

Моделювання процесу теплопровідності в тілі з тонким ненаскрізним включенням

Лілія Дяконюк¹, Тарас Мандзак², Ярема Савула³

¹ к. ф.-м. н., Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів

² Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів

³ д. ф.-м. н., професор, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail: savula@franko.lviv.ua

У роботі запропоновано математичну модель нестационарного процесу теплопровідності у тілі з тонким включенням з відмінними теплофізичними параметрами. Модель враховує малу товщину включення у спосіб, який істотно дозволяє зменшити обчислювальні затрати комп'ютерної реалізації числових методів. Система рівнянь, що описує модель є полівимірною за просторовими змінними, тобто, якщо вимірність рівнянь у тілі — n , то вимірність рівнянь у включенні — $n - 1$. У математичному формулюванні товщина тонкого включення зведена до нуля. Вона входить у коефіцієнти рівнянь зниженої вимірності. Ненаскрізність включення приводить до потреби формулювання крайової умови спряження на його торцевому краю, яка пов'язує між собою співвідношення різної вимірності за просторовими координатами. У роботі сформульовано один із підходів до запису граничних умов на торці включення, а також наведено результати скінченноелементного аналізу на основі розглянутої моделі.

Ключові слова: теплопровідність, тіло з тонким включенням, пониження вимірності, напіваналітичний метод скінченних елементів, схема Кранка-Ніколсона.

Вступ. Серед проблем, пов'язаних з перенесенням тепла у різноманітних неоднорідних середовищах важливе місце займає числове дослідження процесу теплопровідності в тілах з тонкими включеними неоднорідностями (включеннями), які характеризуються малою товщиною та відмінними від оточуючого середовища теплофізичними параметрами. Математичному моделюванню впливу тонких включень на процеси перенесення присвячені праці Дейнеки В. С., Кіта Г. С., Підстригача Я. С., Сергієнка І. В., Скопечького В. В., Сулима Г. Т. та інших. Огляд досліджень у цьому напрямі приведено в працях [3, 4, 6]. Альтернативний підхід, що полягає у побудові полівимірних крайових задач математичних моделей, тобто таких, які описуються рівняннями математичної фізики різної вимірності за просторовими координатами у середовищі та включеному тонкому шарі, започатковано у працях [1, 2, 5, 7]. Зниження вимірності співвідношень математичної моделі у тонкому включенні на основі застосування відповідної апроксимації шуканого розподілу за товщиною дозволяє звести до нуля товщину включення і таким чином уникнути багатьох проблем, пов'язаних з дискретизацією різних частин області

(включення і основного середовища), зменшити обчислювальні затрати числових методів. У даній роботі цей підхід набуває подальшого розвитку, а саме, математичну модель, описану в публікаціях [1, 2, 7], узагальнено для ненаскрізного включення. Наведено результати числового аналізу методом скінченних елементів.

1. Формулювання задачі

Дослідимо нестационарний процес теплопровідності у тілі складної форми, яке займає область $\Omega_1 \cup \Omega_2^*$, де Ω_1, Ω_2^* — тривимірні області з Ліпшицевими границями Γ_1, Γ_2^* (рис. 1). Приймаємо, що на границі контакту з зовнішнім середовищем задано крайову умову третього роду, а також початкову умову $T = T_0$, де T — функція температури в області $\Omega_1 \cup \Omega_2^*$, а T_0 — відоме температурне поле в момент часу $\tau = 0$.

Віднесемо область Ω_2^* до криволінійної ортогональної системи координат $(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)})$, пов'язаної з серединною поверхнею області.

Для дослідження процесу теплопровідності в Ω_1 маємо рівняння [7]

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda_1 \operatorname{grad} T_1) + q_1, \quad (1)$$

де c_1 — питома теплоємність, ρ_1 — густина маси тіла, λ_1 — коефіцієнт теплопровідності, q_1 — об'ємна густина теплових джерел, $T_1 = T_1(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}, \tau)$ — функція розподілу температури в області Ω_1 .

