УДК 539.3

Визначальні співвідношення термомеханіки спадкових середовищ із загасаючою пам'яттю за урахування локального зміщення маси

Ольга Грицина

к. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: gryt@cmm.lviv.ua

Сформульовано визначальні рівняння моделі взаємозв'язаної термомеханіки із врахуванням спадкових властивостей деформівних поляризованих середовищ із загасаючою пам'яттю. При цьому поряд із необоротністю процесів деформування, теплопровідності й поляризації враховано також необоротність процесу локального зміщення маси.

Ключові слова: взаємозв'язані електротермомеханічні процеси, локальне зміщення маси, реологічні визначальні співвідношення, спадкове середовище.

Вступ. Процес локального зміщення маси пов'язують із упорядкуванням молекулярної структури тіла. Таке упорядкування може бути спричинене, зокрема, поляризацією тіла чи зміною місця розташування атомів внаслідок виникнення у ньому нових поверхонь. Ідея врахування процесу локального зміщення маси належить професору Бураку Я. Й., у роботах якого було показано, що за врахування такого процесу стан термопружного тіла залежить не лише від температури T та тензора деформації $\hat{e}$, але і від вектора локального зміщення маси $\vec{\Pi}_m$ [1]. Це стало основою побудови низки моделей, так званої, локально-градієнтної термомеханіки деформівних твердих тіл, у яких за використання лагранжевого підходу завдяки згаданому вище розширенню простору параметрів стану враховано приповерхневу та приконтактну неоднорідність [2]. У розвиток цієї ідеї з використанням засад нерівноважної термодинаміки, механіки та електродинаміки суцільного середовища на основі ейлерового підходу запропоновано моделі деформівних термопружних поляризовних одно- та багатокомпонентних тіл, стан яких поряд із загальноприйнятими характеризується двома новими параметрами, а саме, питомою густиною наведеної маси $\rho_m = \rho_{m\pi}/\rho$ ($\rho_{m\pi} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_m$ — густина наведеної маси, ρ — густина маси тіла, $\vec{\nabla}$ — оператор Гамільтона) та питомим вектором локального зміщення маси $\vec{\pi}_m = \vec{\Pi}_m/\rho$ [3, 4].

У працях [5-7] досліджено механотермодифузійні процеси в n-компонентних твердих розчинах та електропровідних в'язких рідинах за урахування необоротності процесів локального зміщення маси та електричного заряду. З цією метою вектори напруженості електричного поля $\vec{E}$ та градієнта μ'_π (де $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$, μ_π — енергетична міра впливу зміщення маси на внутрішню енергію, μ — хімічний потенціал) подано сумами їх оборотних та необоротних складників. Це привело до нелокальних за часом визначальних співвідношень з експоненціальними ядрами релаксації. Однак таке обмеження на ядра релаксації не завжди відповідає характеру протікання необоротних процесів.

Метою цієї роботи є формулювання визначальних рівнянь моделі взаємозв'язаної термомеханіки за врахування процесу локального зміщення маси та спадкових властивостей діелектричних деформівних теплопровідних середовищ із загасаючою пам'яттю.

1. Рівняння балансу енергії

Повна система рівнянь моделі електромагнетотермомеханіки поляризованих неферомагнетних тіл із врахуванням спадкових властивостей матеріалу включає рівняння балансу маси, імпульсу, ентропії, енергії, рівняння електромагнетного поля, а також визначальні та геометричні співвідношення. Для спадкових середовищ рівняння, які відповідають фундаментальним фізичним законам балансу маси, кількості руху, ентропії та енергії, а також рівняння Максвелла такі ж, як і для моделі термопружних неферомагнетних поляризованих тіл. Ці рівняння за врахування процесу локального зміщення маси наведені у праці [4]. Для побудови визначальних співвідношень, що враховують спадкові властивості матеріалів, скористаємося рівнянням балансу повної енергії, яке записане у роботі [4] для моделі термопружного неферомагнетного тіла за врахування процесів локальних зміщень маси та електричного заряду. Врахуємо, що для спадкових матеріалів узагальнена вільна енергія Гельмгольца є функціонал від миттєвих значень $\Lambda(t) = \left(\hat{e}(t),\, T(t),\, \rho_m(t), \vec{E}_*, \vec{\nabla}\mu'_\pi(t)\right)$ та історій зміни $\Lambda_t(\tau) = \left(\hat{e}_t(\tau),\, T_t(\tau),\, \rho_{mt}(\tau), \vec{E}_{*t}(\tau), \vec{\nabla}\mu'_{\pi t}(\tau)\right)$ тензора деформацій $\hat{e}$, температури T, питомої густини наведеної маси ρ_m, вектора напруженості електричного поля $\vec{E}_*$ та градієнта приведеного потенціалу μ'_π, тобто $f = \breve{f} = f\left[\Lambda(t),\, \Lambda_t(\tau)\right]$. Тоді

