УДК 330.43

Моделирование макроэкономических систем эконометрико-игровым методом

Александр Назаренко[1], Антон Васильев[2]

[1] к. ф.-м. н., Сумский государственный университет, ул. Римского-Корсакова, 2, Сумы, 40007
[2] Сумский государственный университет, ул. Римского-Корсакова, 2, Сумы, 40007,
e-mail: antonvas@gmail.com

Для моделирования макроэкономических систем предложен обобщенный метод конструирования математических моделей, следуя которому ситуация на рынке сводится к конфликту или кооперации нескольких участников и представляется в виде дифференциальной игры. Динамика развития моделируемой ситуации описывается системой градиентного типа, на основании которой строится и идентифицируется эконометрическая модель макроэкономической системы.

Ключевые слова: дифференциальные игры, идентификация, эконометрика.

Введение. Возрастающее признание важности анализа явлений, протекающих в экономических системах, требует построения соответствующих математических моделей с целью их практического применения. Необходимость разрешения данной проблемы особенно остро ощущается в настоящее время на Украине [1].

Эконометрические методы и модели охватывают широкую область экономических исследований таких, как статистическое регулирование технологических процессов [2, 3], теория и практика экспертных оценок [4, 5], прогнозирование динамики развития экономических систем [6, 7]. Указанные исследования посвящены либо разработке теоретических основ методов прикладной статистики, либо содержат примеры проведения эконометрического моделирования реальных экономических систем. Здесь методы регрессионного и корреляционного анализа позволяют не только проверить адекватность предложенных моделей, но и провести их экономический анализ. Вместе с тем выбор вида конкретной используемой модели недостаточно обоснован, что зачастую ведет к неадекватному представлению реальной экономической системы.

Важным подходом, применяемым для моделирования процесса принятия решений, является теория игр, в частности, динамические или дифференциальные игры, в которых процесс принятия решения в условиях взаимодействия сторон исследуется во времени. Теоретические исследования и приложения теории игр быстро развиваются в широком диапазоне — от управления самолетами и ракетами [8] до методов ведения переговоров, финансового инвестирования и охраны окружающей среды [9]. Работы, использующие аппарат теории игр для моделирования экономических систем, зачастую носят чисто теоретический характер [10, 11].

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2006, вип. 4, 158-168

В них можно найти теоретически обоснованные модели, применение которых на практике сталкивается с рядом трудностей, которые обусловлены особенностями экономической науки.

Таким образом, при моделировании экономических процессов и систем, целесообразным представляется построение таких математических моделей, которые были бы теоретически обоснованы, например, с помощью аппарата дифференциальной теории игр, и могли быть идентифицированы эконометрическими методами.

В работе [12] предложен новый подход к построению динамических моделей, где представление макроэкономического процесса сводится к ситуации конфликта двух игроков-участников, записанной в виде системы дифференциальных уравнений, а участвующие стороны осуществляют выбор стратегии во времени путем изменения управляющих параметров.

В данной работе дается обобщение этого метода на случай многих участников, что повышает адекватность предложенных моделей и позволяет моделировать крупные экономические системы и изучать их внутренние связи. Предлагается пример идентификации реальной макроэкономической системы.

1. Построение модели

Следуя методу, предложенному в работе [12], при моделировании макроэкономической системы, будем рассматривать ее как рынок, на котором взаимодействует между собой некоторое ограниченное количество участников-игроков, каждый из которых управляет одним из сопоставленных ему факторов-ресурсов, представленных на данном рынке. При этом выделяется основной показатель h, на который оказывают влияние остальные элементы системы. Наличие факта влияния и его направленность предполагаются известными на основании экономической теории. В противном случае необходимо проводить корреляционный анализ системы показатель-факторы, после чего можно выделить не только значимо влияющие факторы, но и направленность их воздействия.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — факторы, имеющие положительную направленность на величину h, т. е. с увеличением значения каждого из этих факторов величина h возрастает, а факторы $q_1, q_2, \ldots, q_m$ — имеют отрицательную направленность. Тогда можно построить функцию $G(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_m)$, выражающую взаимное влияние факторов системы на показатель h. В общем случае она может быть любой гладкой производственной функцией. Для определенности будем строить ее в виде производственной функции типа Кобба-Дугласа [13]

$$G = a_0 p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_m^{\beta_m}, \tag{1}$$