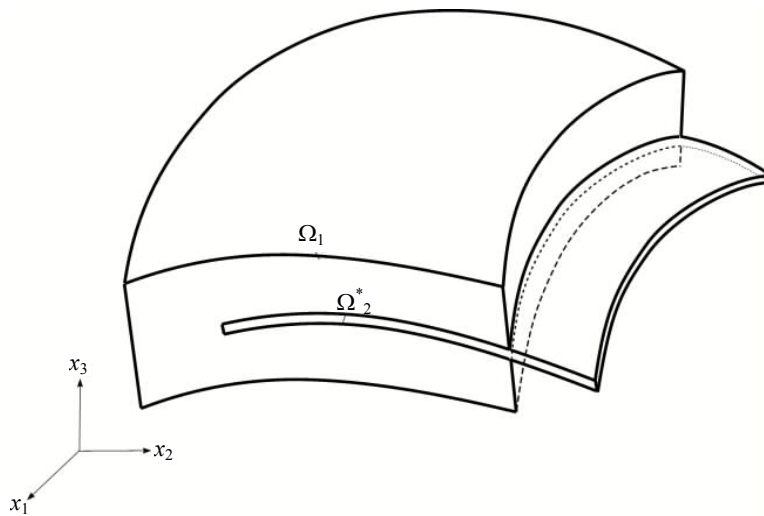


Рис. 1. Геометрія досліджуваного об'єкта

Для опису процесу теплопровідності в області Ω_2^* використаємо математичну модель теплопровідності в тонкому шарі [7], яка побудована на основі варіаційного підходу з використанням припущення про лінійний розподіл шуканої функції по товщині шару

$$T_2(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)}, \tau) = t_1^{(2)}(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \tau) + \frac{2\alpha_3^{(2)}}{h} t_2^{(2)}(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \tau). \quad (2)$$

Тут $T_2(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)}, \tau)$ — функція розподілу температури в Ω_2^* , h — товщина включення, $t_i^{(2)}(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \tau)$ ($i=1,2$) — шукані коефіцієнти розвинення.

Співвідношення математичної моделі теплопровідності для тонкого шару мають вигляд [7]

$$\begin{aligned} c_2 \rho_2 h \frac{\partial t_1^{(2)}}{\partial \tau} + c_2 \rho_2 \frac{h^2}{6} (k_1^{(2)} + k_2^{(2)}) \frac{\partial t_2^{(2)}}{\partial \tau} &= \frac{h}{A_1^{(2)} A_2^{(2)}} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_i^{(2)}} \left(\lambda_2 \frac{A_{3-i}^{(2)}}{A_i^{(2)}} \frac{\partial t_1^{(2)}}{\partial \alpha_i^{(2)}} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{h}{6} \frac{\partial}{\partial \alpha_i^{(2)}} \left(\lambda_2 \frac{A_{3-i}^{(2)}}{A_i^{(2)}} (k_{3-i}^{(2)} - k_i^{(2)}) \frac{\partial t_2^{(2)}}{\partial \alpha_i^{(2)}} \right) \right] + \left(1 + k_1^{(2)} \frac{h}{2} \right) \left(1 + k_2^{(2)} \frac{h}{2} \right) q_n^{(2)+} + \\ &+ \left(1 - k_1^{(2)} \frac{h}{2} \right) \left(1 - k_2^{(2)} \frac{h}{2} \right) q_n^{(2)-} - q_1^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} c_2 \rho_2 \frac{h^2}{6} (k_1^{(2)} + k_2^{(2)}) \frac{\partial t_1^{(2)}}{\partial \tau} + c_2 \rho_2 \frac{h}{3} \frac{\partial t_2^{(2)}}{\partial \tau} &= \\ &= \frac{h}{3 A_1^{(2)} A_2^{(2)}} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_i^{(2)}} \left(\lambda_2 \frac{A_{3-i}^{(2)}}{A_i^{(2)}} (k_{3-i}^{(2)} - k_i^{(2)}) \frac{\partial t_1^{(2)}}{\partial \alpha_i^{(2)}} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial \alpha_i^{(2)}} \left(\lambda_2 \frac{A_{3-i}^{(2)}}{A_i^{(2)}} \frac{\partial t_2^{(2)}}{\partial \alpha_i^{(2)}} \right) \right] + \left(1 + k_1^{(2)} \frac{h}{2} \right) \left(1 + k_2^{(2)} \frac{h}{2} \right) q_n^{(2)+} + \\ &+ \left(1 - k_1^{(2)} \frac{h}{2} \right) \left(1 - k_2^{(2)} \frac{h}{2} \right) q_n^{(2)-} + \frac{4\lambda_2}{h} t_2^{(2)} - q_2^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

