УДК 519.65

Рівномірне наближення з точним відтворенням значень функції та її похідних у заданих точках

Петро Малачівський

К. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, e-mail: psmal@cmm.lviv.ua

Розглянуто задачу найкращої рівномірної (чебишовської) апроксимації дискретної функції з точним відтворенням її значень і значень її похідних у заданих точках. Досліджено властивості такої рівномірної апроксимації многочленом і встановлено необхідні та достатні умови її існування. Запропоновано також алгоритм для визначення параметрів апроксимації за схемою Ремеза з уточненням точок альтернанса за модифікованим алгоритмом Валле-Пуссена.

Ключові слова: рівномірне (чебишовське) наближення з інтерполюванням, точки чебишовського альтернанса, схема Ремеза.

Вступ. Розглянемо задачу найкращого рівномірного (чебишовського) наближення функції многочленом із точним відтворенням її значень і значень її похідних у заданих точках. Рівномірна апроксимація функцій із відтворенням значень її похідних розглядалась у працях [1-4]. Зокрема, у роботах [3, 4] наведено алгоритм та описано програми для знаходження параметрів рівномірного наближення функції з точним відтворенням її значень і значень її похідних, який зводиться до розв'язування послідовності задач лінійного програмування. Для побудови ефективного алгоритму визначення параметрів найкращого рівномірного наближення функції многочленом із точним відтворенням значень функції та її похідних у заданих точках необхідно встановити умови існування такого наближення та його характеристичну властивість. Властивості такої рівномірної апроксимації відмінні від властивостей класичного найкращого рівномірного наближення многочленом [5]. У монографіях [6-8] досліджено існування й отримано характеристичну властивість найкращого рівномірного наближення функцій многочленом з інтерполюванням, а умови існування й характеристична властивість найкращого рівномірного наближення функції многочленом із точним відтворенням її значень та значень її похідної в заданих точках — у [9]. Метою даної роботи є узагальнення цих результатів щодо точного відтворення в заданих точках значень функції та значень її похідних до певного порядку. Встановлено необхідні та достатні умови існування такого найкращого рівномірного наближення функції многочленом, а також запропоновано алгоритм для визначення параметрів цієї апроксимації за схемою Ремеза.

1. Постановка задачі

Нехай в $(n + k)$ різних точках x відрізка $[\alpha, \beta]$ відомі значення деякої неперервно диференційовної до r-го порядку на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції $f(x)$ ($f(x) \in C^{(r)}[\alpha, \beta]$)

$$X_k = \left\{ x \in X_k : \alpha \le x_1 < \ldots < x_{j_1} < u_1 < x_{j_1+1} < \ldots < x_{j_k} < u_k < x_{j_k+1} < \ldots < x_n \le \beta \right\}, \quad (1)$$

де $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n - 1$. У точках u_i $\left(i = \overline{1, k}\right)$ функція $f(x)$ та її похідні $f^{(r_i)}(x)$ до r_i-го порядку набувають таких значень

$$f(u_i) = v_{i,0}, \quad f^{(j)}(u_i) = v_{i,j}, \quad j = \overline{1, r_i}, \quad i = \overline{1, k}. \quad (2)$$

Нехай вагова функція $w(x)$ є неперервною та відмінною від нуля на відрізку $[\alpha, \beta]$: $w(x) \ne 0$, $x \in [\alpha, \beta]$. Функцію $f(x)$ необхідно наблизити многочленом

$$P_m(a; x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \quad (3)$$

степеня m $\left(m \ge k + \sum_{i=1}^{k} r_i \right)$ так, щоб у точках u_i $\left(i = \overline{1, k}\right)$ точно відтворювалися значення функції $f(x)$ і її похідних $f^{(r_i)}(x)$ до r-го порядку включно, тобто

$$P_m(a; u_i) = v_{i,0}, \quad P_m^{(j)}(a; u_i) = v_{i,j}, \quad j = \overline{1, r_i}, \quad i = \overline{1, k}, \quad (4)$$

а найбільша похибка з ваговою функцією $w(x)$

$$\Delta(a) = \max_{x \in X_k} \left| \Delta(a;\ x_i) \right|, \quad (5)$$

де

$$\Delta(a;\ x) = \left[f(x) - P_m(a; x) \right] / w(x), \quad (6)$$

була найменшою з можливих на множині точок X_k.

