УДК 624.07

Про напружений стан та стійкість пористої ортотропної пластини в процесі осушення

Богдана Гайвась

к. ф-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005

У роботі досліджується напружено-деформований стан і стійкість пружної ортотропної пористої пластини скінченних розмірів у процесі її осушення. Для опису пористості приймається модель регулярного капілярного середовища з циліндричними порами, які перпендикулярні до серединної поверхні пластини. При вивченні напруженого стану за основу прийнято відому модель неоднорідних за товщиною пластин. Встановлено, що зсувні напруження, які спричинені осушенням, виникають лише у випадку, коли дисторсія є неоднорідною у площинах, які паралельні до серединної поверхні пластини. Показано також, що осушення приводить до пониження критичного значення ейлеревої сили.

Ключові слова: пориста пружна ортотропна пластина, осушення, критична сила.

Вступ. Актуальність проблеми стійкості деформівних систем підтверджується постійною увагою до неї значної кількості дослідників. Основні підходи вивчення стійкості неоднорідних пластин запропоновані в роботах Гузя О. М., Хорошуна Л. П. та ін. Зміна напружено-деформованого стану тіла та втрати його стійкості може спричинятися різними фізико-хімічними процесами (механічною дією, осушенням, фазовими переходами тощо). Неоднорідні деформації приводять до виникнення власних напружень, які накладаються на напруження, зумовлені механічними діями, та можуть викликати нестійкість форми рівноваги.

Побудові моделей осушення пористих тіл присвячені роботи Ликова О. В. [3], Луцика П. П. [4], Соколовського Я. І. [5] та ін. Дослідження процесу сушки зводиться до розв’язування системи диференціальних рівнянь тепломасоперенесення та напружено-деформованого стану твердих тіл. У роботах [5, 6] на основі гомогенізованого підходу побудовано систему рівнянь взаємозв’язаного тепломасоперенесення під час осушення тіла. У роботі [7] визначено напружено-деформований стан пружного ізотропного шару в процесі його осушення. Досліджено вплив зміни пористості на напружений стан пластини.

У даній роботі розглядається вплив сушки на напружено-деформований стан ортотропної пластини з врахуванням зсувних напружень і вплив параметра відносної насиченості вологою на критичне значення ейлеревого навантаження.

1. Масоперенесення у процесі осушення

Розглянемо процес симетричного природного осушення ортотропної пластини товщини $2L_0$. Пористе тіло пластини будемо розглядати в рамках моделі циліндричних капілярів [3]. У початковий момент пластина насичена вологою. Внаслідок осушення з обох зовнішніх сторін пластини утворюються осушені зони, а всередині — рідинна зона. За відносну насиченість κ_m приймемо відношення мас рідини в актуальний і початковий моменти часу. Вважаємо, що насиченість змінюється тільки за товщиною пластини. Процес масоперенесення повітря та пари в шарі, який контактує з пластиною, описуємо рівняннями Стефана-Максвелла в наближенні примежового шару. Всередині шару в осушеній газовій зоні враховано, що тиск газу в порах залежить від координати. На рухомій границі рідина–газ пара є насиченою. На границі розділу пластина–примежовий шар задовольняється умова неперервності потоку пари. У результаті отриманого наближеного розв'язку нелінійної задачі спряження одержано розподіл густини пари $\gamma_v(x_3)$ за товщиною залежно від відносної вологості та визначено зміну вологовмісту в обох зонах. Із зміною відносної вологості змінюються пружні властивості пластини. Для дослідження деформованого стану пластини, спричиненого зміною її відносної вологості, приймемо за основу модель неоднорідної за товщиною пластини [2].

2. Напружений стан ортотропних пластин при їх сушці з врахуванням зсувних напружень

При описі напружено-деформованого стану пористих матеріалів приймаємо, що поведінка гетерогенного пористого середовища описується ефективними параметрами еквівалентного гомогенного ортотропного суцільного середовища.

Якщо матеріали містять пружні неоднорідності (пори, включення, інші фази, розорієнтовані зерна), то під дією сил тиску в околі цих неоднорідностей виникають зсувні напруження, які зумовлені різними параметрами стисливості в неоднорідностях і матриці матеріалу [2].

При дослідженні шаруватих пластин і оболонок є два підходи. Перший підхід полягає у формулюванні гіпотез для кожного шару [1], а другий — для всього пакету шарів [2]. Другий підхід може бути застосовним як за дискретного, так і неперервного характеру зміни властивостей матеріалу за товщиною пластини. Перевагою цього підходу є незалежність порядку рівнянь від кількості шарів, що суттєво спрощує математичне формулювання та розв'язування задачі.

Надалі приймемо, що:

1. Шари пластини, які паралельні до серединної площини, перебувають у плоскому напруженому стані.

2. Сили та моменти, віднесені до серединної площини, можна визначити шляхом інтегрування за товщиною поперечного перерізу сил, що діють на малий елемент товщини dx_3, і моментів цих сил відносно серединної поверхні.

3. Бічні краї пластини $x_1 = const$, $x_2 = const$ масонепроникні (нехтуємо крайовими ефектами випаровування з бічних сторін).

Розглянемо тіло, яке у системі координат x_1, x_2, x_3 має довжину a, ширину b та товщину $2L_0$. Рівняння рівноваги ортотропного тіла мають вигляд

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (i, j = \overline{1,3}) . \tag{1}$$

Тут σ_{ij} — компоненти тензора напружень, F_i — компоненти вектора об'ємних сил.

Рівняння в зусиллях і моментах можна подати так

$$\begin{aligned}
&T_{11,1} + T_{12,2} + [\sigma_{13}(L_0) - \sigma_{13}(-L_0)] + \overline{F}_1^0 = 0 ,\\
&T_{12,1} + T_{22,2} + [\sigma_{23}(L_0) - \sigma_{23}(-L_0)] + \overline{F}_2^0 = 0 ,\\
&N_{1,1} + N_{2,2} + [\sigma_{33}(L_0) - \sigma_{33}(-L_0)] + \overline{F}_3^0 = 0 ,\\
&M_{11,1} + M_{12,2} - N_1 + L_0[\sigma_{13}(L_0) + \sigma_{13}(-L_0)] + \overline{F}_1^1 = 0 ,\\
&M_{12,1} + M_{22,2} - N_2 + L_0[\sigma_{23}(L_0) + \sigma_{23}(-L_0)] + \overline{F}_2^1 = 0 ,
\end{aligned} \tag{2}$$

де $T_{ij} = \int_{-L_0}^{L_0} \sigma_{ij} dx_3 \quad (i, j = 1,2)$ — тангенціальні зусилля, $N_i = \int_{-L_0}^{L_0} \sigma_{i3} dx_3$ — перерізуючі сили, $M_{ij} = \int_{-L_0}^{L_0} \sigma_{ij} x_3 dx_3$ — згинні та крутні моменти, $(i, j = 1,2)$, $\overline{F}_i^{(0)} = \int_{-L_0}^{L_0} F_i dx_3$, $\overline{F}_i^{(1)} = \int_{-L_0}^{L_0} x_3 F_i dx_3$.

