальная энергия деформации пластины сводится к потенциальной энергии изгиба. Ее построением занимались Лагранж, Жермен, Пуассон и Кирхгофф.

Софи Жермен (Germain Sophy, 1776-1831) была знакома с работой Эйлера 1743 г. по упругим кривым и, следуя Эйлеру, воспользовалась вариационным исчислением для вывода дифференциального уравнения изгиба пластины. Для потенциальной энергии деформации изгиба она приняла, без каких-либо объяснений, следующее выражение (сравни функционал (4), принятый Л. Эйлером при изучении изгиба стержней)

$$A\iint\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)^2 ds, \tag{10}$$

где ρ_1 и ρ_2 — главные радиусы кривизны изогнутой поверхности пластины, A — постоянная. В общем-то, почти правильное выражение (10) не удовлетворяло отсутствием обоснования принятого функционала и неопределенностью константы A.

Принимая в качестве потенциальной энергии функционал (10), Жозеф Луи Лагранж (Lagrange Joseph Louis, 1736-1813) получил в 1811 г. [1] уравнение (2) малых поперечных изгибных колебаний пластины.

В работе [27] 1814 г. С. Пуассон показал, что уравнение (2) может быть получено из интеграла

$$A\iint\left[\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)^2+m\left(\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}\right)\right]ds, \tag{11}$$

который при соответствующем выборе постоянных A и m представляет точное выражение энергии деформации изгиба пластины.

Наконец, Г. Кирхгофф в 1876 г. [20] записал практически правильное (но с другой упругой постоянной) выражение потенциальной энергии деформации изгиба пластины. Он же первым получил выражение для цилиндрической жесткости D при произвольном значении коэффициента Пуассона ν, а именно

$$D=Eh^3/12\left(1-\nu^2\right). \tag{12}$$

В заключение выпишем потенциальную энергию деформации пластины для случая уравнений Фёппля-Кармана, которая, в соответствии с принятыми гипотезами $\left(\varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=0,\ \sigma_{33}=0\right)$, состоит из потенциальной энергии деформации срединной поверхности пластины и потенциальной энергии изгиба пластины.

Выражение потенциальной энергии деформации имеет вид

$$V = \frac{1}{2}\iiint\left[\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\varepsilon_{12}\right]dxdydz. \tag{13}$$

Используя соотношения закона Гука, легко получить

$$V = \frac{1}{2}\frac{E}{1-\nu^2}\iiint\left[\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \frac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12}^2\right]dxdydz. \tag{14}$$

Выполняя интегрирование по z, можно представить выражение потенциальной энергии в виде двух слагаемых

$$V = V_{\text{ср. пов.}} + V_{\text{изг.}}. \tag{15}$$

Здесь потенциальная энергия деформации срединной поверхности пластины определяется формулой

$$V_{\text{ср. пов.}} = \frac{h}{2E}\iint\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2 - 2\nu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy \tag{16}$$

или

$$V_{\text{ср. пов.}} = \frac{h}{2E}\iint\left\{(\Delta F)^2 + 2(1+\nu)\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]\right\}dxdy. \tag{17}$$

Потенциальная энергия деформации изгиба пластины равна

$$V_{\text{изг.}} = \frac{1}{2}D\iint\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy \tag{18}$$

или

$$V_{\text{изг.}} = \frac{1}{2}D\iint\left\{(\Delta w)^2 + 2(1-\nu)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\right\}dxdy, \tag{19}$$

где $D = Eh^3 \big/ \left[12\left(1-\nu^2\right)\right]$ — цилиндрическая жесткость пластины.

Заметим, что формула (19) впервые была получена, с точностью до постоянных, Г. Кирхгоффом [20].

3. Закон Гука

Напомним основные этапы построения деформационных соотношений линейной теории упругости.

