

Експоненціальна дискретизація задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь

Юрій Сінчук¹, Георгій Шинкаренко²

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, email: yugacpp@gambler.ru

² д. ф.-м. н., професор, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000; Політехніка опольська, вул. Любошицька, 5, Ополь, 45043, Польща, email: h.shynkarenko@po.opole.pl

Використовуючи однокрокову рекурентну схему з експоненціальними ваговими функціями побудовано чисельну апроксимацію для задачі Коші. Показано здатність такої схеми точно відтворювати вузлові значення шуканого розв'язку. Проведено аналіз відносно стійкості та збіжності, а також порівняно властивості запропонованої схеми з методом Кранка-Ніколсона. Подано числові результати розрахунку для сингулярно збуреної задачі Коші із застосуванням експоненціальної схеми.

Ключові слова: задача Коші, однокрокові рекурентні схеми, метод Петрова-Гальоркіна.

Вступ. Поряд з успіхами в розв'язуванні крайових задач для еліптичних рівнянь значно скромніші здобутки у розвитку схем для початково-крайових задач із рівняннями параболічного чи гіперболічного типів [1]. Конструювання схем інтегрування еволюційних задач є досить складною проблемою, оскільки напівдискретизовані рівняння, як правило, належать до класу жорстких систем звичайних диференціальних рівнянь. Питання стійкості в них набувають першочергової ваги. Докладний аналіз питань стійкості та збіжності експоненціальних схем дискретизації звичайних диференціальних рівнянь викладено в роботі [2]. З останніми здобутками в цьому напрямку можна ознайомитися в працях [3-6].

Беручи цитовані праці за основу, ми пропонуємо тут однокрокові рекурентні схеми інтегрування задач Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку. Схеми будуємо з допомогою процедури Петрова-Гальоркіна із застосуванням експоненціальних наближень.

1. Інтегрування задачі Коші

Для наочності викладу обмежимося задачею Коші для звичайного диференціального рівняння. Задача полягає у відшуванні функції $u = u(t)$ такої, що

$$\begin{aligned} u'(t) + \sigma u(t) &= f(t) \quad \forall t \in (0, T], \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{1}$$

де $f(t)$ — відома функція, а $\sigma = \text{const} > 0$.

Ми вибираємо рівняння задачі Коші дуже простим для того, щоб не загромувати (другорядними) деталями основні положення пропонованого нами способу її числового інтегрування. Нижче також будуть розглянуті деякі випадки рівнянь ускладненої структури.

Вважаємо дані задачі Коші такими, що гарантують існування її розв'язку $u = u(t)$.

Поділимо відрізок $[0, T]$ на частини $K_{m+1/2} = (t_m,)$, довжини $\Delta t_{m+1/2} = t_{m+1} - t_m > 0$, $m = \overline{0, N}$. Тут і далі дробовим індексом ми відзначатимемо номер інтервалу та певні його характеристики, скажімо, $t_{m+1/2} = (t_{m+1} + t_m)/2$ — це центр ваги інтервалу $K_{m+1/2}$. Подібним чином, $g_{m+1/2} \equiv \{g(t)\}_{m+1/2} = g(t_{m+1/2})$. Для спрощення записів ми приймаємо, що $\Delta t_{m+1/2} \equiv \Delta t = \text{const} > 0$.

Домножимо праву та ліву частини рівняння задачі (1) на тестову функцію $v(t) = e^{\sigma(t-t_m)}$ і проінтегруємо результат на проміжку (t_m, t_{m+1}) . Застосувавши тотожність

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} e^{\sigma t} [u'(t) + \sigma u(t)] dt = \int_{t_m}^{t_{m+1}} [e^{\sigma t} u(t)]' dt = e^{\sigma t_{m+1}} u(t_{m+1}) - e^{\sigma t_m} u(t_m), \quad (2)$$

отримаємо формулу послідовного визначення вузлових значень розв'язку задачі Коші

$$u(t_{m+1}) = e^{-\sigma \Delta t} \left[u(t_m) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} e^{\sigma(t-t_m)} f(t) dt \right], \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (3)$$

