

Напружено-деформований стан пружного тіла з тонким включенням

Людмила Винницька¹, Ярема Савула²

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: lyuda_vyn@yahoo.com

² д. ф.-м. н., професор, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: savula@franko.lviv.ua

Досліджується напружено-деформований стан пружного тіла з тонким включенням. Для опису поведінки масивної частини тіла використано класичну теорію пружності, а тонкого включення — безмоментну теорію оболонок. З умов ідеального контакту на межі матриці та прошарку записано відповідні умови спряження. Доведено додатність оператора отриманої крайової задачі. Числовий аналіз здійснено методом скінченних елементів. Проведено порівняння переміщень та інтенсивності напружень, які виникають за відсутності її у разі наявності включення різної товщини.

Ключові слова: різномасштабна крайова задача, класична теорія пружності, безмоментна теорія оболонок, метод скінченних елементів.

Вступ. Сучасні конструкції елементів машин і споруд дуже часто містять тонкі включення — прошарки малої товщини. Наявність таких включень має істотний вплив на розподіл переміщень, деформацій і напружень. Тонкі включення є також важливими компонентами композитних матеріалів, які мають кращі механічні характеристики, ніж вихідні матеріали матриці та включення. У цьому випадку тонкими включеннями бувають нанорозмірні прошарки.

Сучасний стан проблеми, яка стосується механіки взаємодії пружних тіл із тонкими включеннями, досить вичерпно описано у монографії [1]. У ній автор звертає увагу на той факт, що для дослідження напружено-деформованого стану тіл із тонкими включеннями рідко застосовують числові методи, зокрема, метод скінченних елементів. Цю прогалину можна пояснити тим, що мала товщина включення створює значні труднощі для застосування числових методів. Із метою подолання цих проблем у роботах [2-5] запропонований підхід, який базується на використанні моделей пониженої вимірності для дослідження процесів деформування тонких включень. У рамках такого підходу вважають, що товщиною неоднорідності можна знехтувати та таким чином отримують математичні моделі, в яких напружено-деформований стан включення описується рівняннями теорії пластин і оболонок.

Відзначимо, що математичні моделі деформування нанорозмірних включень будують на основі дискретних моделей молекулярної динаміки. Проте при дослідженні композитів дуже часто застосовують також підхід, який ґрунтується

на використанні співвідношень механіки суцільного середовища. Зокрема, у праці [6], яка присвячена дослідженню напружено-деформованого стану композиту з карбоновими нанотрубками, автори зазначають, що саму нанотрубку можна розглядати як оболонку з приведеними характеристиками.

Підходи, які описані вище, усувають проблеми, пов'язані з явищем «малої товщини» включення, а це дає змогу застосовувати метод скінченних елементів до аналізу механіки взаємодії пружних тіл із тонкими включеннями.

1. Формулювання задачі

Вважаємо, що криволінійне включення можна описати безмоментною теорією оболонок. Для дослідження напружено-деформованого стану матриці використаємо класичну теорію пружності. Приймаємо також, що на межі масивної частини та включення виконуються умови ідеального механічного контакту.

1.1. Різномасштабна крайова задача. Розглянемо двовимірне тіло, обмежене областю Ω , яка складається з трьох однозв'язних підобластей: $\Omega = \Omega_1^{(1)} \cup \Omega_1^{(2)} \cup \Omega_2^*$, що не перетинаються між собою (див. рис. 1). Віднесемо $\Omega_1 = \Omega_1^{(1)} \cup \Omega_1^{(2)}$ до декартової системи координат x_1, x_2 . Нехай $\vec{n} = (n_1, n_2)$, $\vec{t} = (t_1, t_2)$ — одиничні вектори нормалі та дотичної на границі Γ_1 підобласті Ω_1 .

У кожній точці серединної кривої S підобласті Ω_2^* визначимо \vec{e}_1 — одиничний вектор дотичної й \vec{e}_2 — одиничний вектор нормалі, напрямлений у сторону випуклості серединної кривої. Підобласть Ω_2^* віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат ξ_1, ξ_2 таким чином, що ξ_1 співпадає з напрямком \vec{e}_1 , ξ_2 — з напрямком \vec{e}_2 , а \vec{e}_1, \vec{e}_2 утворюють ортогональний базис. Серединну криву S задамо радіус-вектором $\vec{r}_m(\xi_1)$. Нехай h — товщина підобласті Ω_2^* . Тоді радіус-вектор $\vec{r}(\xi_1, \xi_2)$ довільної точки з Ω_2^* можна подати у вигляді