В 1675 г. Роберт Гук (Robert Hooke, 1635-1702) опубликовал анаграмму — *ceiiinosssttuv,* а спустя три года расшифровал ее, как *ut tensio sic vis* [21]. Гук пришел к такому заключению на основании выполненных им экспериментов со спиральными пружинами. Затем Якоб Бернулли I в работах [9], [11] (1694, 1705 гг.) дал, как мы теперь понимаем, иную интерпретацию закона Гука, принимая, что кривизна центральной оси изогнутого плоского стержня пропорциональна изгибающему моменту. Наконец, Леонард Эйлер, сопоставляя опыты Гука по растяжению пружин с растяжением сплошного стержня, использовал параметр, определяемый в настоящее время как модуль Юнга [16].

Впервые в явной форме связь между нормальным напряжением σ и относительной деформацией ε при растяжении стержня сформулировал Томас Юнг (Young Thomas, 1773-1829) в работе [22]. Обсуждение этого вопроса можно найти во второй части монографии (§§ 686-687) Вильяма Томпсона (Kelvin William Thomson, 1824-1907) и Петера Тэта (1831-1901 гг.) [23]. С этого момента стали возможны как корректная запись соотношений теории изгиба упругого стержня, так и определение изгибной жесткости его.

Однако попытка перенесения результатов теории изгиба стержня на изгиб пластин наталкивалась на отсутствие теории напряженно-деформированного состояния в точке сплошной среды. Закон Гука для пространственного напряженного состояния сформулировал в 1828 г. Огюстен Коши (Cauchy Augustin Louis, 1789-1857) в работах [24], [25].

Его первая работа [24] была доложена в Академии наук 30 сентября 1822 года. В этой работе нет формул, но дано ясное представление о тензоре напряжений в точке. В дальнейшем [25] он подробно изучил эту проблему. Им был введен элементарный тетраэдр в окрестности внутренней точки тела и соответствующие компоненты напряжений по его граням, вычислены нормальные и касательные напряжения по наклонной площадке и получены уравнения равновесия малого элемента в напряжениях. Наконец, им получены выражения для компонент напряжений через производные от компонент перемещений в точке, т. е. от деформаций. Эта связь между компонентами напряжений и деформаций представляет собой закон Гука для пространственной изотропной среды. Кроме того, Коши получил соотношение закона Гука и для анизотропной среды общего вида.

В заключение приведем соотношения закона Гука для рассматриваемого класса пластин в случае изотропного материала.

В соответствии со второй гипотезой Г. Кирхгоффа напряжение σ_{33} мало по сравнению с напряжениями σ_{11} и σ_{22}. В этом случае соотношения закона Гука имеют следующий вид

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{11}-\nu\sigma_{22}\right),\ \varepsilon_{22}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{22}-\nu\sigma_{11}\right),\ \varepsilon_{12}=\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{12}, \tag{20}$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

Из формул (20) непосредственно следует

$$\sigma_{11}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}\right),\ \sigma_{22}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}\right),\ \sigma_{12}=\frac{E}{1-\nu^2}\frac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12}. \tag{21}$$

4. Дифференциальные уравнения, граничные условия и первые решенные задачи

Создание теории сопротивления пластин и оболочек внешним воздействиям обычно относят к началу XIX века. Тем не менее, истоки этой теории восходят к работам Л. Эйлера (1707-1783 гг.). Так, известны работы Л. Эйлера 1764 г. [14], [15] по определению высоты звука литавр и тонов колебаний колоколов. При этом литавр моделировался мембраной, а колокол, рассматриваемый как оболочка вращения переменной толщины — криволинейным стержнем. При этом Л. Эйлер предложил изучать поперечные колебания мембраны, рассматривая ее, как систему перекрестных нитей разных жесткостей

$$a_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (22)$$

где w — прогиб мембраны, a_1 и a_2 — постоянные, x, y и t — прямоугольные координаты и время. Уравнение (22) для нитей одинаковой жесткости имеет вид

$$\Delta w = -\frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (23)$$

где Δ — оператор Лапласа, ρ — удельная масса, E — модуль упругости нити.