Нарешті, після введення позначення

$$\lambda = \sigma \Delta t \quad (4)$$

та заміни змінної $t = t(\tau) = t_m + \Delta t \tau \quad \forall \tau \in [0, 1]$ під знаком інтеграла надамо щойно одержаному рівнянню (3) зручного для обчислень вигляду

$$u(t_{m+1}) = e^{-\lambda} \left\{ u(t_m) + \Delta t \int_0^1 e^{\lambda \tau} f(t_m + \Delta t \tau) d\tau \right\}, \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (5)$$

Зауважимо, що проведені тут викладки є справедливими і для загальнішого випадку, коли коефіцієнт σ є функцією з простору $L^1(0, T)$. Справді, якщо за тестову функцію взяти

$$v(t) = \exp \left\{ \int_{t_m}^t \sigma(\tau) d\tau \right\}, \quad \forall t \in (t_m, t_{m+1}),$$

то замість рівняння (3) одержимо

$$u(t_{m+1}) = e^{-\lambda(t_{m+1})} \left\{ u(t_m) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} e^{\lambda(t)} f(t) dt \right\}, \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (6)$$

Тут функція $\lambda = \lambda(t)$ має таку кусково-визначену структуру

$$\lambda(t) = \int_{t_m}^t \sigma(\tau) d\tau, \quad \forall t \in (t_m, t_{m+1}), \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (7)$$

Отже, одержані нами проекційні рівняння (3) та (6) надають нам принципову можливість рекурентного покрокового обчислення точних значень розв'язку задачі Коші у вузлах вибраної сітки, за умови, що ми можемо точно обчислити інтеграли в їхніх правих частинах. Підсумуємо результати у вигляді такого твердження.

Лема 1. Розглянемо задачу Коші (1), в диференціальному рівнянні якої явно визначено структуру його молодшого члена з множником $\sigma = \sigma(t)$. Тоді, якщо $\sigma \in L^1(0, T)$ то на кожному поділі $\mathcal{T}_{\Delta t} = \{t_m\}_{m=0}^N, t_{m+1} > t_m$, можна побудувати проекційні рівняння (6) для послідовного визначення вузлових значень шуканого розв'язку, де $\lambda(t)$ має вигляд (7).

2. Попередній аналіз однокрокових рекурентних схем

Лема 1 дозволяє побудувати однокрокові рекурентні схеми числового інтегрування задач Коші такого гатунку: на заданому поділі $\mathcal{T}_{\Delta t} = \{t_m\}_{m=0}^N, t_{m+1} > t_m$, відомі апроксимації $f_{\Delta t}(t)$, $\sigma_{\Delta t}(t)$ для функцій $f(t)$ та $\sigma(t)$. Задача полягає у відшуканні функції $u_{\Delta t}(t)$, вузлові значення якої задовольняють рівняння

$$u_{\Delta t}(t_{m+1}) = \exp\{-\lambda_{\Delta t}(t_{m+1})\} \left[u_{\Delta t}(t_m) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} \exp\{\lambda_{\Delta t}(t)\} f_{\Delta t}(t) dt \right],$$

$$\lambda_{\Delta t}(t) = \int_{t_m}^t \sigma_{\Delta t}(\tau) d\tau, \quad \forall t \in (t_m, t_{m+1}), \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (8)$$

Щойно окреслений клас однокрокових рекурентних схем будемо називати *експоненціальними ОРС*, підкреслюючи цим їхню визначальну характеристику. Розглянемо простий приклад, коли $\sigma = const$.