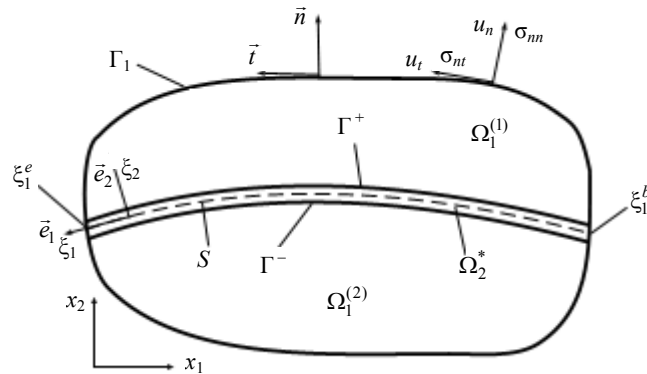


Рис. 1. Геометрія досліджуваного об'єкту

$$\vec{r}(\xi_1, \xi_2) = \vec{r}_m(\xi_1) + \xi_2 \vec{e}_2(\xi_1), \quad \xi_1 \in [\xi_1^b, \xi_1^e], \quad \xi_2 \in [-h/2, h/2].$$

Напружено-деформований стан пружного тіла, що займає область Ω_1 , опишемо рівняннями [7]

$$-\sum_{k=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = f_i, \quad i = 1, 2, \quad x_1, x_2 \in \Omega_1. \quad (1)$$

Тут σ_{ik} — компоненти тензора напружень, f_i — компоненти вектора масових сил масивної частини тіла.

Згідно закону Гука компоненти тензорів напружень σ_{ik} та деформацій e_{ik} пов'язані співвідношеннями

$$\sigma_{ik} = 2\mu e_{ik} + \lambda(e_{11} + e_{22})\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \quad (2)$$

де $\mu = E_1/2(1 + \nu_1)$, $\lambda = E_1\nu_1/(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)$ — коефіцієнти Ляме, E_1 — модуль Юнга, ν_1 — коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці, δ_{ik} — символ Кронекера.

Компоненти тензора деформації e_{ik} визначаються формулами

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad i, k = 1, 2, \quad (3)$$

де $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$ — компоненти вектора переміщень точок області Ω_1 .

Вважаємо, що товщина h включення, яке займає область Ω_2^* , є настільки малою, що його напружено-деформований стан можна описати рівняннями безмоментної теорії оболонок [8]

$$\begin{aligned} -\frac{1}{A_1} \frac{dT_{11}}{d\xi_1} &= F_1, \quad \xi_1 \in S, \\ k_1 T_{11} &= F_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $T_{11}(\xi_1)$ — зусилля в оболонці, $A_1(\xi_1)$ — коефіцієнт Ляме включення, $k_1(\xi_1)$ — кривизна. Відомо, що

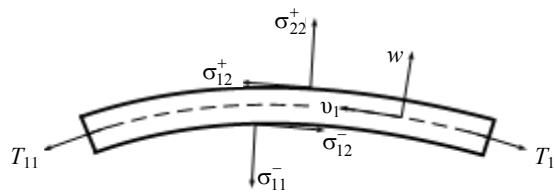


Рис. 2. Фрагмент області Ω_2^*

$$T_{11} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_2^2} \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{d v_1}{d \xi_1} + k_1 w, \quad (5)$$

$$F_1 = \left(1 + k_1 \frac{h}{2}\right) \sigma_{12}^+ - \left(1 - k_1 \frac{h}{2}\right) \sigma_{12}^- + \int_{-h/2}^{h/2} (1 + k_1 \xi_2) p_1 d \xi_2, \quad (6)$$

$$F_2 = \left(1 + k_1 \frac{h}{2}\right) \sigma_{22}^+ - \left(1 - k_1 \frac{h}{2}\right) \sigma_{22}^- + \int_{-h/2}^{h/2} (1 + k_1 \xi_2) p_2 d \xi_2, \quad (7)$$

де E_2 — модуль Юнга, а ν_2 — коефіцієнт Пуассона матеріалу включення; $v_1(\xi_1)$, $w(\xi_1)$ — компоненти вектора переміщення точок серединної кривої S ; $\sigma_{12}^+, \sigma_{22}^+$ — компоненти поверхневого навантаження на зовнішній лицевій поверхні оболонки $\xi_2 = h/2$; $\sigma_{12}^-, \sigma_{22}^-$ — компоненти поверхневого навантаження на внутрішній лицевій поверхні оболонки $\xi_2 = -h/2$ (див. рис. 2); p_1, p_2 — компоненти вектора масових сил включення.