что позволяет давать качественное экономическое обоснование полученных результатов. Считаем, что $t = \overline{0, N}$ — моменты времени, в которых известны значения изучаемых величин на рассматриваемом рынке. Тогда неизвестные коэффициенты $a_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ в формуле (1) определяются из условия близости к реальным статистическим данным

$$h \approx G(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_m). \qquad (2)$$

Изучая взаимодействие между описанными выше игроками, будем исходить из принципа максимизации прибыли в экономическом анализе [14], согласно которому при моделировании макроэкономической деятельности можно рассматривать рынок, все участники которого имеют одну цель — максимизировать собственную прибыль. Тогда группа игроков, которая управляет факторами $p_1, p_2, \ldots, p_n$, будет стремиться максимизировать свою прибыль, и, как следствие, увеличивать величину h, в силу их одинаковой направленности. В то же время, вторая группа, управляющая факторами $q_1, q_2, \ldots, q_m$, стремясь максимизировать собственную прибыль, будет уменьшать величину h на протяжении рассматриваемого промежутка времени $t=\overline{0,N}$. Следовательно, функция $G(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_m)$ может быть истолкована, как результат разрешения конфликта между двумя описанными выше группами игроков и рассматриваться, как функция выигрыша в некоторой антагонистической игре.

Рассматривая описанный рынок во времени, каждому фактору необходимо поставить в соответствие функцию, зависящую от времени. В этом случае, следуя [12], динамику изменения изучаемых величин можно описать системой дифференциальных уравнений градиентного типа [15]

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = u_1(t)\dfrac{\partial G(p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_m)}{\partial p_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dp_n}{dt} = u_n(t)\dfrac{\partial G(p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_m)}{\partial p_n}, \\ \dfrac{dq_1}{dt} = -v_1(t)\dfrac{\partial G(p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_m)}{\partial q_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dq_m}{dt} = -v_m(t)\dfrac{\partial G(p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_m)}{\partial q_m} \end{cases} \qquad (3)$$

при начальных условиях $p_i(0) = p_i^*(0),\ q_j(0) = q_j^*(0)$ $(i=\overline{1,n}\,;\ j=\overline{1,m})$.

В общем случае для установления связей между переменными макроэкономической системы может использоваться не только система градиентного типа (3), но и другие дифференциальные системы, траектории которых являются минимизирующими (максимизирующими), например, вытекающие из метода тяжелого шарика [16].

Функции $u_i(t)$ и $v_j(t)$ в (3) характеризуют величину шага градиентного метода и могут рассматриваться как функции управления. С экономической точки зрения их можно трактовать как характеристики скорости инвестиций средств в развитие фактора, которым управляет соответствующий игрок.

2. Идентификация модели

В системе уравнений (3) единственными неизвестными являются функции $u_i(t)$ и $v_j(t)$. Задача их нахождения (задача идентификации модели) теоретически может быть решена несколькими способами [17], но процедуры их численной реализации требуют настолько много вычислений, что проведение полной идентификации модели (3) затруднительно. Поэтому здесь предлагается другой подход к решению данной задачи, который базируется на использовании аппарата эконометрии и позволяет не только провести регрессионный и корреляционный анализ модели, но и оценить качество приближения с помощью коэффициента детерминации R^2 [13].