Нехай функція $f(t) \equiv 0$. Тоді на основі отримаємо, що

$$u_{\Delta t}(t_{m+1}) = e^{-\sigma \Delta t} u_{\Delta t}(t_m) = e^{-\sigma \Delta t} \left[e^{-\sigma \Delta t} u_{\Delta t}(t_{m-1}) \right] = \dots =$$

$$= e^{-\sigma(m+1)\Delta t} u_{\Delta t}(t_0) = u_0 e^{-\sigma t_{m+1}}, \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (9)$$

Проекційні рівняння (3) та (6) були побудовані шляхом виділення повного диференціала вихідного диференціального рівняння. У цьому випадку, як і слід було очікувати, значення точного розв'язку задачі Коші співпадають із розв'язком експоненціальної ОРС у вузлах вибраного нами поділу, $u(t_m) = u_{\Delta t}(t_m)$.

Водночас для відшукування розв'язку розглядуваної модельної задачі Коші використаємо класичну ОРС Кранка-Ніколсона [7], згідно якої на заданому поділі $\mathcal{T}_{\Delta t} = \{t_m\}_{m=0}^N$, $t_{m+1} > t_m$, будемо шукати кусково-лінійну функцію $u_{\Delta t}(t)$ таку, що її вузлові значення $u_m = u_{\Delta t}(t_m)$ задовольняють рівняння

$$\frac{u_{m+1} - u_m}{\Delta t} + \sigma \frac{u_{m+1} + u_m}{2} = 0, \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (10)$$

Звідси маємо

$$u_{m+1} = u_0 \left(1 - \frac{2\sigma\Delta t}{2 + \sigma\Delta t} \right)^{m+1}, \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (11)$$

Легко переконатися, що

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} u_{m+1} = u_0 \exp(-\sigma t_{m+1}), \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (12)$$

Хоча схема Кранка-Ніколсона дає точні результати лише у граничному випадку, можна довести, що її похибка характеризується оцінкою

$$|u(t_m) - u_m| \leq \frac{T}{64\sigma} \|u\|_{C^3(0,T)} \Delta t^2, \quad m = \overline{0, N-1}, \quad (13)$$

яка, зокрема, показує, що дана схема досягає оптимальної швидкості збіжності.

3. ОРС із кусково постійною апроксимацією правої частини

Найпростіший із можливих випадків апроксимації правої частини у рівнянні задачі Коші (1) одержимо на основі кусково-постійних розвинень Тейлора

$$f(t) = f(t_{m+1/2}) + \mathcal{O}(\Delta t), \quad \forall t \in [t_m, t_{m+1}], \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (14)$$

Нехтуючи величинами порядку $\mathcal{O}(\Delta t)$ у розвиненні функції $f = f(t)$ в проєкційному рівнянні (3), обчислюємо інтеграл таким чином

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} e^{\sigma(t-t_{m+1})} f(t) dt \cong f(t_{m+1/2}) \int_{t_m}^{t_{m+1}} e^{\sigma(t-t_{m+1})} dt = \frac{1 - e^{-\sigma\Delta t}}{\sigma} f(t_{m+1/2}). \quad (15)$$

У такий спосіб знайдемо експоненціальну ОРС інтегрування задачі Коші на вибраній системі вузлів, яка полягає у тому, що при заданій функції $u_0 \in \mathbb{R}$, знайти $u_{m+1} \in \mathbb{R}$ таке, що

$$u_{m+1} = e^{-\sigma\Delta t} u_m + \frac{1 - e^{-\sigma\Delta t}}{\sigma} f(t_{m+1/2}), \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (16)$$

У результаті необхідних обчислень за щойно окресленою явною ОРС виконуються такі співвідношення: $u_{m+1} \cong u(t_{m+1})$, $m = \overline{0, N-1}$.

Дослідимо основні властивості схеми (16).