Узагальнений закон Гука для ортотропного тіла, який враховує поперечні дотичні напруження, має вигляд

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1}(\sigma_{11} - \nu_{21}\sigma_{22} - \nu_{31}\sigma_{33}) + \overline{\alpha}_1(T - T_0) + \overline{\beta}_1(\widetilde{w} - \widetilde{w}_0) + \overline{\vartheta}_1(P - P_0),\\
&\varepsilon_{22} = \frac{1}{E_2}(\sigma_{22} - \nu_{12}\sigma_{11} - \nu_{32}\sigma_{33}) + \overline{\alpha}_2(T - T_0) + \overline{\beta}_2(\widetilde{w} - \widetilde{w}_0) + \overline{\vartheta}_2(P - P_0),\\
&\varepsilon_{33} = \frac{1}{E_2}(\sigma_{33} - \nu_{13}\sigma_{11} - \nu_{23}\sigma_{22}) + \overline{\alpha}_3(T - T_0) + \overline{\beta}_3(\widetilde{w} - \widetilde{w}_0) + \overline{\vartheta}_3(P - P_0),\\
&\varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu_{12}}\sigma_{12}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2\mu_{13}}\sigma_{13}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2\mu_{23}}\sigma_{23},
\end{aligned} \tag{3}$$

Тут ε_{ij} — компоненти сумарної деформації; E_1, E_2 — модулі пружності матеріалу в напрямку осей Ox_1, Ox_2; ν_{ij} — коефіцієнти поперечного стиску в напрямку Ox_j за розтягу в напрямку Ox_i; $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3$ — коефіцієнти лінійного температурного розширення; $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \overline{\beta}_3$ — коефіцієнти вологісної усадки (набухання) при сушці; $\overline{\vartheta}_1, \overline{\vartheta}_2, \overline{\vartheta}_3$ — коефіцієнти, які дорівнюють відношенню коефіцієнта щільності упаковки до модуля об'ємного стиску; T, T_0 — актуальна та початкова температури; P, P_0 — тиски у порах і атмосферний; $\widetilde{w}, \widetilde{w}_0 = \Pi\gamma_L / [(1 - \Pi)\gamma_s]$ — актуальний і початковий вологовміст пористого середовища, при цьому в рідинній зоні $\widetilde{w} = w_L =$

$= \Pi\gamma_L \kappa_m / \left[(1-\Pi)\gamma_s \right]$, в осушеній — $\tilde{w} = w_v = \Pi\gamma_v(1-\kappa_m)/\left[(1-\Pi)\gamma_s \right]$; κ_m — відносна вологість; $\gamma_s, \gamma_L, \gamma_v$ — питомі густини матеріалів скелета, рідини та пари відповідно; Π — пористість; $E_1\nu_{12} = E_2\nu_{21}$, $E_2\nu_{23} = E_3\nu_{32}$, $E_1\nu_{13} = E_3\nu_{31}$.

Використаємо припущення макрооднорідності відносно координат x_1, x_2 [2]. Це дає змогу застосувати встановлені для макрооднорідного тіла залежності між напруженнями та деформаціями. Вважаємо, що якщо характерний розмір неоднорідності деформації значно більший від характерного розміру неоднорідності структури, то поведінка гетерогенного середовища описується ефективними характеристиками еквівалентного гомогенного анізотропного середовища. Ефективні пружні характеристики вологого пористого тіла є функціями параметрів відносної вологості і визначаються експериментально.

Подамо переміщення u_i у вигляді [2]

$$u_i = v_i + \varphi_i x_3 + u_i^0, \quad (i = 1,2); \; u_3 = \bar{u}_3 + u_3^0, \tag{4}$$

де $\bar{u}_3 = \langle u_3 \rangle$ — середній прогин за товщиною; $\varphi_i = \langle u_{i,3} \rangle$, u_3^0, u_i ($i = 1, 2$) означено, як у роботі [2]. Розв'язавши систему рівнянь (3) відносно напружень для плоского напруженого стану ($\sigma_{33} = 0$), отримаємо

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= E_{11}(x_3\kappa_{11} + e_{11}) + E_{12}(x_3\kappa_{22} + e_{22}) - \alpha_1\theta - \beta_1\eta - \vartheta_1\varsigma, \\
\sigma_{22} &= E_{12}(x_3\kappa_{11} + e_{11}) + E_{22}(x_3\kappa_{22} + e_{22}) - \alpha_2\theta - \beta_2\eta - \vartheta_2\varsigma, \\
\sigma_{12} &= 2\mu_{12}(x_3\kappa_{12} + e_{12}),
\end{aligned} \tag{5}$$

де $\theta = T - T_0$, $\eta = \tilde{w} - \tilde{w}_0$, $\varsigma = P - P_0$, а

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = E_{11}\bar{\alpha}_1 + E_{12}\bar{\alpha}_2, \quad \alpha_2 = E_{12}\bar{\alpha}_1 + E_{22}\bar{\alpha}_2, \\
&\beta_1 = E_{11}\bar{\beta}_1 + E_{12}\bar{\beta}_2, \quad \beta_2 = E_{12}\bar{\beta}_1 + E_{22}\bar{\beta}_2, \\
&\vartheta_1 = E_{11}\bar{\vartheta}_1 + E_{12}\bar{\vartheta}_2 \; \beta_2 = E_{12}\bar{\vartheta}_1 + E_{22}\bar{\vartheta}_2, \\
&E_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad E_{12} = \frac{E_1\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad E_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Проінтегруємо співвідношення (4) за координатою x_3 у межах $[-L_0, L_0]$, а тоді домножимо їх на x_3 і проінтегруємо в тих же границях. Отримаємо

$$\begin{aligned}
T_{11} &= C_{11}e_{11} + C_{12}e_{22} + K_{11}\kappa_{11} + K_{12}\kappa_{22} - T_{1\theta} - T_{1\eta} - T_{1\varsigma}, \\
T_{22} &= C_{12}e_{11} + C_{22}e_{22} + K_{12}\kappa_{11} + K_{22}\kappa_{22} - T_{2\theta} - T_{2\eta} - T_{2\varsigma}, \\
T_{12} &= 2C_{33}e_{12} + 2K_{33}\kappa_{12}, \quad T_{21} = T_{12}, \\
M_{11} &= K_{11}e_{11} + K_{12}e_{22} + D_{11}\kappa_{11} + D_{12}\kappa_{22} - M_{1\theta} - M_{1\eta} - M_{1\varsigma}, \\
M_{22} &= K_{12}e_{11} + K_{22}e_{22} + D_{12}\kappa_{11} + D_{22}\kappa_{22} - M_{2\theta} - M_{2\eta} - M_{2\varsigma}, \\
M_{12} &= 2K_{33}e_{12} + 2D_{33}\kappa_{12}, \quad M_{21} = M_{12},
\end{aligned} \tag{7}$$