Следующий шаг был сделан Якобом Бернулли II (младшим) (Bernoulli Jacob, Yng. 1756-1789) [17] (1789 г.), который моделировал пластину системой перекрестных стержней. В этом случае уравнение изгиба пластины имеет вид

$$a_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + a_4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q, \qquad (24)$$

где q — распределенная нагрузка на пластину, a_3 и a_4 — постоянные. Как мы теперь знаем, в уравнении (24) не хватает лишь члена $2\partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2$, определяющего кручение пластины.

Известно, что большой интерес исследователей к построению математической теории пластин во многом был вызван работами Эрнста Хладни (Chladni Ernst Florens Friedrich, 1756-1827) по акустике, особенно его известными экспериментами с пластинами, в которых, с помощью насыпанного на пластину песка, были обнаружены возникающие при колебаниях узловые линии для различных тонов колебаний [26].

Опыты Хладни были показаны в 1809 г. во Французской академии наук в присутствии Наполеона, который и предложил назначить академическую премию за разработку математической теории колебаний пластин.

По окончании конкурса (1811 г.) была представлена лишь одна работа, написанная С. Жермен.

При вычислении вариации выражения (10) С. Жермен допустила ошибку, которую заметил и исправил эксперт жюри конкурса Лагранж, получивший правильное уравнение малых изгибных колебаний пластин.

В отзыве Лагранжа [1] приводится уравнение, выведенное С. Жермен

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + gEbc\left(\frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 w}{\partial y^4 \partial x^2}\right) = 0, \tag{25}$$

где g, E, b, c — величины, представленные в исследовании Жермен.

Там же (на с. 150) представлено корректное уравнение изгиба пластины, полученное самим Лагранжем,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k^2\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = 0, \tag{26}$$

где w — прогиб пластины; k — постоянная (неопределена); x, y и t — прямоугольные координаты и время. Но в публикации содержится опечатка: в уравнении (26) в оригинале не $\partial^2 w / \partial t^2$, а $\partial^2 w / \partial x^2$. Уравнение теории малого изгиба впоследствии стали называть уравнением Жермен-Лагранжа.

В двух последующих конкурсах (1813 и 1816 гг.) С. Жермен представила правильное уравнение для пластины, но не смогла вновь пояснить физический смысл выражения (14). Тем не менее, в 1816 г. она получила премию Французской академии наук и опубликовала результаты своих исследований в 1821 г. [2] и в 1826 г. [3]. Изгибную жесткость пластины Жермен сама так и не нашла. Из более поздних работ Жермен на эту тему известна публикация [4].

Основные результаты по построению теории изгиба пластин принадлежат Симеону Пуассону ((Poisson Siméon Deni, 1781-1840), Луи Навье (Navier Cloude Louis Marie Henri, 1785-1836) и Густаву Кирхгоффу (Kirchhoff Gustav Robert, 1824-1887)).

Известная работа С. Пуассона [27] была доложена им в Академии наук 1 августа 1814 года. Он исходил из молекулярного представления о структуре материала пластины. Силы взаимодействия частиц, составляющих пластину, полагались пропорциональными изменениям расстояния между частицами. Пуассон располагал частицы в срединной плоскости, поэтому жесткость пластины у него пропорциональна квадрату толщины пластины h. Он получил известное уравнение малых колебаний пластины (2). Представленное на с. 219 этой работы уравнение изгиба учитывает, кроме того, распределенные усилия в плоскости пластины q_x и q_y, и растягивающие усилия в пластине. В этой же работе он получил уравнение Жермен-Лагранжа с помощью вариационного исчисления, используя функционал (11).

Позднее [28] он проинтегрировал уравнение движения пластины (2), используя преобразование Лапласа.