В данной работе функции управления аппроксимируются многочленами

$$u_i(t) = b_{i0} + b_{i1}t + b_{i2}t^2 + ... + b_{ik_i}t^{k_i}, \quad i = \overline{1, n};$$
$$v_j(t) = c_{j0} + c_{j1}t + c_{j2}t^2 + ... + c_{jl_j}t^{l_j}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{4}$$

а степени многочленов устанавливаются экспериментально на основе критерия, который будет описан ниже. В такой постановке задача идентификации модели заключается в нахождении оценок неизвестных коэффициентов в системе (4). Для ее решения запишем дифференциальные уравнения (3) в разностной форме, заменив неизвестные функции $u_i(t)$ и $v_j(t)$ их аналогом из (4). Получим следующую модель, которую будем использовать в дальнейшем

$$\begin{cases} p_1^{t+1} = p_1^t + b_{10}\dfrac{\partial G}{\partial p_1} + b_{11}t\dfrac{\partial G}{\partial p_1} + b_{12}t^2\dfrac{\partial G}{\partial p_1} + ... + b_{1k_1}t^{k_1}\dfrac{\partial G}{\partial p_1} + u_{k_1}^t, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_n^{t+1} = p_n^t + b_{n0}\dfrac{\partial G}{\partial p_n} + b_{n1}t\dfrac{\partial G}{\partial p_n} + b_{n2}t^2\dfrac{\partial G}{\partial p_n} + ... + b_{1k_n}t^{k_n}\dfrac{\partial G}{\partial p_n} + u_{k_n}^t, \\ q_1^{t+1} = q_1^t - c_{10}\dfrac{\partial G}{\partial q_1} - c_{11}t\dfrac{\partial G}{\partial q_1} - c_{12}t^2\dfrac{\partial G}{\partial q_1} - ... - c_{1l_1}t^{l_1}\dfrac{\partial G}{\partial q_1} + v_{l_1}^t, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_m^{t+1} = q_m^t - c_{m0}\dfrac{\partial G}{\partial q_m} - c_{m1}t\dfrac{\partial G}{\partial q_m} - c_{m2}t^2\dfrac{\partial G}{\partial q_m} - ... - c_{ml_m}t^{l_m}\dfrac{\partial G}{\partial q_m} + v_{l_m}^t, \end{cases} \tag{5}$$

где $t = \overline{0, N-1}$; p_i^t $(i = \overline{1,n})$, q_j^t $(j = \overline{1,m})$ — известные на основании статистических данных значения параметров системы в момент времени t; k_i $(i = \overline{1,n})$, l_j $(j = \overline{1,m})$ — степени полиномов из (4); b_{ij} $(i = \overline{1,n}; j = \overline{0,k_i})$, c_{ij} $(i = \overline{1,m}; j = \overline{0,l_i})$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие оцениванию; $u_{k_i}^t$ $(i = \overline{1,n})$, $v_{l_j}^t$ $(j = \overline{1,m})$ — случайные отклонения переменных модели в момент времени t.

Следует отметить, что в модели (5) выражения, стоящие при неизвестных коэффициентах, можно вычислить. Поэтому, группируя известные переменные модели (5) и рассматривая каждое уравнение данной системы для всех моментов времени $t=\overline{0,N-1}$, можно использовать метод наименьших квадратов для нахождения оценок неизвестных коэффициентов. Для наглядности запишем первое уравнение системы (5) для всех возможных значений времени в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=0} & 0 & \ldots & 0 \\ \left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=1} & \left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=1} & \ldots & \left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=1} \\ \left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=2} & 2\left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=2} & \ldots & 2^{k_1}\left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=N-1} & (N-1)\left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=N-1} & \ldots & (N-1)^{k_1}\left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \\ \ldots \\ b_{1k_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{k_1}^1 \\ u_{k_1}^2 \\ u_{k_1}^3 \\ \ldots \\ u_{k_1}^{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^1 - p^0 \\ p^2 - p^1 \\ p^3 - p^2 \\ \ldots \\ p^N - p^{N-1} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

или сокращенно

$$\mathbf{A}\vec{b}_1 + \vec{u}_{k_1} = \vec{y},$$

тогда оценки неизвестных коэффициентов будут вычисляться согласно формуле [13]

$$\hat{\vec{b}}_1 = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\vec{y}, \qquad (7)$$

где $\mathbf{A}^T$ — матрица, транспонированная по отношению к $\mathbf{A}$.