3.1. Порівняння з відомими ОРС інтегрування задач Коші. Додамо та віднімемо u_m у лівій частині рівняння схеми (16) і після незначних перетворень подамо його у вигляді різницевої схеми

$$\frac{\sigma \Delta t}{2} \left[\frac{1+e^{-\sigma \Delta t}}{1-e^{-\sigma \Delta t}} \right] \dot{u}_{m+1/2} + \sigma u_{m+1/2} = f(t_{m+1/2}), \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (17)$$

Тут і далі ми вживаємо позначення

$$u_{m+1/2} = \frac{1}{2}(u_{m+1} + u_m), \quad \dot{u}_{m+1/2} = \frac{u_{m+1} - u_m}{\Delta t}, \quad \rho(\sigma \Delta t) = \frac{\sigma \Delta t}{2} \left[\frac{1+e^{-\sigma \Delta t}}{1-e^{-\sigma \Delta t}} \right]. \quad (18)$$

Враховуючи розвинення для експоненти в степеневий ряд

$$e^{-\sigma \Delta t} = 1 + (-\sigma \Delta t) + \frac{(-\sigma \Delta t)^2}{2!} + \frac{(-\sigma \Delta t)^3}{3!} + \dots, \quad (19)$$

для множника біля $\dot{u}_{m+1/2}$ отримаємо

$$\rho(\sigma \Delta t) = \frac{1 - \frac{1}{2}\sigma \Delta t + \frac{1}{4}(\sigma \Delta t)^2 - \frac{1}{12}(\sigma \Delta t)^3 + \dots}{1 - \frac{1}{2}\sigma \Delta t + \frac{1}{6}(\sigma \Delta t)^2 - \frac{1}{24}(\sigma \Delta t)^3 + \dots}. \quad (20)$$

Аналіз співвідношення свідчить, що $\rho \sigma \Delta t \rightarrow 1$, якщо $\Delta t \rightarrow 0$. Зауважимо, що за умови $\sigma \rightarrow 0$ побудоване нами рівняння (17) набуде вигляду добре відомої покращеної схеми Ейлера [8]

$$\dot{u}_{m+1/2} = f(t_{m+1/2}), \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (21)$$

3.2. Стійкість ОРС. Для відшукування достатніх умов стійкості домножимо рівняння (17) на $u_{m+1/2}$ та після нескладних алгебричних перетворень надамо йому вигляду

$$\rho \frac{1}{2\Delta t} [u_{m+1}^2 - u_m^2] + \sigma u_{m+1/2}^2 = f(t_{m+1/2})u_{m+1/2}, \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (22)$$

З огляду на оцінку

$$f(t_{m+1/2})u_{m+1/2} \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma} f^2(t_{m+1/2}) + \sigma u_{m+1/2}^2 \right] \quad (23)$$

перейдемо від цих рівнянь до нерівностей вигляду

$$\rho \left[u_{m+1}^2 - u_m^2 \right] + \sigma \Delta t u_{m+1/2}^2 \leq \frac{\Delta t}{\sigma} f^2(t_{m+1/2}), \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (24)$$

Додавши перші $n + 1$ рівнянь, знаходимо бажану оцінку

$$\rho u_{n+1}^2 + \sum_{m=0}^n \sigma u_{m+1/2}^2 \Delta t \leq \rho u_0^2 + \sum_{m=0}^n \frac{1}{\sigma} f^2(t_{m+1/2}) \Delta t, \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (25)$$

яка показує, що виконання умови

$$\rho = \rho(\sigma \Delta t) = \frac{\sigma \Delta t}{2} \left[\frac{1 + e^{-\sigma \Delta t}}{1 - e^{-\sigma \Delta t}} \right] \geq 0 \quad (26)$$

забезпечує стійкість однокрокової рекурентної схеми. Оскільки ми приймали, що $\sigma > 0$, то умова (26) виконується незалежно від вибору величини кроку інтегрування, чим засвідчує безумовну стійкість розглядуваного способу інтегрування задачі Коші.