До знаходження такого наближення з інтерполяційними умовами зводиться, зокрема, розв’язування задач апроксимації розв’язків диференціальних рівнянь [9].

Нехай простір R_{m+1} коефіцієнтів многочлена (3) — це $(m + 1)$-вимірний простір дійсних чисел. Клас многочленів, що задовольняють умовам (4), характеризується деякою множиною параметрів $A = \{ a_i \}_{i=0}^{m}$ $\left(A \in R_{m+1}\right)$, для яких виконуються рівності

$$\sum_{i=0}^{m} a_i u_j^i = v_{j,0}, \quad \sum_{i=l}^{m} \frac{i!}{(i-l)!} a_i x_j^{i-l} = v_{j,l}, \quad l = \overline{1, r_j}, \quad j = \overline{1, k}. \quad (7)$$

Якщо існує точка $a^* \in A$, у якій досягається точна нижня межа найбільшої зваженої похибки апроксимації (5)

$$\Delta\left(a^*\right) = \inf_{A} \Delta(a), \quad (8)$$

то многочлен $P_m(a^*; x)$ на множині точок (1) є многочленом рівномірного (чебишовського) наближення функції $f(x)$ із найменшою зваженою похибкою, який у точках u_j $\left(j=\overline{1,k}\right)$ точно відтворює значення функції та її похідних.

2. Властивості рівномірного наближення многочленом із точним відтворенням значень функції та її похідних у заданих точках

Властивості рівномірного наближення функцій многочленом із найменшою зваженою похибкою й точним відтворенням значень функції та її похідних у заданих точках встановлює така теорема.

Теорема. Нехай неперервна та диференційовна до r-го порядку $\left(r=\max\limits_{1\le i\le k} r_i\right)$ функція $f(x)$ $(f(x)\in C^{(r)}[\alpha,\beta])$ задана на множині точок (1), функція $w(x)$ неперервна та відмінна від нуля на відрізку $[\alpha, \beta]$ $(w(x)\neq 0, x\in[\alpha,\beta])$, а $P_m(a; x)$ — поліном степеня m, де $m\ge k+\sum\limits_{i=1}^{k} r_i$ і $n\ge m-k-\sum\limits_{i=1}^{k} r_i+2$. Тоді існує і до того ж єдине найкраще рівномірне наближення функції $f(x)$ поліномом $P_m(a; x)$ на множині точок X_k з ваговою функцією $w(x)$ і точним відтворенням у точках u_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$ значень функції та її похідних $f^{(r_i)}(u_i)$ до r_i-го порядку включно.

Для того, щоб многочлен $P_m(a^*; x)$ був найкращим рівномірним наближенням функції $f(x)$ на множині точок X_k із ваговою функцією $w(x)$ і точним відтворенням її значення та значень її похідних $f^{(r_i)}(u_i)$ до r_i-го порядку в точках u_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$ необхідно та достатньо, щоб для точок u_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$ та деяких відмінних від них p $\left(p=m-k-\sum\limits_{i=1}^{k} r_i+2\right)$ точок z_j $\left(j=\overline{1,p}\right)$ із множини X_k $\left(z_j\in X_k,\quad z_j\neq u_i, i=\overline{1,\ k},\ j=\overline{1,\ p}\right)$, упорядкованих за зростанням

$$\alpha\le z_1<z_2<\ldots<z_p\le\beta, \tag{9}$$

виконувалися рівності

$$\begin{cases} P_m\left(a^*;u_i\right)=v_{i,0}\equiv f\left(u_i\right), \\ P_m^{(j)}\left(a^*;u_i\right)=v_{i,j}\equiv f^{(j)}\left(u_i\right),\ j=\overline{1,r_i},\ i=\overline{1,k}, \\ \left[f\left(z_l\right)-P_m\left(a;z_l\right)\right]/w\left(z_l\right)=(-1)^{l+\sum_{j=1}^{k}\left(r_j+1\right)\Theta\left(z_l-u_j\right)}\mu,\quad l=\overline{1,p}, \end{cases} \tag{10}$$