Для выбора оптимальных степеней полиномов, аппроксимирующих функции управления (4), в работе предлагается использовать эконометрический метод, который применяется для оценивания значимости вклада добавленного члена в уравнение регрессии [18]. Для этого рассмотрим любое, например, первое, уравнение системы (5) как полиномиальную регрессию, в которую с наращиванием степени добавляются новые члены. Для установления того, что вновь добавленная независимая переменная действительно оказывает значимое влияние на регрессант, воспользуемся двусторонним критерием Стьюдента значимости коэффициента b_{1k_1}

$$\left|\frac{\hat{b}_{1k_1}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_{1k_1}}}\right| > t_{кр}, \qquad (8)$$

где $\hat{b}_{1k_1}$ — оценка коэффициента b_{1k_1}, $\hat{\sigma}_{\hat{b}_{1k_1}}$ — его стандартная ошибка, $t_{кр}$ — квантиль распределения Стьюдента, соответствующий числу степеней свободы $N - k_1 - 1$ и уровню значимости α.

Если критерий (8) выполняется для $\widehat{b}_{1k_1}$, но не выполняется для коэффициентов $\widehat{b}_{1(k_1+1)}$ и $\widehat{b}_{1(k_1+2)}$, то, следуя [18], можно заключить, что k_1 является оптимальной степенью полинома, так как добавление следующих членов не дает значимого вклада в соответствующее уравнение регрессии. Как показал численный эксперимент, именно использование оптимальных (в описанном выше смысле) степеней полиномов (4) в модели (5) позволяет давать наиболее точные прогнозные значения исследуемых величин.

Таким образом, после нахождения оценок неизвестных коэффициентов в модели (5) и нахождения оптимальных степеней полиномов (4) будет решена соответствующая задача идентификации. Следует отметить, что с помощью (5) можно не только изучать внутренние связи моделируемой системы, но и находить прогнозные значения изучаемых величин.

3. Практическая реализация

Проиллюстрируем описанный выше подход на примере рассмотрения некоторой макроэкономической системы небольшой размерности. Рассмотрим рынок, состоящий всего из двух обобщенных участников: первый — это производители товаров и услуг, которые выпускают конечный продукт. В качестве характеристики его деятельности возьмем объем основных фондов p_1. Вторым участником выберем домохозяйства, и будем характеризовать его численностью рабочей силы p_2. Тогда, исходя из [14], можно предположить, что в процессе экономической деятельности производители товаров в каждый момент времени выбирали объем производства и цены продаж, стремясь максимизировать валовой внутренний продукт (ВВП) h, и, как следствие, — свою прибыль. Домохозяйства, также максимизируя собственную прибыль, стремились увеличить национальный доход (НД) и, вследствие линейной зависимости величин ВВП и НД, своими действиями увеличивали величину h.

Для построения модели по предложенной методике, описывающей сложившуюся ситуацию на описанном рынке, достаточно иметь статистические данные об объеме основных фондов p_1, количестве рабочих p_2 и ВВП h на протяжении некоторого промежутка времени $t = \overline{0, N}$.

В качестве примера рассмотрим динамику развития Украины в период 1970-1988 гг. (табл. 1). Построение моделей осуществим на данных 1970-1986 гг., а на 1987 г. и 1988 г. будем вычислять прогнозные значения изучаемых величин.

Функция (1) принимает вид

$$G(p_1, p_2) = a_0 p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \tag{9}$$

и ее можно трактовать как эмпирический закон зависимости ВВП от объема основных фондов и количества рабочей силы. Также (9) может быть истолкована, как результат кооперативной деятельности между двумя указанными обобщенными игроками на изучаемом рынке.