В работе [29], доложенной Пуассоном в 1828 г., впервые получено решение задачи об изгибе упругой тонкой осесимметричной круговой пластины при действии равномерного поперечного давления q и сосредоточенной поперечной силы P в центре для случая свободного опирания и жесткого защемления внешнего контура пластины. Кроме того, в этой работе изучены малые поперечные осесимметричные колебания круговых пластин. Эти результаты по круговым пластинам получены впервые. Отметим, что в работе Пуассона введена величина, которую теперь называют коэффициентом Пуассона. Пуассон полагал его равным 1/4.

Тем не менее, С. П. Тимошенко [30] считает, что первой удовлетворительной теорией изгиба пластин мы обязаны Л. Навье. Так, в 1820 г. им был представлен во Французскую Академию наук доклад на эту тему. Рукопись доклада хранится в библиотеке Парижской школы мостов и дорог. Краткое содержание доклада опубликовано в работе [31]. Л. Навье записал, исходя из атомарной Теории твердого тела Ньютона-Бошковича, дифференциальное уравнение для поперечного изгиба в общем виде

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q,$$

где q — распределенная поперечная нагрузка, D — изгибная жесткость пластины, отличающаяся от принятой в настоящее время.

Кроме того, он решил в двойных тригонометрических рядах задачу изгиба свободно опертой прямоугольной пластины при действии равномерно распределенной нагрузки q и сосредоточенной силы P в центре пластины.

Он также вывел дифференциальное уравнение устойчивости прямоугольной пластины при равномерном сжатии

$$\varepsilon h^3 \Delta\Delta w + T\Delta w - q - q_x \frac{\partial w}{\partial x} - q_y \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \tag{27}$$

где T — равномерная всесторонняя сжимающая удельная нагрузка по контуру пластины; q_x, q_y — распределенные нагрузки на пластину, действующие вдоль осей x и y; ε — постоянная упругости. Л. Навье решил это уравнение с помощью двойных рядов по синусам.

Уравнение (27) предвосхитило известное уравнение устойчивости Барре де Сен-Венана (Saint-Venant Barré, 1797-1886), полученное им в 1883 г.

$$D\Delta\Delta w = T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q + q_x \frac{\partial w}{\partial x} + q_y \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{28}$$

где T_1, T_2 — удельные нормальные усилия по контуру пластин вдоль осей x и y, S — удельное сдвигающее усилие.

Остановимся на изгибной жесткости пластины в уравнении Навье, которую он записал в виде εh^3. Отметим важное обстоятельство: Навье правильно считал, что изгибная жесткость пропорциональна кубу толщины пластины h, это значит, что он неявно использовал линейное распределение касательных перемещений по толщине пластины. Величину упругой постоянной ε в уравнении (27) Навье не определил. Таким образом, из уравнения (27) следует, что по Навье касательные перемещения линейно зависят от расстояния до срединной плоскости пластины.

С именем Кирхгоффа связано, прежде всего, завершение теории изгиба и малых поперечных колебаний тонких упругих пластин. В отличие от своих предшественников Кирхгофф располагал законом Гука для пространственного напряженного состояния, сформулированного в 1828 г. Огюстеном Коши. Поэтому он смог корректно записать выражения для нормальных и касательных напряжений в плоскости пластины, после того как он предельно четко и ясно сформулировал в работах 1848-1850 гг. [18] две основные гипотезы теории пластин:

1) о нормали к срединной плоскости пластины, остающейся нормалью и к деформированной поверхности пластины;

2) о ненадавливаемости поверхностей, эквидистантных срединной.

Кирхгофф, используя функционал (19), вывел вариационное уравнение для пластины, дающее возможность вывода, как дифференциального уравнения, так и граничных условий задачи. Используя такой подход, он получил уравнение Жермен-Лагранжа и два граничных условия на каждом контуре пластины. Напомним, что Пуассон считал, что на каждом контуре следует удовлетворять трем граничным условиям.