Доповнимо рівняння (1), (4) граничними умовами

$$u_n = 0, \quad u_t = 0, \quad (x_1, x_2) \in \partial \Omega \setminus \partial \Omega_2^*, \quad (8)$$

$$v_1(\xi_1^b) = v_1(\xi_1^e) = 0. \quad (9)$$

На спільних границях областей Ω_1 та Ω_2^* задамо умови спряження

$$u_n = -w, \quad u_t = -v_1 \text{ на } \Gamma^+, \quad u_n = w, \quad u_t = v_1 \text{ на } \Gamma^-, \quad (10)$$

$$\sigma_{mn} = \sigma_{22}^+, \quad \sigma_{nt} = \sigma_{12}^+ \text{ на } \Gamma^+, \quad \sigma_{mn} = \sigma_{22}^-, \quad \sigma_{nt} = \sigma_{12}^- \text{ на } \Gamma^-. \quad (11)$$

У співвідношеннях (8)-(11) використано позначення

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 n_1 + u_2 n_2, \quad u_t = -u_1 n_2 + u_2 n_1, \\ \sigma_{mn} &= \sigma_{11} n_1^2 + 2\sigma_{12} n_1 n_2 + \sigma_{22} n_2^2, \\ \sigma_{nt} &= \sigma_{11} n_1 t_1 + \sigma_{12} (n_1 t_2 + n_2 t_1) + \sigma_{22} n_2 t_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Отже, крайову задачу утворюють системи рівнянь (1), (4), граничні умови (8), (9) та умови спряження (10), (11).

1.2. Дослідження крайової задачі. Для дослідження сформульованої крайової задачі домножимо скалярно ліву частину системи (1) на $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$, де \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 — довільні функції, які задовольняють граничні умови (8). Отриманий вираз зінтегруємо за областю Ω_1 . Тоді, з урахуванням формули Остроградського, виразів (12) і граничних умов (8) дістаємо білінійну форму

$$a_1^*(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = \iint_{\Omega_1} (\sigma_{11} \tilde{e}_{11} + \sigma_{22} \tilde{e}_{22} + \sigma_{12} \tilde{e}_{12}) d\Omega_1 - \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} (\sigma_{mn} \tilde{u}_n + \sigma_{nt} \tilde{u}_t) d\Gamma. \quad (13)$$

У рівняннях системи (4) доданки, що містять компоненти поверхневого навантаження, перенесемо в ліву частину. Подібно, як для системи (1), домножимо скалярно ліву частину системи (4) на $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, \tilde{w})$, де \tilde{v}_1, \tilde{w} — довільні функції, які задовольняють граничні умови (9). Отриманий вираз зінтегруємо за серединною кривою S області Ω_2^* . Тоді, враховуючи формули інтегрування частинами та беручи до уваги граничні умови (9), отримаємо таку білінійну форму

$$\begin{aligned} a_2^*(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) &= \int_{\xi_1^b}^{\xi_1^e} T_{11} \tilde{\varepsilon}_{11} A_1 d\xi_1 - \int_{\xi_1^b}^{\xi_1^e} (\sigma_{12}^+ \tilde{v}_1 + \sigma_{22}^+ \tilde{w}) \left(1 + k_1 \frac{h}{2}\right) A_1 d\xi_1 + \\ &+ \int_{\xi_1^b}^{\xi_1^e} (\sigma_{12}^- \tilde{v}_1 + \sigma_{22}^- \tilde{w}) \left(1 - k_1 \frac{h}{2}\right) A_1 d\xi_1 = \\ &= \int_S T_{11} \tilde{\varepsilon}_{11} dS - \int_{\Gamma^+} (\sigma_{12}^+ \tilde{v}_1 + \sigma_{22}^+ \tilde{w}) d\Gamma^+ + \int_{\Gamma^-} (\sigma_{12}^- \tilde{v}_1 + \sigma_{22}^- \tilde{w}) d\Gamma^- . \end{aligned} \quad (14)$$

Вважаємо, що $\tilde{\mathbf{u}}$ та $\tilde{\mathbf{v}}$ задовольняють головні умови спряження (10). Додамо білінійні форми (13), (14). Тоді отримаємо

$$a(\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{U}}) = a_1(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) + a_2(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}), \text{ де } \mathbf{U} = (u_1, u_2, v_1, w),$$

$$a_1(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = \iint_{\Omega_1} (\sigma_{11} \tilde{e}_{11} + \sigma_{22} \tilde{e}_{22} + \sigma_{12} \tilde{e}_{12}) d\Omega_1 ,$$

$$a_2(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) = \int_S T_{11} \tilde{\varepsilon}_{11} dS .$$

Лема. Оператор крайової задачі (1), (4), (8)-(11) — симетричний.