де e_{ij} — компоненти деформації серединної поверхні,

$$C_{ij} = \int_{-L_0}^{L_0} E_{ij} dx_3 , \quad K_{ij} = \int_{-L_0}^{L_0} E_{ij} x_3 dx_3 , \quad D_{ij} = \int_{-L_0}^{L_0} E_{ij} x_3{}^2 dx_3 \quad (i, j = 1,2) ,$$

$$C_{33} = \int_{-L_0}^{L_0} \mu_{12} dx_3 , \quad K_{33} = \int_{-L_0}^{L_0} \mu_{12} x_3 dx_3 , \quad D_{33} = \int_{-L_0}^{L_0} \mu_{12} x_3^2 dx ,$$

$$T_{i\theta} = \int_{-L_0}^{L_0} \overline{\alpha}_i \theta \, dx_3 , \quad T_{i\eta} = \int_{-L_0}^{L_0} \overline{\beta}_i \eta \, dx_3 , \quad T_{i\varsigma} = \int_{-L_0}^{L_0} \overline{\vartheta}_i \varsigma \; dx_3 ,$$

$$M_{i\theta} = \int_{-L_0}^{L_0} \overline{\alpha}_i \theta x_3 \, dx_3 , \quad M_{i\eta} = \int_{-L_0}^{L_0} \overline{\beta}_i \eta \, x_3 dx_3 , \quad M_{i\varsigma} = \int_{-L_0}^{L_0} \overline{\vartheta}_i \varsigma \, x_3 \; dx_3 \quad (i = 1,2) .$$

Для симетричної сушки пластини товщини $2L_0$

$$C_{ij} = 2L_0 \left[E_{ij}^v (1 - \kappa_m) + E_{ij}^L \kappa_m \right] , \quad K_{ij} = 0 ,$$

$$D_{ij} = \frac{2}{3} L_0^3 \left[E_{ij}^v \left(1 - \kappa_m^3\right) + E_{ij}^L \kappa_m^3 \right] , \quad D_{ij}^1 = 0 .$$

Якщо характеристики матеріалу такі, що можна знехтувати їх залежністю від x_3, то

$$C_{ij} = 2L_0 E_{ij} , \quad K_{ij} = 0 , \quad D_{ij} = 2L_0{}^3 E_{ij} \big/ 3, \quad D^1{}_{ij} = 0 \;\; (i, j = 1,2) ,$$

$$C_{33} = 2L_0 \mu_{12} , \quad K_{33} = 0 , \quad D_{33} = 2L_0{}^3 \mu_{ij} \big/ 3 . \tag{8}$$

Для несиметричної сушки пластини товщини L_0

$$C_{ij} = L_0 \left[E_{ij}^v \; (1 - \kappa_m) + E_{ij}^L \kappa_m \right] , \quad K_{ij} = \frac{L_0^2}{2} \left[E_{ij}^v \left(1 - \kappa_m^2\right) + E_{ij}^L \kappa_m^2 \right] ,$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} L_0^3 \left[E_{ij}^v \left(1 - \kappa_m^3\right) + E_{ij}^L \kappa_m^3 \right] , \quad C_{33} = L_0 \left[\mu_{12}^v (1 - \kappa_m) + \mu_{12}^L \kappa_m \right] ,$$

$$K_{33} = \frac{L_0^2}{2} \left[\mu_{12}^v \left(1 - \kappa_m^2\right) + \mu_{12}^L \kappa_m^2 \right] , \quad D_{33} = \frac{L_0^3}{3} \left[\mu_{12}^v \left(1 - \kappa_m^3\right) + \mu_{12}^L \kappa_m^3 \right] .$$

Тут E_{ij}^v, μ_{12}^v; E_{ij}^L, μ_{12}^L — модулі пружності в осушеній і вологій зонах відповідно.

Вирази для компонент деформації приймають вигляд

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + x_3 \varphi_{1,1} , \quad \varepsilon_{22} = e_{22} + x_3 \varphi_{2,2} , \quad \varepsilon_{12} = e_{12} + \frac{x_3}{2} \left(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}\right),$$

$$\varepsilon_{33} = -\left[E_{13}\left(e_{11} + x_3 \kappa_{11}\right) + E_{23}\left(e_{22} + x_3 \kappa_{22}\right) - \gamma_1 \theta - \gamma_2 \eta - \gamma_3 \varsigma\right], \tag{9}$$

де $\varphi_{i,j} = \partial \varphi_i \big/ \partial x_j$, а

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1 \nu_{13} + \alpha_2 \nu_{23}}{E_3} + \overline{\alpha}_3 , \quad \gamma_2 = \frac{\beta_1 \nu_{13} + \beta_2 \nu_{23}}{E_3} + \overline{\beta}_3 , \quad \gamma_3 = \frac{\vartheta_1 \nu_{13} + \vartheta_2 \nu_{23}}{E_3} + \overline{\vartheta}_3 .$$

Тоді перерізуючі сили є такими

$$N_1 = 2L_0\mu_{13}\left(\varphi_1 + w_{,1}\right) - \mu_{13}\frac{L_0^3}{3}\left(E_{13}\kappa_{11,1} + E_{23}\kappa_{22,1}\right) + \tau_{1\theta,1} + \tau_{1\eta,1} + \tau_{1\varsigma,1},$$

$$N_2 = 2L_0\mu_{23}\left(\varphi_2 + w_{,2}\right) - \mu_{23}\frac{L_0^3}{3}\left(E_{13}\kappa_{11,2} + E_{23}\kappa_{22,2}\right) + \tau_{2\theta,2} + \tau_{2\eta,2} + \tau_{2\varsigma,2}, \quad (10)$$

а нормальне до серединної площини переміщення $w = \overline{w} + E_{13}\frac{L_0^2}{6}\kappa_{11} + E_{23}\frac{L_0^2}{6}\kappa_{22}$, де

$$\tau_{i\theta} = 2L_0\mu_{i3}\left\langle\left(\gamma_1\theta\right)^{(0)} - \frac{1}{\mu_{i3}}\left(\alpha_i\theta\right)^{(0)0}\right\rangle, \quad \tau_{i\eta} = 2L_0\mu_{i3}\left\langle\left(\gamma_2\eta\right)^{(0)} - \frac{1}{\mu_{i3}}\left(\beta_i\eta\right)^{(0)0}\right\rangle,$$

$$\tau_{i\varsigma} = 2L_0\mu_{i3}\left\langle\left(\gamma_3\varsigma\right)^{(0)} - \frac{1}{\mu_{i3}}\left(\vartheta_i\varsigma\right)^{(0)0}\right\rangle \ (i = 1,\,2), \quad (11)$$

$$E_{13} = \frac{E_1\left(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}\right)}{E_3\left(1 - \nu_{12}\nu_{21}\right)}, \ E_{23} = \frac{E_2\left(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}\right)}{E_3\left(1 - \nu_{12}\nu_{21}\right)}, \ \kappa_{ij} = \frac{1}{2}\left(\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i}\right),$$