Таблица 1

Макроэкономические показатели Украины в период 1970-1988 гг.

t	Год	Основные фонды p_1 (млрд руб.)	Численность рабочих p_2 (млн чел.)	Материальные затраты q_1 (млрд руб.)	ВВП h (млрд руб.)
0	1970	102,11	16,13	70,41	122,44
1	1971	109,25	16,61	75,86	131,01
2	1972	116,40	17,10	79,19	135,95
3	1973	124,57	17,42	86,24	148,15
4	1974	133,76	17,90	91,50	155,49
5	1975	140,91	18,23	96,07	161,62
6	1976	151,12	18,71	99,76	168,96
7	1977	161,33	19,03	105,21	177,53
8	1978	170,52	19,35	109,44	184,88
9	1979	179,71	19,68	111,37	187,33
10	1980	194,00	20,00	114,00	191,00
11	1981	205,23	20,16	116,82	195,97
12	1982	217,48	20,32	120,00	203,24
13	1983	229,74	20,32	124,40	211,81
14	1984	243,01	20,48	127,59	219,16
15	1985	255,00	20,70	135,00	242,00
16	1986	265,20	20,70	139,17	249,26
17	1987	277,95	20,60	142,97	258,94
18	1988	290,70	20,40	148,35	266,20

Неизвестные коэффициенты a_0, α_1 и α_2 в выражении (9) могут быть оценены методом наименьших квадратов. Используя данные табл. 1, находим

$$G(p_1, p_2) = 3{,}220 \cdot p_1^{0{,}578} \cdot p_2^{0{,}357}, \quad R^2 = 0{,}9815. \tag{10}$$

Тогда, следуя (5), приходим к следующей модели

$$\begin{cases} p_1^{t+1} = p_1^t + b_{10}\dfrac{\partial G}{\partial p_1} + b_{11}t\dfrac{\partial G}{\partial p_1} + b_{12}t^2\dfrac{\partial G}{\partial p_1} + \ldots + b_{1k_1}t^{k_1}\dfrac{\partial G}{\partial p_1} + u_{k_1}^t, \\ p_2^{t+1} = p_2^t + b_{20}\dfrac{\partial G}{\partial p_2} + b_{21}t\dfrac{\partial G}{\partial p_2} + b_{22}t^2\dfrac{\partial G}{\partial p_2} + \ldots + b_{1k_2}t^{k_2}\dfrac{\partial G}{\partial p_2} + u_{k_2}^t. \end{cases} \tag{11}$$

Придерживаясь описанной выше процедуры идентификации модели, можно оценить значения неизвестных коэффициентов и выбрать оптимальные степени полиномов в (11). Для неизвестных функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ были получены следующие оптимальные полиномы

$$u_1(t) = 9{,}929 + 0{,}932 \cdot t; \quad u_2(t) = 0{,}172 - 0{,}0108 \cdot t,$$

при которых величины p_1 и p_2 приближаются с высокой точностью (соответствующие им коэффициенты детерминации равны 0,99663 и 0,99715).

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2006, вип. 4, 158-168

Прогнозные значения величин p_1 и p_2 на 1987 год равны 275,25 и 20,70 соответственно (относительные ошибки прогноза составили 0,97% и 0,48%). Так как в результате прогноза были получены точечные оценки, необходимо оценить их доверительные интервалы. Поскольку в (5) значения исследуемых величин в $(N+1)$-ый момент времени зависят только от известных значений этих же величин в предыдущие моменты времени, то в данном случае имеет место безусловное прогнозирование (предсказание), и для оценки доверительного интервала может быть использована следующая формула [13]

$$y_{N+1} = \hat{y}_{N+1} \pm \delta t_\alpha , \ \delta = \sqrt{\hat{\sigma}_u^2 (1 + \vec{a}_{N+1} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \vec{a}_{N+1}^T)} \ .$$

Здесь δ — среднеквадратическая ошибка прогноза, t_α — двусторонний квантиль распределения Стьюдента с $N - l - 1$ степенями свободы (l — степень соответствующего полинома), $\hat{\sigma}_u^2$ — оценка дисперсии остаточного члена, $\vec{a}_{N+1}$ — значение вектора объясняющих переменных в момент времени $N+1$.