К сожалению, Кирхгофф не пояснил, что означают полученные им условия на контуре пластины. Механическую интерпретацию граничных условий, установленных Кирхгоффом, дали В. Томпсон и П. Тэт в своей известной монографии 1867 г. [23]: Кирхгофф записал условия для свободного контура через прогиб срединной поверхности. Томпсон и Тэт показали, что это соответствует равенству нулю удельного изгибающего момента и обобщенной поперечной силы, которая выражается в виде суммы поперечной силы и производной от крутящего момента по линии контура. Пуассон же считал, что на рассматриваемом контуре одновременно равны нулю изгибающий и крутящий моменты, а также поперечная сила.

Впоследствии в связи с этим возник вопрос о соответствии порядка дифференциального уравнения задачи числу граничных условий и корректного их получения. Правильный подход предложил Кирхгофф. Результат Пуассона следует рассматривать как несоответствие числа контурных условий порядку дифференциального уравнения Жермен-Лагранжа.

Следует отметить также, что Кирхгофф в работах 1849-1850 гг. [19] впервые изучил малые поперечные колебания круговых пластин по осесимметричной и неосесимметричной формам.

Остановимся в заключение на уравнениях Фёппля-Кармана (3).

Квадратичный вариант соотношений (6) между деформациями и перемещениями, выписанный Кирхгоффом в его тридцатой лекции по механике [20], был положен в основу теории конечных прогибов тонких пластин.

Дифференциальные уравнения конечного прогиба тонких пластин были получены Иваном Григорьевичем Бубновым (1872-1919гг.) [32] (1902 г.), Августом Фёпплем (Föppl August, 1854-1924) [5] (1907 г.) и Теодором Карманом (Karman Theodor, 1881-1963) [6] (1910 г.). При этом А. Фёппль рассматривал поведение плоской мембраны [5], Т. Карман — плоской пластины [6], а И. Г. Бубнов — плоского и искривленного по цилиндрической поверхности листа бесконечной протяженности [32]. Если первые двое получили только уравнение проблемы, то И. Г. Бубнов установил и уравнение проблемы, и решил его для плоской и цилиндрической панели при равномерной поперечной нагрузке. Для цилиндрической панели бесконечной протяженности И. Г. Бубнов впервые в мировой литературе обнаружил эффект скачкообразного изменения прогиба, т. е. потерю устойчивости прощелкиванием панели при конечных прогибах.

Эту проблему затем исследовал Степан Прокофьевич Тимошенко (1878-1972 гг.) в известных работах [34], [35] по биметаллическому криволинейному стержню (1925 г.) и по однородному пологому стержню (1935 г.).

Литература

[1] *Lagrange J.-L.* Note communiquée aux commisaires poor le prix de la surface élastiques (décembre 1811) приведено на с. 149-150 статьи *Navier L.* Remarques sur l'Article de M. Poisson // Annales de Chimie et de Physique. — 1828. — Tome 39. — P. 145-151.

[2] *Germain S.* Recherches sur la théorie des surfaces élastiques. — Paris, 1821. — X+96+I p.

[3] *Germain S.* Recherches sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques ets. — Paris, 1826. — 2nn+21 p.

[4] *Germain S.* Examen des principes qui peuvent conduire à la connaissance des lois de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Annales de Chimie, ou Recueil de Mémoires concernant la Chimie et les Arts qui en dépendent, XXXVIII, 1828. — P. 123-131.

[5] *Föppl A.* Vorlesungen über technische Mechanik. Bd 5. Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. — Leipzig: B. G. Teubner, 1907. —391 s.

[6] *Karman Th.* Festigkeitsprobleme in Machinenbau. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Bd IV. Mechanik, Teilband 4, Hft 3, Art 27, Punkt 8. Ebene Platten. — Leipzig: B. G. Teubner, 1910. — S. 311-385 (см. с. 352). Перепечатка: *Karman Th.* Collected works. Vol. 1. — London, 1956. — 530 p. (см. с. 141-207; уравнения пластин конечного прогиба даны на с. 177).