$\langle \bullet \rangle$ означає операцію усереднення відповідної величини. При цьому

$$\left(\gamma_i\theta\right)^{(k)} = \int_0^{x_3}\left(\gamma_i\theta\right)x_3^k\,dx_3, \quad \left(\gamma_i\theta\right)^{(k)0} = \left(\gamma_i\theta\right)^{(k)} - \left\langle\left(\gamma_i\theta\right)^{(k)}\right\rangle,$$

$$\left\langle\left(\gamma_i\theta\right)^{(k)}\right\rangle = \frac{1}{2L_0}\int_{-L_0}^{L_0}\left(\gamma_i\theta\right)^{(k)}dx_3. \quad (12)$$

Для ізотермічної сушки $\theta = 0$, $\eta = \eta(\kappa_m)$. Вклад складових, пов'язаних зі зміною тиску в порах, є малий порівняно із вкладом складових, зумовлених зміною вологовмісту, тому ними можна знехтувати.

Для зсувних напружень і деформацій отримаємо такі співвідношення

$$\sigma_{13} = \frac{N_1}{2L_0} - \left[\frac{E_{11}}{2}\left(x_3^2 - \frac{L_0^2}{3}\right)\kappa_{11} + \frac{E_{12}}{2}\left(x_3^2 - \frac{L_0^2}{3}\right)\kappa_{22} + \right.$$

$$\left. + E_{11}x_3e_{11} - E_{12}x_3e_{22} - \alpha_1\theta x_3 - \beta_1\eta x_3 - \vartheta_1\varsigma x_3\right]_{,1} - 2\mu_{12}\left[\frac{x_3^2}{2}\left(1 - \frac{x_3}{6L_0}\right)\kappa_{12} + x_3e_{12}\right]_{,2},$$

$$\sigma_{23} = \frac{N_2}{2L_0} - \left[\frac{E_{12}}{2}\left(x_3^2 - \frac{L_0^2}{3}\right)\kappa_{11} + \frac{E_{22}}{2}\left(x_3^2 - \frac{L_0^2}{3}\right)\kappa_{22} + E_{12}x_3e_{11} - \right.$$

$$\left. - E_{22}x_3e_{22} - \alpha_2\theta x_3 - \beta_2\eta x_3 - \vartheta_2\varsigma x_3\right]_{,2} - 2\mu_{12}\left[\frac{x_3^2}{2}\left(1 - \frac{x_3}{6L_0}\right)\kappa_{12} + x_3e_{12}\right]_{,1},$$

$$2\varepsilon_{13} = \frac{1}{\mu_{13}}\sigma_{13} + \left[\frac{E_{13}}{2}\kappa_{11}x_3^2 + \frac{E_{23}}{2}\kappa_{22}x_3^2 + E_{13}e_{11}x_3 + E_{23}e_{22}x_3 - \gamma_1\theta x_3 - \gamma_2\eta x_3\right]_{,1},$$

$$2\varepsilon_{23} = \frac{1}{\mu_{23}}\sigma_{23} + \left[\frac{E_{13}}{2}\kappa_{11}x_3^2 + \frac{E_{23}}{2}\kappa_{22}x_3^2 + E_{13}e_{11}x_3 + E_{23}e_{22}x_3 - \gamma_1\theta x_3 - \gamma_2\eta x_3\right]_{,2}.$$

Отже, якщо дисторсія матеріалу (температурне розширення, температура, вологісна усадка, зміна вологовмісту, зміна тиску в порах) не залежить від координат x_1, x_2, то зсувних напружень, викликаних осушенням, у математичній моделі можна не враховувати.

3. Стійкість плоскої форми рівноваги шарнірно опертої пористої ортотропної пластини в процесі симетричної сушки

Пластина втрачає стійкість або випучується, якщо вона навантажена в своїй площині стискуючими зусиллями. У процесі сушки виникає нерівномірний розподіл напружень за товщиною залежно від зміни відносної насиченості вологою пористої пластини. Втрата стійкості може виникати внаслідок дії стискуючих напружень за відсутності в'язей і зовнішніх зусиль. Критичні значення параметрів системи визначаються з умови термодинамічної рівноваги.

Задача вологісної стійкості плоскої форми рівноваги пластини з ортотропного пористого матеріалу полягає в наступному. Нехай до серединної площини пластини, вологовміст якої нерівномірно розподілений за товщиною, прикладені зовнішні зусилля. Пластина може втратити стійкість у зонах дії стискуючих напружень, спричинених нерівномірним розподілом вологовмісту, зовнішніми зусиллями тощо. Ці зусилля викликають стиск, згин або зсув і призводять до випучування. У задачі стійкості необхідно визначити такі найменші значення параметрів (критичні), за яких відбувається розгалуження форм рівноваги, тобто можливе існування декількох форм. Критичні значення сил і відносної вологості можна отримати, припустивши, що пластина має деяку початкову кривизну, перебуває під дією поперечного навантаження або нерівномірного розподілу вологовмісту. Потрібно визначити величину цих сил або відносну вологість, які необхідні для того, щоб втримати пластину в такому стані. Серединну площину ненавантаженої пластини сумістимо з площиною x_1, x_2 прямокутної системи координат.

Модулі пружності та коефіцієнти усадки є ефективними характеристиками, які можуть залежати від вологовмісту або відносної вологості матеріалу. Вони визначаються експериментально (наприклад, ультразвуковим методом).

Диференціальні рівняння стійкості розглядуваної пористої ортотропної пластини із врахуванням поперечних зсувів у процесі сушки мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\left(1 - E_{j3}e_{jj}^0\right)N_{j,j} + \left(T_{jn}^0\overline{w}_{,n}\right)_{,j} = 0,\\
&M_{ij,j} - N_i + \left(M_{jn}v_{i,n}^0 - \frac{L_0^2}{3}T_{jn}^0\varphi_{i,n}\right) - v_{i,j}^0 N_j = 0 \qquad \left(n,\, i,\; j = 1,2\right).
\end{aligned} \tag{13}$$

Тут N_j, M_{ij}, T_{jn} — перерізуючі сили, моменти та тангенціальні зусилля відповідно. Нуликами відзначено компоненти відповідних величин у докритичному стані. Нехай до втрати стійкості пластина перебуває в безмоментному стані. Пластина стискається вздовж осей x_1, x_2 розподіленим навантаженням інтенсивності P_1, P_2 відповідно.