де

$$|\mu|=\max_{1\le i\le n}\left|\left[f\left(x_i\right)-P_m\left(a^*;x_i\right)\right]/w\left(x_i\right)\right|, \tag{11}$$

$\Theta(x)$ — функція Гевісайда

$$\Theta(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x<0, \\ 1, & \text{якщо} \quad x\geq 0, \end{cases} \tag{12}$$

а $P_m^{(j)}(a;x)$ — j-а похідна від полінома, яка визначається за формулою

$$P_m^{(j)}(a;x)=\sum_{i=k}^{m}\frac{i!}{(i-j)!}a_i\,x^{i-j} \ .$$

Доведення. Справедливість цієї теореми у випадку $r_i = 1$ $\left(i=\overline{1,\,k}\right)$ встановлено у роботі [8]. Пересвідчимось у правильності тверджень теореми у разі найкращого зваженого рівномірного наближення функції $f(x)$ поліномом $P_m(a;x)$ на множині точок X_k із точним відтворенням значення функції та значення її перших двох похідних ($r_1 = 2$) лише в одній точці u_1, тобто для $k = 1$.

Нехай у деяких двох точках u_{11} і u_{12} з відрізка $[\alpha, \beta]$, відмінних від точок множини X_k і сусідніх з точкою u_1, тобто

$$x_1<x_2<\ldots<x_{j_1}<u_{12}<u_{11}<u_1<x_{j_1+1}<\ldots<x_n\,, \tag{13}$$

функція $f(x)$ набуває відповідно значень $f(u_{11})$ і $f(u_{12})$, а многочлен $P_m(b;x)$ степеня m ($m \geq 3$) є найкращим рівномірним наближенням функції $f(x)$ із ваговою функцією $w(x)$ на множині точок (13) та інтерполюванням у трьох точках u_1, u_{11} та u_{12}. Тоді, згідно з властивостями найкращого зваженого рівномірного наближення многочленом з інтерполюванням [2], таке наближення існує і до того ж єдине. Крім того, параметри цього наближення задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} P_m(b;u_1)=f(u_1), \\ P_m(b;u_{11})=f(u_{11}), \\ P_m(b;u_{12})=f(u_{12}), \\ \left[f(z_i)-P_m(b;\ z_i)\right]/w(z_i)=(-1)^{i+\Theta(z_i-u_1)+\Theta(z_i-u_{11})+\Theta(z_i-u_{12})}\,\eta, \quad i=\overline{1,m-1}, \end{cases} \tag{14}$$

де z_i $\left(i=\overline{1,m-1}\right)$ — точки альтернанса, впорядковані за зростанням $z_i < z_{i+1}$ $\left(i=\overline{1,m-2}\right)$ та відмінні від точок u_1, u_{11} та u_{12}; поліном $P_m(b;x)$ визначається за формулою (3); η визначається так само, як μ у формулі (11).

Оскільки значення функції $f(x)$ і многочлена $P_m(b;x)$ у точках u_1, u_{11} і u_{12} співпадають, то за теоремою Лагранжа [11] їхні середні нахили між цими точками однакові. Якщо точку u_{12} подумки наближати до точки u_{11}, а точку u_{11} — до u_1, то ці середні нахили на відповідних відрізках будуть прямувати до значення похідної функції $f(x)$ і похідної многочлена $P_m(b;x)$ відповідно в точках u_{11} і u_1. Отже, у разі суміщення точки u_{12} з точкою u_{11}, а точки u_{11} — з u_1 отримаємо многочлен, який окрім точного відтворення значення функції $f(x)$ у точці u_1, ще й точно відтворює значення її першої похідної в точках u_{11} і u_1.