В ходе численного эксперимента для прогнозных значений величин p_1 и p_2 на 1987 год при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ получены доверительные интервалы $p_1 = 276{,}54 \pm 3{,}28$ и $p_2 = 20{,}70 \pm 0{,}20$, что свидетельствует о высокой точности прогноза. Точечные оценки прогнозов для p_1 и p_2 на 1988 год равны 285,34 и 20,21 соответственно (относительные ошибки составили 1,88% и 0,95%).

Видно, что предложенная модель дает очень хорошие результаты, как при аппроксимации самой системы, так и при построении прогнозных значений параметров системы. Вместе с тем, как показывают расчеты, в модели (10), (11) фактор p_2 (численность рабочей силы) является незначимым, поэтому эта модель неадекватно описывает сложившуюся ситуацию на рынке в рассматриваемый период времени.

Попытаемся добиться улучшения модели путем введения в нее дополнительного фактора q_1 согласно описанной выше процедуре. Выберем в качестве него некоторого обобщенного игрока, который бы управлял материальными (амортизационными) затратами производителей, и сопоставим ему в качестве управляемого фактора материальные затраты предприятий q_1. Так как с увеличением амортизационных затрат снижается выпуск товаров и услуг, можно заключить, что q_1 имеет отрицательную направленность на изучаемую величину h. Исходные данные для моделирования выберем из табл. 1. Тогда

$$G(p_1, p_2, q_1) = 10{,}164 \cdot p_1^{0,181} \cdot p_2^{-1,385} \cdot q_1^{1,294}, \quad R^2 = 0{,}99834. \tag{12}$$

В (12) все используемые факторы значимы, поэтому можно полагать, что поведение новой модели можно сопоставить с поведением реальной системы. В данной модели p_2 ведет к снижению величины h, а материальные затраты q_1 — к увеличению ВВП. Следовательно, связи, существующие между указанными тремя участниками на данном рынке, будут описываться следующей моделью

$$\begin{cases} p_1^{t+1} = p_1^t + b_{10}\dfrac{\partial G}{\partial p_1} + b_{11}t\dfrac{\partial G}{\partial p_1} + b_{12}t^2\dfrac{\partial G}{\partial p_1} + ... + b_{1k_1}t^{k_1}\dfrac{\partial G}{\partial p_1} + u_{k_1}^t, \\ p_2^{t+1} = p_2^t - b_{20}\dfrac{\partial G}{\partial p_2} - b_{21}t\dfrac{\partial G}{\partial p_2} - b_{22}t^2\dfrac{\partial G}{\partial p_2} - ... - b_{2k_2}t^{k_2}\dfrac{\partial G}{\partial p_2} + u_{k_2}^t, \\ q_1^{t+1} = q_1^t + c_{10}\dfrac{\partial G}{\partial q_1} + c_{11}t\dfrac{\partial G}{\partial q_1} + c_{12}t^2\dfrac{\partial G}{\partial q_1} + ... + c_{1l_1}t^{l_1}\dfrac{\partial G}{\partial q_1} + v_{l_1}^t, \end{cases} \quad (13)$$

Вычисляя неизвестные коэффициенты в (13), получим

$u_1(t) = 35{,}545 - 2{,}293\cdot t + 1{,}0598\cdot t^2 - 0{,}0513\cdot t^3$,

$u_2(t) = 0{,}0444 - 0{,}00277\cdot t$, $\quad v_1(t) = 1{,}950$,

причем величины p_1, p_2, q_1 будут аппроксимироваться с коэффициентами детерминации 99,968%, 99,845% и 98,354% соответственно, а их прогнозные значения на 1987 год будут равны 275,27; 20,71; 143,81 (относительные ошибки прогноза составят 0,97%, – 0,54%, – 0,58%). Доверительные интервалы ($\alpha = 0{,}05$) будут равны $p_1 = 275{,}27 \pm 4{,}72$, $p_2 = 20{,}71 \pm 0{,}20$, $q_1 = 143{,}81 \pm 3{,}32$. Прогнозные значения для величин p_1, p_2, q_1 на 1988 год составят 283,96; 20,66 и 148,38 соответственно (относительные ошибки прогноза равны 2,37%, – 1,27% и – 0,02%).