Початковий напружений стан визначимо за геометрично нелінійною теорією. За врахування поперечних зсувів переміщення в пластині подамо у вигляді (4), де

$$u_i^0 = \frac{1}{6} x_3 \left[x_3^2 - (2L_0)^2 \right] \left[\left(E_{13} - \frac{E_{i1}}{\mu_{i3}} \right) \kappa_{11,i} + \left(E_{23} - \frac{E_{i2}}{\mu_{i3}} \right) \kappa_{22,i} - \frac{2\mu_{i2}}{\mu_{i3}} \kappa_{12,3-i} \right] +$$
$$+ \frac{1}{2} x_3^2 \left\{ \left[\left(E_{13} - \frac{E_{i1}}{\mu_{i3}} \right) e_{11,i} + \left(E_{23} - \frac{E_{i2}}{\mu_{i3}} \right) e_{22,i} - \frac{2\mu_{i2}}{\mu_{i3}} e_{12,3-i} \right] \right\} \quad i = \overline{1,3}. \qquad (14)$$

Складові u_i^0, u_3^0 характеризують малі відхилення тангенціальних переміщень від лінійного закону зміни за товщиною. У разі дії стискуючих зусиль P_1, P_2

$$T_{jj}^0 = -P_j 2L_0 . \qquad (15)$$

Вирази для моментів і перерізуючих сил за ізотермічної симетричної сушки мають вигляд

$$M_{11} = D_{11}\varphi_{1,1} + D_{12}\varphi_{2,2}, \quad M_{22} = D_{12}\varphi_{1,1} + D_{22}\varphi_{2,2}, \quad M_{12} = D_{33}\left(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}\right),$$
$$N_1 = K_1\left(\varphi_1 + \overline{w}_{,1}\right) - B_{11}\varphi_{1,11} - B_{12}\varphi_{2,12},$$
$$N_2 = K_2\left(\varphi_2 + \overline{w}_{,2}\right) - B_{21}\varphi_{1,12} - B_{22}\varphi_{2,22}. \qquad (16)$$

Тут

$$K_i = 2L_0\mu_{i3}, \quad B_{ij} = K_i B_j, \quad B_1 = \frac{E_1 L_0^2 (\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})}{6E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad B_2 = \frac{E_2 L_0^2 (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})}{6E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21})}.$$

За плоского напруженого стану маємо

$$T_{11} = E_{11} 2L_0 (e_{11} + \nu_{21} e_{22}) - E_{11} \left(\frac{\overline{\beta}_1 + \nu_{21}\overline{\beta}_2}{\overline{\beta}_3} \right) \int_{-L_0}^{L_0} Q\, d\, x_3 = -2L_0 P_1, \quad T_{12} = T_{21} = 0,$$

$$T_{22} = E_{11} 2L_0 (e_{22} + \nu_{12} e_{11}) - E_{22} \left(\frac{\overline{\beta}_2 + \nu_{12}\overline{\beta}_1}{\overline{\beta}_3} \right) \int_{-L_0}^{L_0} Q\, d\, x_3 = -2L_0 P_2, \qquad (17)$$

де $Q = \overline{\beta}_3 (\widetilde{w} - \widetilde{w}_0)$ — дисторсія, пов'язана зі зміною вологовмісту в процесі сушки (визначається з розв'язку задачі вологоперенесення), $\overline{\beta}_3$ — усадка матеріалу в напрямку x_3. Приймемо, що випаровування з країв $x_1 = const, x_2 = const$ настільки мале, що ним можна знехтувати. Тоді

$$\beta_w = \beta_L, \quad Q(x_3, t) = Q_L(x_3, t), \quad \eta(x_3, t) = \eta_L(x_3, t) \text{ для } (0 < \kappa < \kappa_m), \qquad (18)$$

$$\beta_w = \beta_v, \quad Q(x_3, t) = Q_v(x_3, t), \quad \eta(x_3, t) = \eta_v(x_3, t) \text{ для } (\kappa_m < \kappa < 1), \qquad (19)$$

де

$$Q_v(\kappa, \kappa_m) = \beta_v (w_v - w_0) = \beta_v \left[\frac{\gamma_v(\kappa)\Pi}{\gamma_s(1 - \Pi)} (1 - \kappa_m) - \frac{\gamma_L \Pi}{\gamma_s (1 - \Pi)} \right],$$

$$Q_L(\kappa_m) = \beta_L(w_L - w_0) = \beta_L\left[\frac{\gamma_L \Pi \kappa_m}{\gamma_s(1-\Pi)} - \frac{\gamma_L \Pi}{\gamma_s(1-\Pi)}\right],$$

β_L, β_v — коефіцієнти набухання й усадки тіла.

Враховуючи результати роботи [3], у випадку симетричного осушення у формулах (17)

$$\frac{1}{2L_0}\int_{-L_0}^{L_0} Q d\,x_3 = C_5(\kappa_m), \quad C_5(\kappa_m) = Q_L \kappa_m + Q_{v1}(1-\kappa_m) + Q_{v2}\frac{2G_1}{a_3},$$

$$Q_{v1} = \beta_v\left(C_1^{11} a_1 + C_2^1\right), \quad Q_{v2} = \beta_v\left(C_1^{11}\right); \quad G_1 = \frac{(a_4 + a_3)^{3/2} - (a_4 + a_3\kappa_m)^{3/2}}{3},$$

$$a_1 = -\frac{1+a'}{b'}, \quad a_2 = (1-a_1)^2, \quad a_3 = 2a_1\Gamma_0\lambda, \quad a_4 = a_2 - a_3\kappa_m,$$

$$a' = \frac{DM_a}{\left(K/\mu_g\right)\gamma_{a1}RT}, \quad b' = \frac{\gamma_n M_a}{\gamma_{a1}M_v}, \quad \Gamma_0 = C_0\frac{L_0}{\delta}\frac{D_1}{D}, \quad C_0 = 1 + b'\eta_0,$$

$$C_1^1 = \frac{\gamma_n \Pi}{\gamma_s(1-\Pi)}, \quad C_2^1 = -\frac{\gamma_L \Pi}{\gamma_s(1-\Pi)}, \quad C_1^{11}(\kappa_m(t)) = C_1^1(1-\kappa_m),$$