Система рівнянь (14) еквівалентна такій системі

$$\begin{cases} P_m(b;u_1) = f(u_1), \\ \dfrac{P_m(b;u_1) - P_m(b;u_{11})}{u_1 - u_{11}} = \dfrac{f(u_1) - f(u_{11})}{u_1 - u_{11}}, \\ \dfrac{P_m(b;u_{11}) - P_m(b;u_{12})}{u_{11} - u_{12}} = \dfrac{f(u_{11}) - f(u_{12})}{u_{11} - u_{12}}, \\ \left[f(z_i) - P_m(b;z_i)\right] / w(z_i) = (-1)^{i+\Theta(z_i-u_1)+\Theta(z_i-u_{11})+\Theta(z_i-u_{12})}\eta, \quad i = \overline{1,m-1}, \end{cases} \tag{15}$$

в якій друге рівняння є різницею першого й другого рівнянь системи (14), поділеною на $(u_1 - u_{11})$, а третє — різницею другого й третього рівнянь, поділеною на $(u_{11} - u_{12})$.

Оскільки за умовою теореми функція $f(x)$ є неперервно диференційовною, то, перейшовши до границі в системі рівнянь (15), спрямовуючи точку u_{11} до u_1 в усіх рівняннях цієї системи, крім третього, а точку u_{12} — до u_{11} в усіх рівняннях, окрім перших двох, отримаємо

$$\begin{cases} P_m(b;u_1) = f(u_1), \\ P'_m(b;u_1) = f'(u_1), \\ P'_m(b;u_{11}) = f'(u_{11}), \\ \left[f(z_i) - P_m(b;z_i)\right] / w(z_i) = (-1)^{i+2\Theta(z_i-u_1)+\Theta(z_i-u_{11})}\eta \quad i = \overline{1,m-1}. \end{cases} \tag{16}$$

Таким чином, у результаті спрямування точки u_{11} до u_1, а u_{12} — до u_{11}, отримаємо многочлен $P_m(b;x)$, який є найкращим рівномірним наближенням функції $f(x)$ на множині (1) точок X_k з ваговою функцією $w(x)$ і точним відтворенням значення функції у точці u_1 і значень її першої похідної в точках u_1 та u_{11}. При цьому параметри такої рівномірної апроксимації задовольняють систему рівнянь (16).

Оскільки значення похідної функції $f(x)$ і многочлена $P_m(b;x)$ у точках u_1 та u_{11} співпадають, то за теоремою Лагранжа [11] їхні середні нахили між цими точками однакові. Повторимо щодо похідної $f'(x)$ функції і похідної $P'_m(b;x)$ многочлена ті самі міркування, які ми навели щодо функції $f(x)$ і многочлена $P_m(b;x)$. А саме, подумки будемо наближати точку u_{11} до точки u_1. При цьому середній нахил згаданих вище похідних на цьому відрізку буде прямувати відповідно до значення другої похідної функції $f(x)$ і другої похідної многочлена $P_m(b;x)$ у точці u_1. Отже, у разі суміщення точки u_{11} з u_1 отримаємо многочлен, який, окрім точного відтворення значень функції $f(x)$ і її першої похідної в точці u_1, точно відтворює ще й значення її другої похідної в точці u_1.

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} P_m(b;u_1) = f(u_1), \\ P'_m(b;u_1) = f'(u_1), \\ \dfrac{P'_m(b;u_1) - P'_m(b;u_{11})}{u_1 - u_{11}} = \dfrac{f'(u_1) - f'(u_{11})}{u_1 - u_{11}}, \\ \left[f(z_i) - P_m(b;z_i)\right] / w(z_i) = (-1)^{i+2\Theta(z_i-u_1)+\Theta(z_i-u_{11})}\eta, \quad i=\overline{1,m-1}, \end{cases} \tag{17}$$

яка еквівалентна системі рівнянь (16). Третє рівняння цієї системи є різницею третього та другого рівнянь системи (16), поділеною на $(u_1 - u_{11})$.