Проведем сравнение моделей (10), (11) и (12), (13). Проанализируем сначала функции $G(p_1, p_2)$ и $G(p_1, p_2, q_1)$. При добавлении третьего фактора заметно снижение влияния основных фондов на величину ВВП. Так, для (10) эластичность выпуска ВВП по основным фондам равна 0,578, а для (11) уже 0,181. При этом фактор p_2 меняет динамику влияния на величину h.

Теперь рассмотрим функции управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ для моделей (10), (11) и (12), (13). Изобразим их графически на рис. 1.

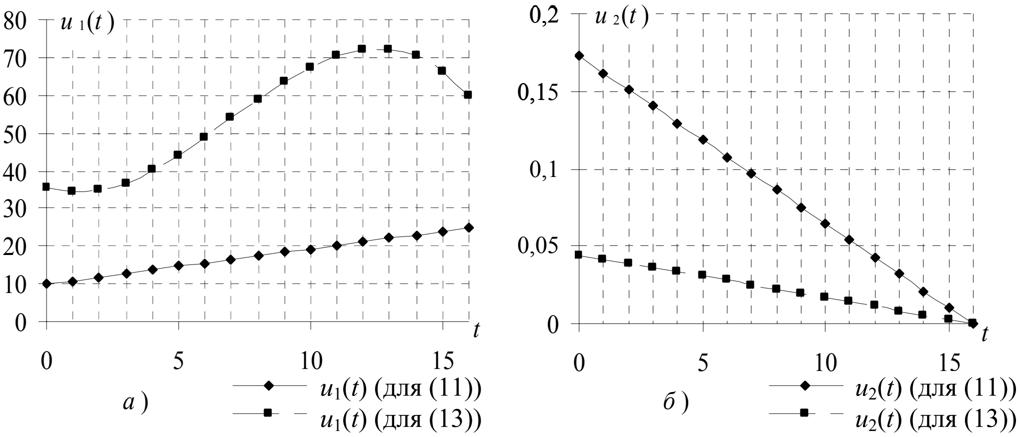

Рис. 1. Функции управления $u_1(t)$ (*а*) и $u_2(t)$ (*б*) для моделей (11) и (13)

Из рис. 1. видно, что характер поведения функции $u_1(t)$ для (11) и (13) практически не изменился. Однако вследствие снижения показателя эластичности ВВП по основным фондам для второй модели, чтобы поддержать сложившуюся динамику изменения величин в ней, необходимо увеличение скорости роста инвестиций в p_1. Так, сравнение этих моделей показывает, что относительное снижение коэффициента эластичности (оно составило 303%), компенсируется увеличением среднего значения скорости инвестиций (319%). В то же время для функции $u_2(t)$ наблюдается снижение количественного значения скорости инвестиций в увеличение численности рабочей силы.

Выводы. В работе дана постановка общей задачи моделирования ситуации, возникающей на рынке, когда он представлен в виде совокупности конкурирующих или кооперирующихся участников. Исходя из дифференциальной теории игр, предложена система дифференциальных уравнений градиентного типа, описывающая данную ситуацию, и на основании которой построена модель макроэкономической системы. Также в работе предложен эконометрический подход к идентификации динамических моделей, который иллюстрируется на моделировании динамики развития Украины за некоторый промежуток времени. Проведенные расчеты показали высокую степень адекватности построенной модели реальным данным и хорошее качество полученных краткосрочных прогнозов. Включение в модель дополнительных факторов может не только приводить к изменению значимости коэффициентов модели, но и существенно влиять на изменение количественных показателей системы, и даже приводить к качественному изменению структуры.

Литература

[1] *Глушков В. М.* Кибернетика. Вычислительная техника. Информатика. В 3-х т. — К.: Наук. думка, 1990. — Т. 1. — 262 с.