Доведення. Оператор крайової задачі складається з оператора задачі (1), (8), який є симетричним [9, 10], й оператора задачі (4), (9), для дослідження якого розглянемо білінійну форму $a_2(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})$. Вирази для зусилля та деформації запишемо через функції переміщень (5). Тоді отримаємо співвідношення

$$a_2(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) = \frac{E_2 h}{(1 - \nu_2^2)} \int_S \left(\frac{1}{A_1^2} \frac{dv_1}{d\xi_1} \frac{d\tilde{v}_1}{d\xi_1} + \frac{k_1}{A_1} \frac{dv_1}{d\xi_1} \tilde{w} + \frac{k_1}{A_1} \frac{d\tilde{v}_1}{d\xi_1} w + k_1^2 w \tilde{w} \right) dS = a_2(\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{v}).$$

Окрім того, область визначення оператора є щільною множиною в просторі $L_2(S)$, оскільки C_0^∞ належить області визначення оператора та C_0^∞ утворює щільну множину в просторі $L_2(S)$. Лему доведено.

Теорема. Оператор крайової задачі (1), (4), (8)-(11) — додатний.

Доведення. Розглянемо вираз

$$\begin{aligned} a(\mathbf{U}, \mathbf{U}) &= a_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + a_2(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \iint_{\Omega_1} (\sigma_{11} e_{11} + \sigma_{22} e_{22} + \sigma_{12} e_{12}) d\Omega_1 + \\ &+ \frac{E_2 h}{1 - \nu_2^2} \int_S \varepsilon_{11}^2 dS. \end{aligned}$$

Оскільки оператор задачі (1), (8) додатний [9, 10] і $a_2(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ для $0 < \nu_2 < 0,5$, то $a(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{U}$. З додатності цього оператора отримуємо також, що $\mathbf{u} \equiv 0$ на Ω_1 . З огляду на умови спряження (10) і тотожну рівність нулю переміщень в області Ω_1 , отримуємо, що $\nu_1 \equiv 0$, $w \equiv 0$ на S . Теорему доведено.

Зазначимо, що розв'язок задачі, яка описується системою рівнянь (4) та граничними умовами (9), у переміщеннях не є єдиним.

Варіаційне формулювання задачі подамо у вигляді: знайти таку функцію $U \in V$, що задовольняє варіаційне рівняння

$$a(U, \tilde{U}) = \int_{\Omega_1} (f_1 \tilde{u}_1 + f_2 \tilde{u}_2) d\Omega_1 + \int_S \left[\int_{-h/2}^{h/2} (1 + k_1 \xi_2) (p_1 \tilde{\nu}_1 + p_2 \tilde{w}) d\xi_2 \right] dS \quad \forall \tilde{U} \in V,$$

$$V = \{U = (\bar{u}, \bar{\nu}) : \bar{u} = (u_1, u_2), \bar{\nu} = (\nu_1, w), \quad u_1, u_2 \in W_2^{(1)}(\Omega_1),$$

$$\nu_1 \in W_2^{(1)}(S), \quad w \in L_2(S), \quad \text{умови (8)-(10)}\}.$$

2. Числовий аналіз

У даному розділі подамо результати числових експериментів, отримані для тестової задачі. При цьому розглянемо випадок, коли тонке включення є покриттям на частині границі матриці.