де c_2, ρ_2 — питома теплоємність і густина маси включення, λ_2 — коефіцієнт теплопровідності в області Ω_2^* , $A_1^{(2)}, A_2^{(2)}$ — коефіцієнти Ляме,

$$\begin{aligned} q_1^{(2)} &= \int_{-h/2}^{h/2} q_2 \left(1 + k_1^{(2)} \alpha_3^{(2)} \right) \left(1 + k_2^{(2)} \alpha_3^{(2)} \right) d\alpha_3^{(2)}, \\ q_2^{(2)} &= \frac{2}{h} \int_{-h/2}^{h/2} q_2 \left(1 + k_1^{(2)} \alpha_3^{(2)} \right) \left(1 + k_2^{(2)} \alpha_3^{(2)} \right) \alpha_3^{(2)} d\alpha_3^{(2)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$q_n^{(2)+}, q_n^{(2)-}$ — задані значення теплових потоків на поверхнях $\alpha_3^{(2)} = h/2$, $\alpha_3^{(2)} = -h/2$, q_2 — об'ємна густина теплових джерел у включенні [7].

Приймаємо, що границя Γ_1 області Ω_1 складається з частин $\Gamma_1^{(i)}$, таких, що $\Gamma_1 = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_1^{(i)}$, $\Gamma_1^{(i)} \cap \Gamma_1^{(j)} = \emptyset$, $i \neq j$, а $\Gamma_2^c \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_2^-$ — границя Γ_2^* області Ω_2^* ; Γ_2^c є циліндричною поверхнею, утвореною рухом нормалі до серединної поверхні S включення вздовж її границі ∂S , а границі Γ_2^+ та Γ_2^- — верхня ($\alpha_3^{(2)} = h/2$) та нижня ($\alpha_3^{(2)} = -h/2$) лицьові поверхні тонкого шару. Нехай кожна з поверхонь $\Gamma_2^c, \Gamma_2^+, \Gamma_2^-$ складається з двох частин, а саме: такої, що контактує з зовнішнім середовищем, і такої, що контактує з областю Ω_1 ,

$$\Gamma_2^c = \Gamma_{2ex}^c \cup \Gamma_{2in}^c, \quad \Gamma_2^+ = \Gamma_{2ex}^+ \cup \Gamma_{2in}^+, \quad \Gamma_2^- = \Gamma_{2ex}^- \cup \Gamma_{2in}^-,$$

$$\Gamma_{2ex}^c \cap \Gamma_{2in}^c = \emptyset, \quad \Gamma_{2ex}^+ \cap \Gamma_{2in}^+ = \emptyset, \quad \Gamma_{2ex}^- \cap \Gamma_{2in}^- = \emptyset.$$

Нехай $\Gamma_1^{(1)}$ — контактує з зовнішнім середовищем, $\Gamma_1^{(2)}$ співпадає з Γ_{2in}^c , $\Gamma_1^{(3)}$, співпадає з Γ_{2in}^+ , $\Gamma_1^{(4)}$ — з Γ_{2in}^- .

Умови контакту з зовнішнім середовищем запишемо у вигляді [7]

$$\left(-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} - a(T_1 - T_c) \right) \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad (6)$$

$$\left\{ -\lambda_2 h \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{A_i^{(2)}} \frac{\partial t_1^{(2)}}{\partial \alpha_i^{(2)}} + \frac{h}{6A_i^{(2)}} (k_{3-i}^{(2)} - k_i^{(2)}) \frac{\partial t_2^{(2)}}{\partial \alpha_i^{(2)}} \right] n_i \right\} \Big|_{\Gamma_{2ex}^+ \cup \Gamma_{2ex}^-} =$$

$$= a \left(ht_1^{(2)} + \frac{h^2}{6} k_{\Gamma}^{(2)} t_2^{(2)} - t_1^c \right), \quad (7)$$

$$\left\{ -\frac{h\lambda_2}{3} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{h}{2A_i^{(2)}} (k_{3-i}^{(2)} - k_i^{(2)}) \frac{\partial t_1^{(2)}}{\partial \alpha_i^{(2)}} + \frac{1}{A_i^{(2)}} \frac{\partial t_2^{(2)}}{\partial \alpha_i^{(2)}} \right] n_i \right\} \Big|_{\Gamma_{2ex}^+ \cup \Gamma_{2ex}^-} =$$

$$= a \left(\frac{h^2}{6} k_{\Gamma}^{(2)} t_1^{(2)} + \frac{h}{3} t_1^{(2)} - t_2^c \right), \quad (8)$$