Запишемо також формули для верхніх меж біжучих вузлових та інтегральної характеристик знайденої апроксимації

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| &\leq \left\{ u_0^2 + \frac{1}{\rho} \sum_{m=0}^n \frac{1}{\sigma} f^2(t_{m+1/2}) \Delta t \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad n = \overline{0, N-1}; \\ \|u_{\Delta t}\|_0 &= \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} \sigma u_{m+1/2}^2 \Delta t \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \rho u_0^2 + \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma} f^2(t_{m+1/2}) \Delta t \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (27)$$

3.3. Априорні оцінки збіжності. Оцінимо похибку апроксимації

$$e_m = u_m - u(t_m), \quad m = \overline{0, N-1}. \quad (28)$$

Віднімаючи в обох частинах рівняння належним чином вибрані лінійні комбінації значень точного розв'язку $u(t_m)$ та $u(t_{m+1})$, надамо цьому рівнянню вигляду

$$\rho \dot{e}_{m+1/2} + \sigma e_{m+1/2} = R_{m+1/2}, \quad m = \overline{0, N-1}, \quad (29)$$

де

$$R_{m+1/2} = f(t_{m+1/2}) - \rho \frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\Delta t} - \sigma \frac{u(t_{m+1}) + u(t_m)}{2}. \quad (30)$$

Приймаємо також, що для $u(t_{m+1})$ та $u(t_m)$ можна записати такі розвинення

$$\begin{aligned} u(t_{m+1}) &= \left\{ u + \frac{1}{1!} \left(\frac{\Delta t}{2} \right) u' + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 u'' + \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3 u''' + \dots \right\}_{m+1/2}, \\ u(t_m) &= \left\{ u - \frac{1}{1!} \left(\frac{\Delta t}{2} \right) u' + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 u'' - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3 u''' + \dots \right\}_{m+1/2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Звідси безпосередньо обчислюємо, що

$$\frac{u(t_{m+1})-u(t_m)}{\Delta t} = \left\{ u' + \frac{1}{3} \frac{\Delta t^2}{8} u''' + \mathcal{O}[(\Delta t)^4] \right\}_{m+1/2},$$

$$\frac{u(t_{m+1})+u(t_m)}{2} = \left\{ u + \frac{1}{2} \frac{\Delta t^2}{4} u'' + \mathcal{O}[(\Delta t)^4] \right\}_{m+1/2}. \quad (32)$$

З виразів (32) та (30) одержимо

$$R_{m+1/2} = \{f - \rho u' - \sigma u\}_{m+1/2} +$$

$$+(1-\rho)u'(t_{m+1/2}) - \frac{\Delta t^2}{8} \left\{ \frac{1}{2} \rho u''' + \frac{1}{2} \sigma u'' \right\}_{m+1/2} + \mathcal{O}[(\Delta t)^4]. \quad (33)$$

Враховуючи рівняння задачі Коші та порядки малості його доданків, співвідношення (33) набуде вигляду

$$R_{m+1/2} \cong (1-\rho)u'(t_{m+1/2}) - \frac{\Delta t^2}{8} \left\{ \frac{1}{2} \rho u''' + \frac{1}{2} \sigma u'' \right\}_{m+1/2} + \mathcal{O}[(\Delta t)^4]. \quad (34)$$

З огляду на подання (20), маємо

$$1-\rho = 1 - \frac{\sigma \Delta t}{2} \left[\frac{1+e^{-\sigma \Delta t}}{1-e^{-\sigma \Delta t}} \right] = -\frac{1}{12} (\sigma \Delta t)^2 \frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2} + \dots}{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2} + \dots} = \mathcal{O}[(\sigma \Delta t)^2]. \quad (35)$$

Тепер, щоб одержати остаточні оцінки для похибки апроксимації, в рівнянні (25) достатньо замінити символи u і f на e і R відповідно.

Теорема. На поділі $\mathcal{T}_{\Delta t} = \{t_m\}_{m=0}^N$, $t_0 = 0$, $t_n = T$, $\Delta t = (t_{m+1} - t_m) > 0$, експоненціальна однокрокова рекурентна схема (16) для задачі Коші (1) є:

- безумовно (від вибору величини Δt) стійкою в нормах (27);
- такою, що послідовність апроксимацій $u_{\Delta t} = \{u_m\}_{m=0}^N$ збігається до точних вузлових значень $\{u(t_m)\}_{m=0}^N$, до того ж, якщо $f \in C^3(0, T)$, то швидкість її збіжності характеризується оцінкою

$$\rho e_{n+1}^2 + \sum_{m=0}^n \sigma e_{m+1/2}^2 \Delta t \leq \mathcal{N} \|u\|_{C^3(0,T)}^2 \sigma^2 \Delta t^4, \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (36)$$

де $\mathcal{N} = \text{const} > 0$.