де κ_m — відносна вологість матеріалу в актуальний момент. Сталі a_i визначаються через коефіцієнти дифузії у примежовому шарі та пластині, коефіцієнти проникливості K, товщину пластини $2L_0$ і дифузного шару δ, відносну вологість навколишнього повітря η_0 та інші параметри, якими описується масоперенесення у пластині в процесі осушення [7]. Із системи рівнянь (17) визначимо компоненти деформації e_{11}^0, e_{22}^0, спричиненої осушенням у докритичному стані

$$e_{11}^0 = \frac{\tilde{f}_1 - \nu_{21}\tilde{f}_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad e_{22}^0 = \frac{\tilde{f}_2 - \nu_{12}\tilde{f}_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad e_{12} = 0.$$

Тут

$$\tilde{f}_1 = \frac{1}{2L_0E_{11}}\left(-2L_0P_1 + \frac{\beta_1}{\overline{\beta}_3}C_5\right), \quad \tilde{f}_2 = \frac{1}{2L_0E_{22}}\left(-2L_0P_2 + \frac{\beta_2}{\overline{\beta}_3}C_5\right).$$

Нехай $P_1 = \alpha_1 P$, $P_2 = \alpha_2 P$. Тоді

$$e_{11}^0 = P\delta_1 + g_1, \quad e_{22}^0 = P\delta_2 + g_2, \tag{20}$$

де

$$\delta_1 = -\frac{E_{22}\alpha_1 - \alpha_2\nu_{21}E_{11}}{E_{11}E_{22}}, \quad \delta_2 = -\frac{E_{11}\alpha_2 - \alpha_1\nu_{21}E_{22}}{E_{11}E_{22}},$$

$$g_1 = -\frac{E_{22}\beta_1 - \beta_2\nu_{21}E_{11}}{E_{11}E_{22}}\frac{C_5}{\overline{\beta}_3}, \quad g_2 = -\frac{E_{11}\beta_2 - \beta_1\nu_{12}E_{22}}{E_{11}E_{22}}\frac{C_5}{\overline{\beta}_3},$$

$$\beta_1 = E_{11}\overline{\beta}_1 + E_{12}\overline{\beta}_2, \quad \beta_2 = E_{12}\overline{\beta}_1 + E_{22}\overline{\beta}_2.$$

Підставивши співвідношення (20) у рівняння стійкості (13), приходимо до такої системи рівнянь

$$\left(D_{11}\varphi_{1,11} + D_{12}\varphi_{2,21}\right)\left(1 + e_{11}^0\right) + D_{33}\left(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}\right)_{,2} -$$
$$-\left[K_1\left(\varphi_1 + \overline{w}_{,1}\right) - B_{11}\varphi_{1,11} - B_{12}\varphi_{2,12}\right]\left(1 + e_{11}^0\right) - \frac{2L_0^2 P_1}{3}\varphi_{1,11} = 0,$$
$$\left(D_{12}\varphi_{1,12} + D_{22}\varphi_{2,22}\right)\left(1 + e_{22}^0\right) + D_{33}\left(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}\right)_{,1} -$$
$$-\left[K_2\left(\varphi_2 + \overline{w}_{,2}\right) - B_{21}\varphi_{1,12} - B_{22}\varphi_{2,22}\right]\left(1 + e_{22}^0\right) - \frac{2L_0^2 P_2}{3}\varphi_{2,22} = 0,$$
$$\left(1 - E_{13}e_{11}^0\right)\left[K_1\left(\varphi_1 + \overline{w}_{,1}\right)_{,1} - B_{11}\varphi_{1,111} - B_{12}\varphi_{2,121}\right] +$$
$$\left(1 - E_{13}e_{22}^0\right)\left[K_2\left(\varphi_2 + \overline{w}_{,2}\right)_{,2} - B_{21}\varphi_{1,122} - B_{22}\varphi_{2,222}\right] -$$
$$-2L_0 P_1\left(\overline{w}_{,11} - \frac{L_0^2}{6}E_{13}\varphi_{1,111}\right) - 2L_0 P_2\left(\overline{w}_{,22} - \frac{L_0^2}{6}E_{23}\varphi_{2,222}\right) = 0. \quad (21)$$

Задачу стійкості розв'яжемо за умови шарнірного закріплення країв пластини

$$\overline{w} = 0,\ M_{11} = 0,\ \varphi_2 = 0 \quad \text{при } x_1 = 0,\ x_1 = a,$$
$$\overline{w} = 0,\ M_{22} = 0,\ \varphi_1 = 0 \quad \text{при } x_2 = 0,\ x_2 = b. \quad (22)$$

Ці умови задовольняються, якщо для середнього прогину та кутів повороту прийняти таке подання

$$\overline{w} = f_3 \cos\overline{\lambda}x_1 \sin\overline{n}x_2, \quad \varphi_1 = f_1 \cos\overline{\lambda}x_1 \sin\overline{n}x_2, \quad \varphi_2 = f_2 \cos\overline{\lambda}x_1 \sin\overline{n}x_2,$$

де $\overline{\lambda} = m\pi/a$, $\overline{n} = n_0\pi/b$ — параметри хвилеутворення. Отримаємо рівняння

$$f_1\left(f_{11}^0 + f_{11}^1 P\right) + f_2\left(f_{12}^0 + f_{12}^1 P\right) + f_3\left(f_{13}^0 + f_{13}^1 P\right) = 0,$$
$$f_1\left(f_{21}^0 + f_{21}^1 P\right) + f_2\left(f_{22}^0 + f_{22}^1 P\right) + f_3\left(f_{23}^0 + f_{23}^1 P\right) = 0,$$
$$f_1\left(f_{31}^0 + f_{31}^1 P\right) + f_2\left(f_{32}^0 + f_{32}^1 P\right) + f_3\left(f_{33}^0 + f_{33}^1 P\right) = 0. \quad (23)$$

З умови нетривіальності розв'язку дістаємо таке характеристичне рівняння

$$A_3 P^3 + A_2 P^2 + A_1 P + A_0 P = 0, \quad (24)$$

де

$$A_0 = f_{11}^0 f_{22}^0 f_{33}^0 + f_{12}^0 f_{23}^0 f_{31}^0 + f_{21}^0 f_{32}^0 f_{13}^0 - f_{31}^0 f_{22}^0 f_{13}^0 - f_{11}^0 f_{23}^0 f_{32}^0 - f_{12}^0 f_{21}^0 f_{33}^0,$$
$$A_1 = \left[\left(f_{11}^0 f_{22}^1 + f_{11}^1 f_{22}^0\right) f_{33}^0 + f_{11}^0 f_{22}^0 f_{33}^1\right] + \left[\left(f_{12}^0 f_{23}^1 + f_{12}^1 f_{23}^0\right) f_{31}^0 + f_{12}^0 f_{23}^0 f_{31}^1\right] +$$
$$+\left[\left(f_{32}^0 f_{21}^1 + f_{32}^1 f_{21}^0\right) f_{13}^0 + f_{32}^0 f_{21}^0 f_{13}^1\right] - \left[\left(f_{31}^0 f_{22}^1 + f_{31}^1 f_{22}^0\right) f_{13}^0 + f_{31}^0 f_{22}^0 f_{13}^1\right] -$$
$$-\left[\left(f_{11}^0 f_{23}^1 + f_{11}^1 f_{23}^0\right) f_{32}^0 + f_{11}^0 f_{23}^0 f_{32}^1\right] - \left[\left(f_{12}^0 f_{21}^1 + f_{12}^1 f_{21}^0\right) f_{33}^0 + f_{12}^0 f_{21}^0 f_{33}^1\right],$$