$$\left\{ -\frac{\lambda_2 h}{3} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{A_i^{(2)}} \frac{\partial t_1^{(2)}}{\partial \alpha_i^{(2)}} + \frac{h}{2A_i^{(2)}} (k_{3-i}^{(2)} - k_i^{(2)}) \frac{\partial t_2^{(2)}}{\partial \alpha_i^{(j)}} \right] n_i \right\} \Big|_{\Gamma_{2ex}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= a \left(ht_1^{(2)} + \frac{h^2}{6} k_{\Gamma}^{(2)} t_2^{(2)} - t_1^c \right), \\
 &\left\{ -\frac{\lambda_2 h}{3} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{h}{2A_i^{(2)}} (k_{3-i}^{(2)} - k_i^{(2)}) \frac{\partial t_1^{(2)}}{\partial \alpha_i^{(2)}} + \frac{1}{A_i^{(2)}} \frac{\partial t_2^{(2)}}{\partial \alpha_i^{(2)}} \right] n_i \right\} \Big|_{\Gamma_{2ex}} = \\
 &= a \left(\frac{h^2}{6} k_{\Gamma}^{(2)} t_1^{(2)} + \frac{h}{3} t_2^{(2)} - t_2^c \right). \tag{9}
 \end{aligned}$$

Тут a — коефіцієнт теплообміну з зовнішнім середовищем,

$$t_1^c = \int_{-h/2}^{h/2} T_c \left(1 + k_{\Gamma}^{(2)} \alpha_3^{(2)} \right) d\alpha_3, \quad t_2^c = \frac{2}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T_c \left(1 + k_{\Gamma}^{(2)} \alpha_3^{(2)} \right) \alpha_3^{(2)} d\alpha_3;$$

$k_{\Gamma}^{(2)} = k_1^{(2)} n_2^2 + k_2^{(2)} n_1^2$, n_1, n_2 — координати одиничного вектора нормалі до Γ_2^* .

На границі контакту областей Ω_1, Ω_2^* задамо умови спряження, а саме:
на границі $\Gamma_{lin}^{(3)}$

$$T_1 \Big|_{\Gamma^{(3)}} = (t_1^{(2)} + t_2^{(2)}), \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma^{(3)}} = q_n^{(2)+}; \tag{10}$$

на границі $\Gamma_{lin}^{(4)}$

$$T_1 \Big|_{\Gamma^{(4)}} = (t_1^{(2)} - t_2^{(2)}), \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma^{(3)}} = q_n^{(2)-}; \tag{11}$$

на границі $\Gamma_{lin}^{(2)}$

$$T_1 \Big|_{\Gamma^{(2)}} = \left[t_1^{(2)} \left(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \tau \right) + \frac{2\alpha_3^{(2)}}{h} t_1^{(2)} \left(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \tau \right) \right] \Big|_{\Gamma_2^c}, \tag{12}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} d\alpha_3^{(2)} \Big|_{\Gamma_2} = -\frac{\lambda_2 h}{3} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{A_i^{(2)}} \frac{\partial t_1^{(2)}}{\partial \alpha_i^{(2)}} + \frac{h}{2A_i^{(2)}} (k_{3-i}^{(2)} - k_i^{(2)}) \frac{\partial t_2^{(2)}}{\partial \alpha_i^{(2)}} \right] n_i, \tag{13}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \alpha_3^{(2)} d\alpha_3^{(2)} \Big|_{\Gamma_2} = -\frac{\lambda_2 h}{3} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{h}{2A_i^{(2)}} (k_{3-i}^{(2)} - k_i^{(2)}) \frac{\partial t_1^{(2)}}{\partial \alpha_i^{(2)}} + \frac{1}{A_i^{(2)}} \frac{\partial t_2^{(2)}}{\partial \alpha_i^{(2)}} \right] n_i. \tag{14}$$

Задамо також початкові умови

$$\begin{aligned} ht_1^{(2)}(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, 0) + \frac{h^2}{6}(k_1^{(2)} + k_2^{(2)})t_2^{(2)}(\alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(2)}, 0) &= t_1^0, \\ \frac{h^2}{6}(k_1^{(2)} + k_2^{(2)})t_1^{(2)}(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, 0) + \frac{h}{3}t_2^{(2)}(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, 0) &= t_2^0, \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} t_1^0 &= \int_{-h/2}^{h/2} T_0(1 + k_1^{(2)}\alpha_3^{(2)})(1 + k_2^{(2)}\alpha_3^{(2)})d\alpha_3^{(2)}, \\ t_2^0 &= \frac{2}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T_0(1 + k_1^{(2)}\alpha_3^{(2)})(1 + k_2^{(2)}\alpha_3^{(2)})\alpha_3^{(2)}d\alpha_3^{(2)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Система співвідношень (1), (3), (4), (6)-(16) є повною системою диференціальних рівнянь другого порядку для визначення невідомих шуканих функцій $T_1, t_1^{(2)}, t_2^{(2)}$.