[2] *Тырсин А. И.* Робастное построение линейных регрессионных моделей по экспериментальным данным // Заводская лаборатория. — М.: ТЕСТ-ЗЛ, 2005. — № 11. — С. 53-58.

[3] *Орлов А. И.* «Шесть сигм» — новая система внедрения математических методов исследования // Заводская лаборатория. — М.: ТЕСТ-ЗЛ, 2006. — № 5. — С. 50-53.

[4] *Шніпко О. С.* Моделювання ВВП та впливу на нього показників господарської діяльності підприємств окремих галузей промисловості України // Формування ринкових відносин в Україні. — 2006. — № 1. — С. 11-19.

[5] *Осауленко О.* Моделювання динаміки та фактори державного регулювання валового внутрішнього продукту // Економіка України. — 2001. — № 6. — С. 10-15.

[6] *Муха О. В.* Економетричний аналіз і прогнозування інфляції на сучасному етапі в Республіці Білорусь // Статистика України. — 2005. — № 4. — С. 20-27.

[7] *Петрик О. І., Половньов Ю. О.* Аналіз чинників інфляції та її прогнозування в Україні // Економіка і прогнозування. — 2003. — № 1. — С. 86-103.

[8] *Чикрий А. А.* Конфликтно управляемые процессы. — К.: Наук. думка, 1992. — 384с.

[9] *Weidlich W.* Sociodynamics: A Systematic Approach to Mathematical Modelling in the Social Sciences. — Harwood: Academic Publishers, 2000.
[10] *Жуковский В. И., Золотарев В. В.* Существование гибридного равновесия в одной дифференциальной игре // Проблемы управления и информатики. — 2002. — № 1. — С. 32-43.
[11] *Antipin A.* Gradient approach of computing fixed points of equilibrium problems // Journal of Global Optimization. — 2001. — P. 1-25.
[12] *Назаренко А. М.* Об эконометрико-игровом методе построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Механизм регулирования экономики — Сумы: ИТД «Университетская книга», 2006. — № 1. — С. 105-114.
[13] *Назаренко О. М.* Основи економетрики: Підручник. — Вид. 2-ге, перероб. — К.: «Центр навчальної літератури», 2005. — 392 с.
[14] *Макконелл К. Р., Брю С. Л.* Экономикс: принципы, проблемы, политика: Пер. с 13-го англ. изд. — М.: ИНФРА-М, 1999. — XXXIV. — 974 с.
[15] *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач: Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
[16] *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — М., 2003, 632 с.
[17] *Альбрехт Э. Г., Быстрай Г. П.* О динамических моделях эволюции некоторых макроэкономических процессов // Исследование федерализма в России: междисциплинарный подход. — Екатеринбург: Институт философии и права УрО РАН, 1999. — С. 214-232.
[18] Справочник по прикладной статистике. В 2-х т.: Пер. с англ. / Под ред. *Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю. Н. Тьюрина*. — М.: Финансы и статистика, 1989. — 510 с.

Моделювання макроекономічних систем економетрико-ігровим методом

Олександр Назаренко, Антон Васильєв

Для моделювання макроекономічних систем запропоновано узагальнений метод конструювання математичних моделей, за яким ситуація на ринку зводиться до конфлікту чи кооперації декількох учасників і подається у вигляді диференціальної гри. Динаміка розвитку ситуації, що моделюється, описується системою градієнтного типу, на основі якої будується та ідентифікується економетрична модель макроекономічної системи.

Macroeconomic Systems Modeling by the Econometric and Game Method

Alecsandr Nazarenko, Anton Vasil'ev

For the macroeconomic system modeling generalized method of mathematical method construction is proposed. According to it situation on the market is reduced to the conflict or cooperation of a number of participants. The model is represented representing at form of differential game. Evolution dynamics of this system is described by the system of gradient type, on basis of which the econometric model of that system constructed and identified.

Отримано 05.10.06