Нехай пружне тіло займає область $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2^*$ (див. рис. 3). Підобласть Ω_1 обмежена границями $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, а підобласть Ω_2^* — покриття на Γ_4 . Вважаємо, що тіло закріплене на Γ_2 , на границі Γ_1 діє тиск p , а на Γ_3 задано умови симетрії. Нехай

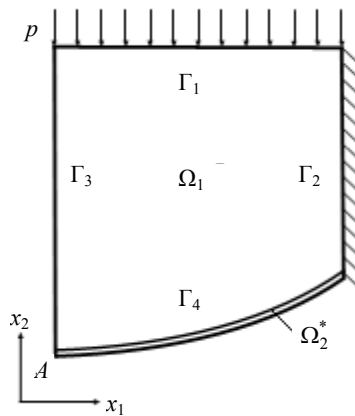


Рис. 3. Геометрична схема тестової задачі

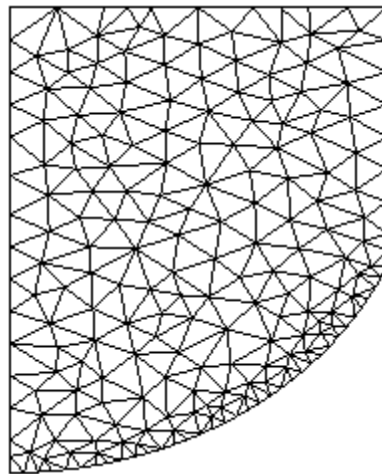


Рис. 4. Поділ на скінченні елементи для тестової задачі

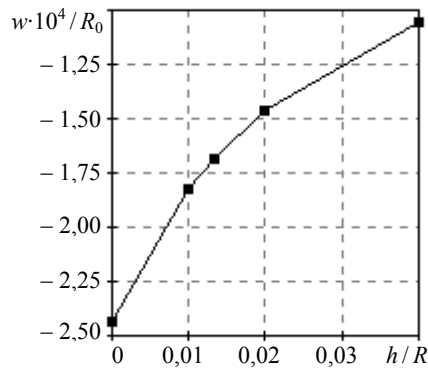


Рис. 5. Залежність переміщення w у точці A від товщини покриття

Γ_4 є сегментом кола радіуса $R/R_0 = 0,65$; $a/R_0 = 0,6$; $b/R_0 = 0,4$, де R_0 — деяка розмірна величина, a — довжина границі Γ_1 , b — довжина границі Γ_2 . Нехай матеріали підобластей Ω_1, Ω_2^* мають такі властивості: $E_1/p = 3000$, $E_2/p = 60000$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. Відтак, граничні умови задачі запишемо у вигляді

$$\sigma_{nn} = -p \text{ на } \Gamma_1, \quad u_n = u_t = 0 \text{ на } \Gamma_2, \quad u_n = \sigma_{nt} = 0 \text{ на } \Gamma_3.$$

Результати числових експериментів отримано при застосуванні схеми методу скінченних елементів третього порядку апроксимації для одновимірної та двовимірної областей. Для реалізації схеми застосовано апроксимаційні функції-бульбашки [11, 12] на поділі, який наведений на рис. 4.

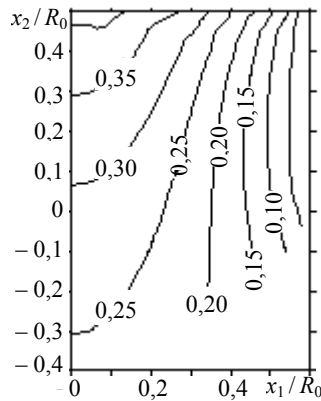


Рис. 6. Ізолінії переміщень u_2 при $h/R = 0$ для тестової задачі

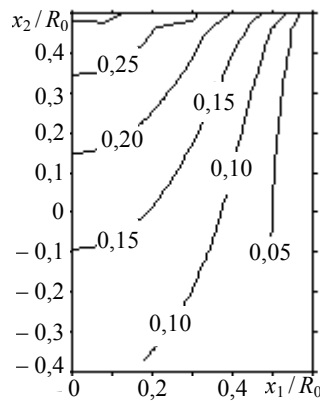


Рис. 7. Ізолінії переміщень u_2 при $h/R = 1/25$

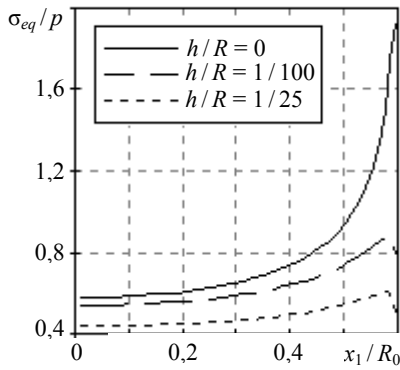


Рис. 8. Інтенсивність напружень на Γ_4

Крива на рис. 5 ілюструє вплив товщини покриття h на переміщення w , у точці A (див. рис. 3), в якій w набуває максимального за абсолютною величиною значення. Точка $h/R = 0$ відповідає випадку відсутності покриття.