3. Числовий алгоритм

Для розв'язування сформульованої задачі застосуємо алгоритм, який базується на методі скінченних елементів для апроксимацій за просторовими змінними та різницевої схемі Кранка-Ніколсона для дискретизації за часовою змінною.

Подемо шукані функції у вигляді таких розвинень

$$T^h(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}, \tau) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N T_{ij}(\tau) \tilde{\varphi}_j(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}) \tilde{\psi}_i(\alpha_3^{(1)}), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} t_1^{jh}(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \tau) &= \sum_{i=1}^N t_{1i}^{(2)}(\tau) \tilde{\varphi}_i(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}), \\ t_2^{jh}(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \tau) &= \sum_{i=1}^N t_{2i}^{(2)}(\tau) \tilde{\varphi}_i(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}), \end{aligned} \quad (18)$$

де $\tilde{\varphi}_j(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)})$, $\tilde{\varphi}_i(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)})$ — відомі базисні функції методу скінченних елементів, а $\tilde{\psi}_i(\alpha_3^{(1)})$ на відрізку $[-1, 1]$ можна записати у вигляді

$$\psi_1(\xi) = \frac{1+\xi}{2}, \quad \psi_2(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, \quad \psi_i(\xi) = \Phi_{i-1}(\xi), \quad i = 3, 4, \quad (19)$$

де $\Phi_i(\xi) = \sqrt{\frac{2i-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{i-1}(t) dt$, $P_i(t)$ — поліноми Лежандра; N, M — відповідно кількість базисних функцій $\tilde{\varphi}_j$ та $\tilde{\psi}_i$ на одному скінченному елементі; ξ — координата локального базису.

Застосувавши дискретизацію за просторовими змінними з поданими апроксимаціями та схему Кранка-Ніколсона за часовою змінною, зведемо задачу до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь із стрічково-блоковою структурою матриці. Розв'язуємо цю систему з допомогою методу Гауса, який враховує структуру матриці.

4. Приклад

Наведемо для прикладу результат числового дослідження задачі двовимірної стаціонарної теплопровідності у мідному тілі з тонким прямолінійним скляним включенням. Тіло з включенням займає область $\Omega_1 \cup \Omega_2^*$, де

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ (\alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}) : 0 \leq \alpha_2^{(1)} \leq 1, 0 \leq \alpha_3^{(1)} \leq 1 \right\}, \\ \Omega_2^* &= \left\{ (\alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)}) : \alpha_2^{(2)} = \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(2)} = \alpha_3^{(1)} - 0,5, \right. \\ &\quad \left. 0,4995 \leq \alpha_3^{(1)} \leq 0,5005, 0,3 \leq \alpha_2^{(1)} \leq 1 \right\}, \\ S &= \left\{ (\alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}) : 0 \leq \alpha_2^{(1)} \leq 1, \alpha_3^{(1)} = 0,5 \right\}, \end{aligned}$$

координати $\alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}$ є декартовими.

На границях $\alpha_3^{(1)} = 0, \alpha_3^{(1)} = 1$ області Ω_1 задані значення температур 373 і 293 відповідно, на решті границі задано умови теплоізоляції. Коефіцієнт теплопровідності міді та скла 389,6 та 0,74 відповідно. Всі значення наведено у системі Сі.

Розподіл температурного поля у вигляді ізоліній зображено на рис. 2.

Для числового дослідження цієї задачі застосовано лінійні апроксимації на сітці з трикутних скінченних елементів. В області включення використано модель зниженої вимірності, тому додаткове згущення сітки не проводилось. Отриманий результат відповідає фізичному змісту процесу. Характер розподілу температури в області включення зумовлений низькою, порівняно з міддю, теплопровідністю скла.