[7] *Jacobi Bernoulli*, Basileensis, Opera. T. 1-2. Genevæ [Geneva], Sumptibus Hæredum Cramer & Fratrum Philibert. M, DCC, XLIV. [1744]. Tomus Primus, VIII, 663 p., 28 tab. (I-XXVIII); Tomus Secundus, 667-1141 p., 20 tab. (XXIX-XLVIII).

[8] *Bernoulli J. [I]*. Specimen alterum calculi differentialis in spirali logarithmica, loxodromiis nautarum, areis triangulorum sphæricorum, ets. Acta eruditorum Lipsiae [Leipzig], Jun. 1691, p. 282; Opera [7]. Tomus Primus, № XLII [номер работы Я. Бернулли, всего работ — CII], tab. XVI (fig. 1-7), p. 442-453. (Перевод на немецкий с. 451-452 содержится в работе [12], S. 3-4).

[9] *Bernoulli J.* [I]. Curvatura laminae elasticae. Acta eruditorum Lipsiae [Leipzig], Jun. 1694, p. 262; Opera [7]. Tomus Primus, № LVIII, tab. XXIII (fig. A, 1, 2), p. 576-600. (Эта статья переведена на немецкий целиком, см. [12], S. 5-17).

[10] *Bernoulli J.* [I]. Jacobi Bernoulli explicationes, annotationes et additiones: De curva elastica, isochrona, paracentrica, velaria ets. Acta eruditorum Lipsiae [Leipzig], Dec. 1695, p. 537; Opera [7]. Tomus Primus, № LXVI, tab. XXVII-XXVIII (fig. A, B, 1-12), p. 639-663. (Перевод части этой статьи на немецкий дан в работе [12], S. 108-112).

[11] *Bernoulli J. [I]*. Veritable hypothese de la resistance des solides ets. (Lettre du 12 Mart 1705). Histoire de l'Académie des sciences de Paris, 1705, p. 176, Ed. De Paris, & p. 250, Ed. de Holl; Opera [7]. Tomus Secundus, № CII, p. 976-989.

[12] *Bernoulli*, *Jacob und Euler*, *Leon(hard)*. Abhandlumgen über das Gleichgewicht und die Schwingunden der ebenen elastischen Kurven. Von Jakob Bernoulli (1691, 1694, 1695) und Leonh. Euler (1744). Übersetzt und herausdedeben von *H. Linsenbarth* mit 35 Textfiguren. Leipzig Verlag von *Wilhelm Engelmann*. 1910. 126 S. (Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. № 175).

[13] *Euler L*. Methodus inveniendi lineas curvas Maximi Minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Lausannæ et Genevæ. Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios. MDCCXLIV [1744], 322 p. Additamentum I: De Curvis Elasticis. — P. 245-310.
Перевод на немецкий язык: *Leonhard Euler*. Von den elastischen Kurven. Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. Nr. 175. Leipzig: Verlag von *Wilhelm Engelmann*, 1910, 126 S. (См. [12], S. 18-99, Anmerkungen S. 12-124).
Перевод на английский язык: Isis (An intern. rev. devoted to the history of science and its cultural influences). 1933, Vol. XX, № 58 (1), p. 1.
Перевод на русский язык: Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или Решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. — М.-Л.: Гос. тех. теор. изд. 1934. — 600 с. Приложение I. Об упругих кривых. — С. 447-572.

[14] *Euler L*. De motu vibratorio tympanorum. Novi Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae. Tomus X pro anno MDCCLXIV [1764]. Petropoli [СПб.]. MDCCLXVI [1766]. P. 243-260. Summ. diss., p. 30-32.