$$A_2 = \left[\left(f_{11}^0 f_{22}^1 + f_{11}^1 f_{22}^0\right) f_{33}^1 + f_{11}^1 f_{22}^1 f_{33}^0\right] + \left[\left(f_{12}^0 f_{23}^1 + f_{12}^1 f_{23}^0\right) f_{31}^1 + f_{12}^1 f_{23}^1 f_{31}^0\right] +$$
$$+ \left[\left(f_{32}^0 f_{21}^1 + f_{32}^1 f_{21}^0\right) f_{13}^1 + f_{32}^1 f_{21}^1 f_{13}^0\right] - \left[\left(f_{31}^0 f_{22}^1 + f_{31}^1 f_{22}^0\right) f_{13}^1 + f_{31}^1 f_{22}^1 f_{13}^0\right] -$$
$$- \left[\left(f_{11}^0 f_{23}^1 + f_{11}^1 f_{23}^0\right) f_{32}^1 + f_{11}^1 f_{23}^1 f_{32}^0\right] - \left[\left(f_{12}^0 f_{21}^1 + f_{12}^1 f_{21}^0\right) f_{33}^1 + f_{12}^1 f_{21}^1 f_{33}^0\right],$$
$$A_3 = f_{11}^1 f_{22}^1 f_{33}^1 + f_{12}^1 f_{23}^1 f_{31}^1 + f_{21}^1 f_{32}^1 f_{13}^1 - f_{31}^1 f_{22}^1 f_{13}^1 - f_{11}^1 f_{23}^1 f_{32}^1 - f_{12}^1 f_{21}^1 f_{33}^1,$$
$$f_{11}^0 = f_{11\lambda^2}^0 \lambda^2 + f_{11n^2}^0 n^2 + f_{110}^0, \quad f_{11}^1 = f_{11\lambda^2}^1 \lambda^2 + f_{110}^1, \quad f_{12}^j = f_{12n\lambda}^j n\lambda,$$
$$f_{13}^j = f_{13\lambda}^j \lambda, \quad f_{21}^j = f_{21\lambda n}^j \lambda n, \quad f_{23}^j = f_{23n}^j n, \quad f_{31}^j = f_{31\lambda}^j \lambda + f_{31\lambda^3}^j \lambda^3 + f_{31\lambda n^2}^j \lambda n^2,$$
$$f_{32}^j = f_{31n}^j n + f_{32n^3}^j n^3 + f_{32\lambda^2 n}^j \lambda^2 n, \quad f_{33}^j = f_{33\lambda^2}^j \lambda^2 + f_{33n^2}^j n^2, \quad j = 0, 1$$
$$f_{22}^0 = f_{22n^2}^0 n^2 + f_{22\lambda^2}^0 \lambda^2 + f_{220}^0, \quad f_{22}^1 = f_{11n^2}^1 n^2 + f_{220}^1,$$
$$f_{11\lambda^2}^0 = \left(\frac{1}{3}E_{11} + \mu_{13}\frac{E_{13}}{6}\right)(1 + g_1), \quad f_{21\lambda n}^0 = \left(\frac{1}{3}E_{12} + \mu_{23}\frac{E_{13}}{6}\right)(1 + g_2) + \frac{1}{3}\mu_{12},$$
$$f_{11n^2}^0 = \frac{1}{3}\mu_{12}, \quad f_{21\lambda n}^1 = \left(\frac{1}{3}E_{12} + \mu_{23}\frac{E_{13}}{6}\right)\delta_2, \quad f_{110}^0 = \mu_{13}(1 + g_1),$$
$$f_{22n^2}^0 = \left(\frac{1}{3}E_{22} + \mu_{23}\frac{E_{23}}{6}\right)(1 + g_2), \quad f_{11\lambda^2}^1 = \left(\frac{1}{3}E_{11} + \mu_{13}\frac{E_{13}}{6}\right)\delta_1 - \frac{1}{3}\alpha_1,$$
$$f_{22\lambda^2}^0 = \frac{1}{3}\mu_{12}, \quad f_{110}^1 = \mu_{13}\delta_1, \quad f_{220}^0 = \mu_{23}(1 + g_2),$$
$$f_{12n\lambda}^0 = \left(\frac{1}{3}E_{12} + \mu_{13}\frac{E_{23}}{6}\right)(1 + g_1) + \frac{1}{3}\mu_{12}, \quad f_{31\lambda}^0 = \mu_{13}(1 - E_{13}g_1),$$
$$f_{22n^2}^1 = \left(\frac{1}{3}E_{22} + \mu_{23}\frac{E_{23}}{6}\right)\delta_2 - \frac{1}{3}\alpha_2, \quad f_{32\lambda^2 n}^0 = \mu_{13}\frac{E_{23}}{6}(1 - E_{13}g_1),$$
$$f_{12n\lambda}^1 = \left(\frac{1}{3}E_{12} + \mu_{13}\frac{E_{23}}{6}\right), \quad f_{220}^1 = \mu_{23}\delta_2, \quad f_{32n}^1 = -\mu_{23}E_{23}\delta_2,$$
$$f_{13\lambda}^0 = \mu_{13}(1 + g_1), \quad f_{13\lambda}^1 = \mu_{13}\delta_1, \quad f_{23n}^0 = \mu_{23}(1 + g_2), \quad f_{23n}^1 = \mu_{23}\delta_2$$
$$f_{31\lambda^3}^0 = \mu_{13}\frac{E_{13}}{6}(1 - E_{13}g_1), \quad f_{31\lambda n^2}^0 = \mu_{23}\frac{E_{13}}{6}(1 - E_{23}g_2), \quad f_{31\lambda}^1 = -\mu_{13}E_{13}\delta_1,$$
$$f_{32n^3}^1 = -\frac{1}{6}\mu_{23}E_{23}{}^2\delta_2, \quad f_{32\lambda^2 n}^1 = -\frac{1}{6}\mu_{13}E_{23}E_{13}\delta_1, \quad f_{31\lambda^3}^1 = -\frac{1}{6}\mu_{13}E_{13}{}^2\delta_1,$$
$$f_{33\lambda^2}^0 = \mu_{13}(1 - E_{13}g_1), \quad f_{31\lambda n^2}^1 = -\frac{1}{6}\mu_{23}E_{13}E_{23}\delta_2, \quad f_{33n^2}^0 = \mu_{23}(1 - E_{23}g_2),$$
$$f_{3\lambda n}^0 = \mu_{23}(1 - E_{23}g_2), \quad f_{33\lambda^2}^1 = -\alpha_1 - \mu_{13}E_{13}\delta_1,$$
$$f_{33n^3}^0 = \frac{1}{6}\mu_{23}E_{23}(1 - E_{23}g_2), \quad f_{33n^2}^1 = -\alpha_2 - \mu_{23}E_{23}\delta_2.$$