4. Аналіз апроксимацій розв'язків модельних задач

Наведемо деякі результати обчислювального експерименту, мета якого полягає в підтвердженні передбаченого теорією характеру збіжності наближених розв'язків

схеми ОРС і порівнянні апроксимації за побудованою схемою з апроксимаціями, знайденими за методом Кранка-Ніколсона.

Показниками якості обчислених апроксимацій $u_{\Delta t}(t)$ є такі характеристики:

- середнє значення похибки апроксимації у вузлах сітки

$$E_{\Delta t} = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^N [u(t_m) - u_{\Delta t}(t_m)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}};$$

- значення середньоквадратичної норми похибки

$$\|e_{\Delta t}\|_0 = \left\{ \int_0^T [u(t) - u_{\Delta t}(t)]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}};$$

- середнє значення лишку диференціального рівняння на знайденій апроксимації у центрах ваг елементів сітки

$$r_{\Delta t} = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left\{ u'_{\Delta t}(t_{m+1/2}) + \sigma u_{\Delta t}(t_{m+1/2}) - f[t_{m+1/2}, u_{\Delta t}(t_{m+1/2})] \right\}^2 \right\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

- значення середньоквадратичної норми лишку диференціального рівняння

$$R_{\Delta t} = \left\{ \int_0^T [u'_{\Delta t}(t) + \sigma u_{\Delta t}(t) - f(t, u_{\Delta t}(t))]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Вхідні дані модельної задачі було обрано такими: $u_0 = 200$, $\sigma = 70$, $T = 0,55$,

$$f(t) = e^{20t} + 1 + 170t - 28t^2 - 112t^3.$$

Результати виконаних обчислень містять табл. 1 та 2 і рис. 1 та 2, на яких порівняно графіки знайдених апроксимацій $u_{\Delta t}(t)$ (суцільна лінія) на грубих поділах проміжку інтегрування та точних розв'язків (пунктирна лінія).

Основна властивість експоненціальної схеми — відсутність осциляції апроксимацій на перших кроках обчислень. Не зважаючи на сингулярну збуреність розглядуваної задачі Коші, її розв'язок, отриманий на основі запропонованої схеми, у вузлових точках співпадає з точним розв'язком. Похибка наближення у вузлових значеннях експоненціальної ОРС у найгіршому випадку на порядок менша від похибки схеми Кранка-Ніколсона. Як свідчать табличні дані, обидві схеми за цим показником мають другий порядок збіжності відносно величини кроку інтегрування. Отже, у випадку швидкоплинних реакцій апроксимації експоненціальної схеми мають помітні переваги над класичними щодо точності вузлових значень і якості наближень.

Висновки. Запропоновано ОРС для задач Коші, побудовану з допомогою процедури Петрова-Гальоркіна з експоненціальними ваговими функціями. З використанням експоненціальної функції вихідну задачу Коші зведено до проекційної задачі

Таблиця 1

Оцінки похибок експоненціальної апроксимації

N	$E_{\Delta t}$	$\ e_{\Delta t}\ _0$	$r_{\Delta t}$	$R_{\Delta t}$
5	66,8786	32,9703	3029,73	3045,54
10	12,9579	14,5031	1370,63	1500,00
20	2,4438	5,0412	469,70	744,98
40	0,5192	1,4268	132,02	370,08
80	0,1201	0,3697	34,14	184,56

Таблиця 2

Оцінки похибок апроксимації
за схемою Кранка-Ніколсона

N	$E_{\Delta t}$	$\ e_{\Delta t}\ _0$	$r_{\Delta t}$	$R_{\Delta t}$
5	66,1285	55,9947	5995,23	4272,88
10	22,8150	18,1812	1796,71	1723,74
20	5,8334	5,2094	473,75	773,50
40	1,3449	1,3666	120,10	373,45
80	0,3214	0,3463	30,13	184,97