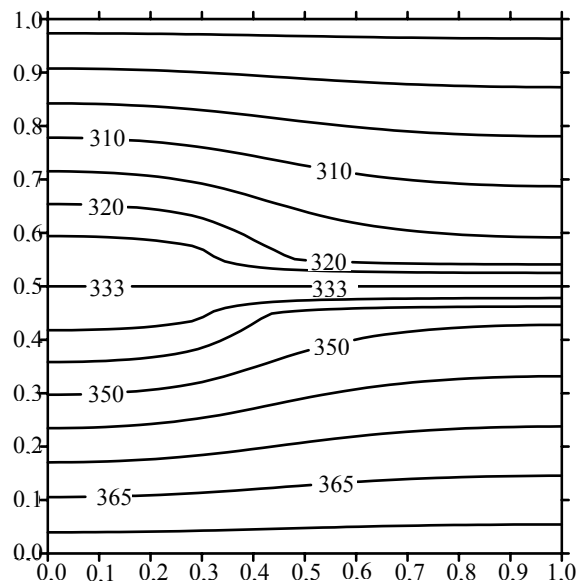


Рис. 2. Розподіл температури у мідному тілі з тонким скляним включенням, К

Висновки. Запропонована математична модель теплопровідності у тілі з ненаскрізним включенням дозволяє досліджувати достатньо широкий клас задач. Вона передбачає врахування малих товщин включень на етапі формулювання ключових співвідношень теплопровідності. Це дає змогу застосовувати відомі числові методи, зокрема, метод скінченних елементів, без значного згущення сітки в області тонкого включення. Завдяки використаній криволінійній системі координат на основі сформульованої системи рівнянь можна визначити температурне поле в геометрично складних областях. На прикладі проведеного числового експерименту показано можливість застосування сформульованої системи рівнянь у скінченноелементному числовому аналізі та проілюстровано істотний вплив тонких включень на температурне поле в середовищі.

Література

- [1] Дяконюк Л., Кухарський В., Савула Я. Математичне моделювання процесів теплопровідності у багат шарових середовищах із тонкими включеннями // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. — Львів: 2000. — Т. 1. — С. 212-215.
- [2] Дяконюк Л. М. Аналіз варіаційної задачі ієрархічної моделі пониженої вимірності теплопровідності в багат шарових середовищах з тонкими включеннями // Волинський математичний вісник. — 2001. — Вип. 8. — С. 61-64.
- [3] Ладыженская О. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 407 с.
- [4] Підстригач Я. С. Вибрані праці. — К.: Наук. думка, 1995. — 459 с.
- [5] Савула Я. Г., Мандзак Т. І. Гетерогенна крайова задача математичної моделі адвекції-дифузії у середовищі з включенням // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2006. — Вип. 3. — С. 150-158.
- [6] Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. — К.: Наук. думка, 1991. — 432 с.
- [7] Дяконюк Л. М., Савула Я. Г. Гетерогенний підхід до моделювання процесу теплоперенесення в багат шарових конструкціях із врахуванням малих товщин окремих шарів // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2005. — Вип. 1.—С. 61-71.

Modelling the Process of Heat Conduction in a Body with Non Through-Going Thin Inclusion

Lilija Dyakonuk, Taras Mandzak, Yarema Savula

In present paper the mathematical model of nonstationary heat conduction in a body with thin inclusion with differing physical parameters has been constructed. The model takes into consideration an inclusion in the way that allows decreasing resources needed by computer realization of numerical methods. System of equations describing the model is polydimensional by space coordinates. It means that when dimension of equations in the body equals n than dimension of equations in inclusion equals $n - 1$. The thickness of an inclusion in mathematical model is reduced to zero. It appears in equation coefficients of dimensionally reduced equations. Non-through going of the inclusion leads to necessity to formulate boundary junction conditions on its thin boundaries that connects mathematical expressions of different dimensionalities by space coordinates. One of the approaches to formulation of junction conditions has been considered and results of finite element analysis of a test problem has been presented.

Моделирование процесса теплопроводности в теле с тонким ненасквозным включением

Лилия Дяконюк, Тарас Мандзак, Ярема Савула

В работе предложена математическая модель нестационарного процесса теплопроводности в теле с тонким включением с отличающимися теплофизическими параметрами. Модель учитывает малую толщину включения путем, который позволяет сократить вычислительные затраты, которые возникают на этапе применения известных численных методов. Система уравнений модели имеет различную размерность по пространственным переменным: если размерность уравнений в теле — n , то размерность уравнений во включении — $n - 1$. В математической постановке толщина тонкого включения устремлена к нулю. Она присутствует в коэффициентах уравнений сниженной размерности. Ненасквозность включения приводит к необходимости формулировать граничные условия сопряжения на его торцевом крае, которые связывают между собой соотношения разной размерности по пространственным переменным. В работе представлен подход к формулированию граничных условий на торце включения, а также приведены результаты конечно-элементного анализа на основании рассмотренной проблемы.

Отримано 02.04.07