Порівняємо розподіли переміщень u_2 , які виникають у тілі за відсутності покриття (див. рис. 6) і для покриття товщини $h/R = 1/25$ (див. рис. 7). Наявність покриття приводить до зменшення переміщень і змінює характер їх розподілу.

У точках границі Γ_4 обчислимо інтенсивність напружень за формулою

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2]},$$

де σ_1, σ_2 — головні напруження.

Як свідчать результати числових експериментів (див. рис. 8), інтенсивність напружень обернено пропорційно залежить від товщини включення.

Висновки. У роботі сформульовано різномасштабну крайову задачу про визначення напружено-деформованого стану тіла, яке складається з масивної частини та тонкого включення. Для опису масивної частини тіла застосовано співвідношення класичної теорії пружності, а для тонкого включення — безмоментної теорії оболонок. Групи рівнянь різної вимірності зв'язані спеціальними умовами спряження.

Здійснено теоретичне дослідження отриманої крайової задачі, яке показує додатність оператора, що забезпечує єдиність розв'язку.

Для числового аналізу задачі використано схеми МСЕ, побудовані на основі 2D й 1D функцій-бульбашок третього порядку апроксимації. Числові результати для тестової задачі свідчать про те, що наявність покриття, виготовленого з міцнішого матеріалу, ніж масивна частина, приводить до зменшення переміщень точок матриці та включення й інтенсивності напружень.

Література

- [1] Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Монографія. — Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. — 716 с.
- [2] Григоренко О., Савула Н. Полівимірна крайова задача гетерогенної математичної моделі контактної взаємодії пружного тіла з тонким включенням // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2006. — Вип. 11. — С. 120-126.

- [3] Савула Я., Винницька Л. Числовий аналіз напружено-деформованого стану порожнистого циліндра з тонким включенням // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2007. — Вип. 6. — С. 54-65.
- [4] Дурак І., Савула Я., Шахин М. Investigation of the Heterogeneous Problems of the Elasticity With Coupled Boundary Finite Elements Schemes // Advances in Applied and Computational Mathematics, Nova Science Publisher. — 2006. — P. 63-79.
- [5] Савула Я., Савула Н., Шчукін В. Finite Element Analysis Based on Heterogeneous Models // Journal of Computational and Applied Mechanics. — 2004. — Vol. 5, № 1. — P. 129-140.
- [6] Liu Y. J., Chen X. L. Continuum Models of Carbon Nanotube-Based Composites Using Boundary Element Method // Electronic Journal of Boundary Elements. — 2005. — Vol. 1, № 2. — P. 316-335.
- [7] Демидов С. П. Теория упругости. — М: Высш. школа, 1979. — 432 с.
- [8] Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. — М: Гос. из-во технико-теоретической литературы, 1953. — 544 с.
- [9] Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. — Гостехиздат, 1952. — 216 с.
- [10] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике: пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 590 с.
- [11] Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. — Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. — 221 с.
- [12] Szabo B., Babushka I. Finite element analysis. — New York: John Wiley & Sons, inc., 1991. — 368 p.

Stress-strain state of elastic body with thin inclusion

Lyudmyla Vynnytska, Yarema Savula

The stress-strain state of an elastic body with a thin inclusion is investigated. The stress-strain state of the matrix is described by the elasticity theory. The inclusion stress-strain state is described by the membrane shell theory. The corresponding junction conditions are written from the conditions of perfect contact on the interlayer and matrix boundary. Operator of such a boundary value problem is positive. Numerical analysis is performed by the finite elements method. Displacements and stress intensities appearing in the presence of the inclusion of different thickness and without it are compared.

Напряженно-деформированное состояние упругого тела с тонким включением

Людмила Винницка, Ярема Савула

Исследуется напряженно-деформированное состояние упругого тела с тонким включением. Для описания напряженно-деформированного состояния массивной части использована классическая теория упругости, а включения — уравнения безмоментной теории оболочек. Для объединения уравнений в одну систему записаны условия сопряжения, следующие из условия идеального механического контакта на общей границе матрицы и включения. Показана положительность оператора сформулированной краевой задачи. Для численного анализа используется метод конечных элементов. Проведено сравнение перемещений и интенсивности напряжений при отсутствии и наличии включения разной толщины.

Отримано 11.02.08