[15] *Euler L*. Tentamen de sono campanarum. Novi Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae. Tomus X pro anno MDCCLXIV [1764]. Petropoli [СПб.]. MDCCLXVI [1766]. P. 261-281. Summ. diss., p. 30-32.

[16] *Euler L*. Determinatio onerum, quae columnae gestare valent. Acta Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae. Pro anno 1780. Petropoli [СПб.]. 1783. P. 121-145.

[17] *Bernoulli J. [II]*. Essai théorétique sur les vibrations des plaques élastiques, rectangulaires et libres (Présenté à la Conférence le 21 octobre 1788). Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Tomus V. Praecedet historia ejus Academiae ad annnum. 1787. Petropoli [СПб.]. 1789. Avec 1 pl. gr. P. 197-219.

[18] *Kirchhoff G*. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. — Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1850. Bd 40, Hft 1. S. 51-88 (см. также: Note relative à la théorie de l'équilibre et du mouvement d'une plaque élastique. Paris, Comptes Rendus, XXVII, 1848, p. 394-397). Перепечатка: *Kirchhoff G*. Gesammelte Abhandlungen. — Leipzig: J.A.Barth, 1882. VII+641 S. (см. S. 237-279).

[19] *Kirchhoff G*. Über die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff Annalen), 1850. Bd 81. S. 258-264 (см. также: Note sur les vibrations d'une plaque circulaire. Paris, Comptes Rendus, XXIX, 1849, p. 753-756). Перепечатка: *Kirchhoff G*. Gesammelte Abhandlungen. — Leipzig: J. A. Barth, 1882. — VII+641 S. (см. S. 279-285).

[20] *Kirchhoff G*. Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. — Leipzig: B. G. Teubner, 1876. — IX[1]+466 S.

[21] *Hooke R*. Lectures de potentia restitutiva, or of spring, explaining the power of springing bodies, to which are added some collections. — London, Printed for J. Martyn, 1678. 50 p., illus. 3 plates.

[22] *Young Th.* A course of lectures on natural philosophy and mechanical arts. In 2 vol. London, 1807. Vol. 1, XXIV+736 p.; Vol. 2, XII+738 p. (См. Vol. 2, art. 13, section IX, p. 46-50).

[23] *Thomson W.*, *Tait P. G.* Treatise on natural philosophy. Vol. 1. — Oxford: Clarendon press, 1867, XXIII+727 p. Первое издание этой книги вышло в одном томе. Следующее издание вышло в Кембриджском университете в двух частях: Cambridge [Eng]: University press. Part I, 1879, XVII+508 p.; Part II. 1883, XXV+527 p.

[24] *Cauchy A. L.* Recherches sur l'équilibre et le mouvement interieur des corps solides on fluides, élastiques on nonélastiques. Nouvean Bulletin des Sciences par la Sociéte Philomatique de Paris, 1823, p. 9-13.

[25] *Cauchy A. L.* Exercices de mathématique. 1828, vol. 3, p. 330-348; см. также Oeuvres complétes d'Augustin Cauchy, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des sciences et sous les auspices de m. le Ministre de l'instruction publique. — Paris: Gauthier-Villars, 1882-1958. T. 1-27.

[26] *Chladni E. F. F.* Entdeckungen über die Theorie des Klanges. — Leipzig: Weibmanns Erlen mid Reich, 1787. — 78 S.+XI Tabl.; Die Akustik. — Leipzig: Breitkopf und Härtel, 1802. — XXXII+310 S.+XI Tabl.; Neue Beiträge zur Akustik. — Leipzig: Breitkopf und Härtel, 1817; Die Akustik. Neue, unveränderte Ausgabe. — Leipzig: Breitkopf und Härtel, 1830. — XXVI+ 242 S.+XI Tabl.