Оскільки за умовою теореми друга похідна функції $f(x)$ є неперервно диференційовною, то, перейшовши до границі, спрямовуючи точку u_{11} до u_1, отримаємо

$$\begin{cases} P_m(b;u_1) = f(u_1), \\ P'_m(b;u_1) = f'(u_1), \\ P''_m(b;u_1) = f''(u_1), \\ \left[f(z_i) - P_m(b;z_i)\right] / w(z_i) = (-1)^{i+3\Theta(z_i-u_1)}\eta, \quad i=\overline{1,m-1}. \end{cases} \tag{18}$$

Таким чином, у результаті граничного переходу в системі рівнянь (17), а саме, спрямування точки u_{11} до u_1, отримано многочлен $P_m(b;x)$, який є найкращим рівномірним наближенням функції $f(x)$ на множині точок X_k з ваговою функцією $w(x)$ і який до того ж точно відтворює значення функції та перших двох її похідних у точці u_1. Відповідно до теореми про найкраще зважене рівномірне наближення многочленом із інтерполюванням [2] цей поліном буде єдиним. При цьому параметри b_i $\left(i=\overline{0,m}\right)$ цього многочлена задовольняють систему рівнянь (18), яка співпадає з системою рівнянь (10) при $r_1 = 2$ і $k = 1$.

Отже, найкраще рівномірне наближення функції $f(x)$ многочленом $P_m(a;x)$ степеня m ($m \geq 3$) на множині точок X_k з ваговою функцією $w(x)$ і точним відтворенням значень функції та перших двох її похідних у точці u_1 існує й до того ж єдине, а його параметри задовольняють систему рівнянь (10) при $r_1 = 2$ і $k = 1$.

Відтворюючи міркування, викладені під час обґрунтування справедливості теореми при $r_1 = 2$ і $k = 1$, можна пересвідчитись у її справедливості для будь-якого фіксованого значення $r_1 > 1$ та $k = 1$. Міркуючи так само для двох і більше заданих точок u_i $\left(i=\overline{2,k}\right)$, можна встановити справедливість теореми й у разі найкращого рівномірного наближення функції $f(x)$ многочленом $P_m(a;x)$ степеня m $\left(m \geq k + \sum_{i=1}^{k} r_i\right)$ на множині точок X_k з ваговою функцією $w(x)$ і точним відтворенням значень функції та її похідних до r_i порядку $\left(i=\overline{1,k}\right)$ в точках u_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$. При цьому, крім застосування властивості рівномірного наближення з інтерполюванням у k різних точках [2], слід ще вважати, що функція $f(x)$ додатково задана ще в $\sum_{j=1}^{k} r_j$ різних точках $u_{i,j}$ $\left(i=\overline{1,k},\ \ j=\overline{1,r_i}\right)$, відмінних від точок множини X_k і сусідніх із відповідними точками u_i. *Теорему доведено.*

Для знаходження точок чебишовського альтернанса z_i $\left(i=\overline{1,p},\ p=m-k-\right.$ $\left.-\sum_{i=1}^{k} r_i+2\right)$ у разі визначення параметрів рівномірної апроксимації неперервної функції $f(x)$ на множині точок X_k з ваговою функцією $w(x)$ і точним відтворенням значень функції та її похідних до r_i порядку $\left(i=\overline{1,k}\right)$ в точках u_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$ можна використати схему Ремеза з одноточковою заміною наближення до точок альтернанса [8]. Уточнення наближення до точок альтернанса тут має певні особливості. Згідно з характеристичною властивістю (10) залежно від порядку похідної r_i у точках u_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$ спостерігаються різні варіанти чергування зміни знаку похибки апроксимації в точках альтернанса, сусідніх із точкою u_i. У випадку непарного значення r_i знаки похибки апроксимації у точках альтернанса, сусідніх із точкою u_i, чергуються, тоді як у разі парного значення r_i чергування зміни знаку похибки апроксимації в точках альтернанса, сусідніх із точкою u_i, порушується — знаки похибки апроксимації у цих точках альтернанса співпадають. Тоді для організації уточнення наближення до точок альтернанса можна застосувати модифікований алгоритм Валле-Пуссена [12]. Під час вибору початкового наближення до точок альтернанса слід пам'ятати, що u_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$ не можуть входити в альтернанс.