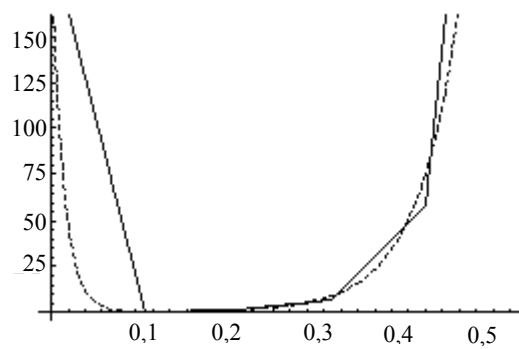


Рис. 1. Апроксимація розв'язку на основі експоненціальної ОРК

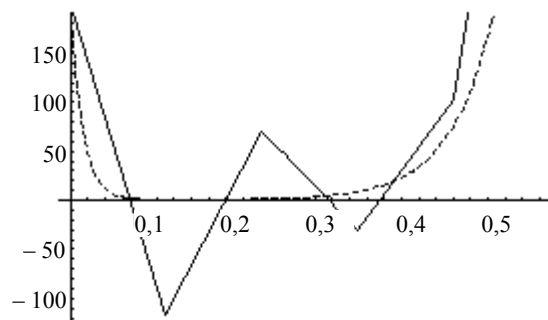


Рис. 2. Апроксимація розв'язку на основі методу Кранка-Ніколсона

та побудовано експоненціальну ОРС. Отримана схема з високою точністю відтворює вузлові значення розв'язку задачі. Проаналізовано стійкість і встановлено порядок збіжності схеми. Наведено числові результати, які підтверджують стійкість запропонованих ОРС для апроксимації розв'язків задач Коші.

Література

- [1] Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. — К.: НМК ВО, 1991. — 88 с.
- [2] Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. — М.: Мир, 1983. — 200 с.
- [3] Calvo M., Palencia C. A class of explicit multistep exponential integrators for semilinear problems // Numer. Math. — 2006. — Issue 102. — P. 367-381.
- [4] Cox S. M., Matthews P. C. Exponential time differencing for stiff systems // J. Comput. Phys. — 2002. — Issue 176(2). — P. 430-455.
- [5] Hochbruck M., Lubich C., Selhofer H. Exponential integrators for large systems of differential equations // SIAM J. Sci. Comput. — 1998. — Issue 19(5). — P. 1552-1574.
- [6] Nie Q., Zhang Y.-T., Zhao R. Efficient semi-implicit schemes for stiff systems // J. Comput. Phys. — 2006. — Issue 214. — P. 521-537.
- [7] Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics. — Springer, 2000. — 655 p.
- [8] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 535 с.

Exponential discretization of the Cauchy problem for ordinary differential equations

Yuriy Sinchuk, Georgiy Shynkarenko

Numerical approximation of the Cauchy problem has been suggested on the basis of one-step recurrent integration scheme with exponential weighting functions. Its ability to reproduce exact nodal values of the solution has been demonstrated. The analysis of consistency and convergence of the scheme are considered. Properties of proposed scheme has been compared with one based on Crank-Nicolson method. The numerical solution of singularly perturbed problem found by the scheme has been presented.

Экспоненциальная дискретизация задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Юрий Сінчук, Георгій Шинкаренко

Используя одношаговую рекуррентную схему с экспоненциальными весовыми функциями построено числовую аппроксимацию для задачи Коши. Показано возможность такой схемы точно воспроизводить узловые значения искомого решения. Проведен анализ относительно устойчивости и сходимости, а также сравнение свойств предложенной схемы с методом Кранка-Николсона. Представлены числовые результаты расчета для сингулярно возмущенной задачи Коши с применением экспоненциальной схемы.

Отримано 15.11.07