Корені цього рівняння визначають величину критичного навантаження, яке залежить від фізико-механічних характеристик матеріалу, геометричних розмірів тіла тощо. Оцінимо вплив процесу сушки на критичне значення навантаження Приймемо, що товщина пластини є малою порівняно з її довжиною та шириною. Подамо критичну силу у вигляді ряду за параметрами $\lambda = h\pi/a$, $n = h\pi/b$, $h = 2L_0$. Коефіцієнти біля степенів P у рівнянні (24) є сумами виразів за парними степенями λ, n, тобто λ^2, n^2, $\lambda^2 n^2$, λ^4, n^4. Тому для P запишемо

$$P = P_0 + P_1\lambda^2 + P_2 n^2 + P_3\lambda^2 n^2 + \ldots \,. \tag{25}$$

Прирівнюючи члени при однакових степенях λ, n, отримаємо системи рівнянь для визначення P_i. У зв'язку з громіздкістю приведемо лише деякі з них

$$P_0 = 0; \quad P_1 = -\frac{A^0_{\lambda^4}}{A^1_{\lambda^2}}, \quad P_2 = -\frac{A^0_{n^4}}{A^1_{n^2}}, \ldots \tag{26}$$

де

$$A^1_{n^2} = -\mu_{23}\mu_{13}(1+g_1)\left[(1+g_2)\alpha_2 + \mu_{23}\delta_2(1-E_{23}g_2)\right],$$
$$A^1_{\lambda^2} = -\mu_{23}\mu_{13}(1+g_2)\left[(1+g_1)\alpha_1 + \mu_{13}\delta_1(1-E_{13}g_1)\right],$$
$$A^0_{n^4} = \frac{E_{22}}{3}\mu_{23}\mu_{13}(1+g_1)(1+g_2)(1-E_{23}g_2),$$
$$A^0_{\lambda^4} = \frac{E_{11}}{3}\mu_{23}\mu_{13}(1+g_1)(1+g_2)(1-E_{13}g_1). \tag{27}$$

Таким чином, враховуючи співвідношення (25), (26), маємо

$$P = \frac{\lambda^2 E_{11}(1-E_{13}g_1)(1+g_1)}{3\left[(1+g_1)\alpha_1 + (1-E_{13}g_1)\mu_{13}\delta_1\right]} + \frac{n^2 E_{22}(1-E_{23}g_2)(1+g_2)}{3\left[(1+g_2)\alpha_{21} + (1-E_{23}g_2)\mu_{23}\delta_2\right]} + \ldots \tag{28}$$

Так як δ_1, δ_2 є величинами порядку $1/E_{11}, 1/E_{22}$, то другою складовою у знаменнику можна знехтувати. Для безмежної пластини ($\alpha_1 = 1,\ a = \infty$ або $\alpha_2 = 1,\ b = \infty$) приходимо до відомого [1, 2] значення ейлеревої сили.

Висновки. Врахування геометричної нелінійності та зсувних деформацій дало змогу оцінити вплив зміни відносної вологості на критичне значення навантаження. За вологості $\kappa_m < 0{,}5$, коли проявляється усадка матеріалу, величина критичного значення навантаження є меншою порівняно з класичним значенням ейлеревої сили. Зсувні напруження, які є небажаними при осушенні, виникають лише тоді, коли дисторсія є функцією координат x_1, x_2.

Література

[1] *Гузь А. Н.* Динамика и устойчивость слоистых композитных материалов. — К.: Наук. думка, 1992. — 368 с.

[2] Обобщенная теория неоднородных по толщине пластин и оболочек / *Хорошун Л. П., Козлов С. В., Иванов Ю. А., Кошевой И. К.* — К.: Наук. думка, 1988. — 152 с.

[3] *Хейфец Л. И., Неймарк Ф. В.* Многофазные процессы в пористых средах. — М.: Химия, 1982. — 320 с.
[4] *Лыков О. В., Михайлов Ю. Ф.* Теория тепломассопереноса. — М.: Теплоэнергоиздат, 1963. — 535 с.
[5] *Луцык Р. П.* Уравнения теории сушки деформируемых твердых изотропных тел // Промышленная теплотехника. — 1985. — Т. 7, № 6. — С. 8-20.
[6] *Соколовский Я. И.* Взаимосвязь деформационно-релаксационных и тепломассообменных процессов при сушке капилярно-пористых тел // Прикладная механика. — 1998. — Т. 34, № 7. — С. 101-107.
[7] *Бурак Я. Й., Гайвась Б. І.* Математична модель сушки пористого шару з врахуванням обмежень на параметри напружено-деформованого стану // Механіка середовища, методи комп'ютерних наук. — 2004. — С. 12-26.
[8] *Бурак Я., Кондрат В., Гайвась Б.* До математичного моделювання процесу сушки пористих тіл. Інформативно-математичне моделювання складних систем. — MIMUZ'. — Львів: 2002. — С. 153-159.

About Stress State and Stability of Orthotropic Porous Plate in the Process of Drying

Bogdana Gayvas

The article deals with the stress-strain state and stability of orthotropic porous plate of finite sizes in the process of drainage. For description of porosity the regular capillary model of medium with cylinder pores which is perpendicular to the middle surface of plate is accepted. At the study of the stress state the known model of non-homogeneity on a thickness plate is accepted. It is shown that shearing stress caused by drainage arise up only in the case when distortion is heterogeneous in a plane which is parallel to the middle surface of a plate. It is established also, that drainage results in the decline of Euler critical force.

О напряженном состоянии и устойчивости равновесия ортотропной пластины в процессе сушки

Богдана Гайвась

В работе рассмотрено напряженно-деформированное состояние и устойчивость ортотропной пористой пластины конечных размеров в процессе сушки. При описании пористости принимается регулярная капиллярная модель среды с цилиндрическими порами, перпендикулярными к срединной поверхности пластины. При изучении напряженного состояния принята известная модель неоднородных по толщине пластин. Установлено, что сдвиговые напряжения, обусловленные сушкой, возникают только в случае, когда дисторсия является неоднородной в плоскости, параллельной срединной поверхности пластины. Показано, что сушка приводит к снижению критического значения эйлеровой силы.

Отримано 06.09.06