Висновки. Найкраща рівномірна апроксимація неперервно диференційовної до r-го порядку $\left(r=\max\limits_{1\le i\le k} r_i\right)$ функції $f(x)$ $\left(f(x)\in C^{(r)}[\alpha,\beta]\right)$ поліномом $P_m(a;x)$ степеня m $\left(m\ge k+\sum_{i=1}^{k} r_i\right)$ із ваговою функцією $w(x)$ і точним відтворенням значень функції та її похідних до r_i порядку $\left(i=\overline{1,k}\right)$ у заданих точках u_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$ характеризується альтернансною властивістю (10). Згідно цієї властивості така рівномірна апроксимація має $\left(m-k-\sum_{i=1}^{k} r_i+2\right)$-і точки альтернанса, в яких спосіб зміни знаку похибки апроксимації залежить від порядку похідної. Для знаходження параметрів такої апроксимації можна використати схему Ремеза з одноточковою заміною наближення до точок альтернанса за модифікованим алгоритмом Валле-Пуссена.

Рівномірна апроксимація з точним відтворенням значень функції та її похідних у заданих точках може бути використана для побудови неперервних балансних сплайн-наближень із неперервними похідними, в яких кожна з ланок є найкращим рівномірним наближенням.

Література

[1] *Лоран Ж.-П.* Аппроксимация и оптимизация. — М.: Мир, 1975. — 496 с.

[2] *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. — К.: Наук. думка, 1989. — 272 с.

[3] *Кондратьев В. П.* Совместное приближение функции одного переменного и ее производных // Программы оптимизации: приближение функций. — Свердловск: УНЦ АН СССР. — 1975. — Вып. 6. — С. 18-31.

[4] *Кондратьев В. П.* Равномерная аппроксимация с ограничениями интерполяционного типа // Алгоритмы и программы приближения функций. — Свердловск: Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР. — 1981. — С. 40-69.

[5] *Ремез Е. Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. — К.: Наук. думка, 1969. — 623 с.

[6] *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972. — 368 с.

[7] Вопросы теории и элементы программного обеспечения минимаксных задач. Под ред. *Дем'янова В. Ф., Малоземова В. Н.* — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. — 192 с.

[8] *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Приближение функций для технических приложений. — К.: Наук. думка. 1980. — 352 с.

[9] *Коллатц Л., Крабс В.* Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. — М.: Наука, 1978. — 272 с.

[10] *Малачівський П. С.* Рівномірне наближення з точним відтворенням значень функції та похідної в заданих точках // Доп. НАН України. — 2006. — № 9. — С. 80-85.

[11] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников. — М.: Мир, 1977. — 831 с.

[12] *Малачівський П.* Модифікований алгоритм Валле-Пуссена // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2005. — Вип. 2. — С. 159-166.

Uniform Approximation with Exact Reproduction of Function and its Derivatives Values in Given Points

Petro Malachivskyy

The problem of the best uniform (Chebyshev) approximation for a discrete function with exact reproduction of its values and derivatives ones in certain given points is considered. The properties of such uniform polynomial approximation are investigated. Necessary and sufficient conditions of approximation existence are established as well as the Remez scheme is proposed for determining the approximation parameters with application of modified Vallee-Poussin algorithm

Равномерное приближение с точным восстановлением значений функции и ее производных в заданных точках

Петро Малачивский

Рассмотрена задача наилучшей равномерной (чебишевской) аппроксимации дискретной функции с точным восстановлением ее значений и значений ее производных в заданных точках. Исследованы свойства такой равномерной аппроксимации многочленом и установлены необходимые и достаточные условия ее существования. Предложен также алгоритм для определения параметров аппроксимации по схеме Ремеза с уточнением точек альтернанса по модифицированному алгоритму Валле-Пуссена.

Отримано 11.03.07