[27] *Poisson S. D.* Mémoire sur les surface élastiques. Memoire de la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institute. Paris, 1812, p. 167-226 [1814 г.]. В сокращенном виде эта работа опубликована: Corréspondance sur l'École Polytechnique, à l'usage des Eléves de cette École. Paris. Vol. III., 1814-16, p. 154-159; Nouvean Bulletin des Sciences de la Société Philomatique de Paris. New Series. 1814, p. 47-52.

[28] *Poisson S. D.* Sur l'intégrale de l'équation relative aux vibrations des plaques élastiques. Nouvean Bulletin des Sciences par la Sociéte Philomatique de Paris, 1818, p. 125-128.

[29] *Poisson S. D.* Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. Mémoires de'Académie des Sciences. Paris, 1829, vol. VIII, p. 357-570, 623-627, см. раздел седьмой: Application des formules précéndents à l'équilibre et au mouvement d'une plaque circulaire (p. 545-570). См. также: Annales de Chimie, ou Recueil de Mémoires concernant la Chimie et les Arts qui en dépendent. New Series. Vol. XLII, 1829, p. 145-171.

[30] *Тимошенко С. П.* История науки о сопротивлении материалов. — М.: ГИТТЛ, 1957. — 536 с., см. с. 148.

[31] *Navier L.* Extrait des recherches sur la flexion des plans élastiques. Nouvean Bulletin des Sciences par la Sociéte Philomatique de Paris, 1823, p. 92-102.

[32] *Бубнов И. Г.* Напряжения в обшивке судов от давления воды. — Морской сб. — СПб.: Изд. Морского ученого комитета. Тип. Морского министерства, 1902. Т. 311, № 8. С. 117-143; Т. 312, № 9. С. 111-141; Т. 312, № 10. С. 119-139; Т. 313, № 12. С. 107-131. Отдельное издание Политехнического ин-та. — СПб.: Тип. *А. В. Винеке*, 1904. — 93 с. Перепечатка: *Бубнов И. Г.* Труды по теории пластин. — М.: Гостехтеориздат, 1953. — С. 11-100. См. также: *Boobnoff I.* On the stresses in a ship's botton plating due to water pressure // Trans. Inst. Nav. Archit. 1902. — Vol. 44. — P. 15-40, 51-52.

[33] *Бубнов И. Г.* Строительная механика корабля. Часть II. — СПб.: Тип. Морского министерства, 1914. §§ 23-25. Гибкие пластины. — С. 545-640. Перепечатка: *Бубнов И. Г.* Труды по теории пластин. — М.: Гостехтеориздат, 1953. §§ 23-25. Гибкие пластины. — С. 218-308.

[34] *Timoshenko S .P.* Analysis of bi-metal thermostats // J. Optic. Soc. Amer. and Rev. Sci. Instr. 1925. — Vol. 11, № 3. — P. 233-255. Перевод: *С. П. Тимошенко*. Расчет биме-

таллических термостатов. — В сб.: Устойчивость стержней, пластин и оболочек. — М.: Наука, 1971. — С. 534-552.

[35] *Timoshenko S. P*. Buckling of flat curved bars and slightly curved plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech, 1935. — Vol. 2, № 1. — P. 17-20. Перевод: *С. П. Тимошенко*. Выпучивание пологих стержней и слегка искривленных пластин. — В сб.: Устойчивость стержней, пластин и оболочек. — М.: Наука, 1971. — С. 662-669.

Проблеми побудови теорії тонких пластин (історичний коментар)

Едуард Григолюк, Віктор Мамай

Обговорюються основні етапи побудови теорії згину тонких пластин. Розглядається вклад різних вчених у розв'язання цієї проблеми. Приведені основні бібліографічні джерела щодо цього питання.

Development Problems of Thin Plates Theory (Historical Comment)

Eduard Hryholiuk, Viktor Mamay

Main stages of theory of thin plates flexure are discussed. Impacts to solving of this problem of variety of scientists are presented. Main bibliographical sources that concern this topic are adduced.

Отримано 14.09.05