$$\frac{d\breve{f}}{dt} = \frac{\partial\breve{f}}{\partial\Lambda}\frac{d\Lambda}{dt} + \delta\breve{f}\left[\Lambda(t),\, \Lambda_t(\tau)\middle|\frac{d\Lambda_t(\tau)}{dt}\right], \tag{1}$$

де $\delta\breve{f}\left[\Lambda(t),\, \Lambda_t(\tau)\middle|\frac{d\Lambda_t(\tau)}{dt}\right]$ — похідна Фреше [8].

За врахування співвідношення (1) рівняння балансу енергії поляризованого діелектрика, у якому протікають процеси деформування, теплоперенесення, локальних зміщень маси та електричних зарядів (поляризації) набуде вигляду

$$\rho\left(s+\frac{\partial\breve{f}}{\partial T}\right)\frac{dT}{dt}+\rho\left(-\frac{1}{\rho}\hat{\sigma}_*+\frac{\partial\breve{f}}{\partial\hat{e}}\right):\frac{d\hat{e}}{dt}+\rho\left(\vec{p}_*+\frac{\partial\breve{f}}{\partial\vec{E}_*}\right)\cdot\frac{d\vec{E}_*}{dt}+$$
$$+\rho\left(-\mu'_\pi+\frac{\partial\breve{f}}{\partial\rho_m}\right)\frac{d\rho_m}{dt}+\rho\left(-\vec{\pi}_m+\frac{\partial\breve{f}}{\partial\vec{\nabla}\mu'_\pi}\right)\cdot\frac{d\vec{\nabla}\mu'_\pi}{dt}-\delta\breve{f}\left[\Lambda(t),\,\Lambda_t(\tau)\middle|\frac{d\Lambda_t(\tau)}{dt}\right]-$$
$$-\vec{J}_q\cdot\frac{\vec{\nabla}T}{T}-T\sigma_s-\vec{\upsilon}\cdot\left(\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}-\vec{\nabla}\cdot\hat{\sigma}_*-\vec{F}_e-\rho\vec{F}_*\right)=0. \qquad (2)$$

Тут

$$\hat{\sigma}_*=\hat{\sigma}-\rho\left(\vec{E}_*\cdot\vec{p}_*-\rho_m\mu'_\pi-\vec{\pi}_m\cdot\vec{\nabla}\mu'_\pi\right),$$
$$\vec{F}_*=\vec{F}+\rho_m\vec{\nabla}\mu'_\pi-\vec{\pi}_m\cdot\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla}\mu'_\pi,$$
$$\vec{F}_e=\rho_e\vec{E}_*+\frac{\partial(\rho\vec{p}_*)}{\partial t}\times\vec{B}+\rho\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{E}_*\right)\cdot\vec{p}_*,$$

s — питома ентропія, $\hat{\sigma}$ — тензор напружень Коші; $\vec{J}_q$ — вектор густини потоку тепла; $\vec{p}_*=\vec{P}/\rho$, $\vec{P}$ — вектор поляризації; $\vec{B}$ — вектор напруженості магнетного поля; $\vec{\upsilon}$ — вектор швидкості центрів мас частинок тіла; σ_s — виробництво ентропії; «×», «⊗» — символи векторного та діадного добутків.

2. Визначальні співвідношення

У силу незалежності параметрів $\frac{dT}{dt},\frac{d\hat{e}}{dt},\frac{d\vec{E}_*}{dt},\frac{d\rho_m}{dt},\frac{d\vec{\nabla}\mu'_\pi}{dt}$ із співвідношення (2) одержуємо рівняння стану

$$s=-\frac{\partial\breve{f}}{\partial T},\quad \hat{\sigma}_*=\rho\frac{\partial\breve{f}}{\partial\hat{e}},\quad \vec{p}=-\frac{\partial\breve{f}}{\partial\vec{E}_*},\quad \mu'_\pi=\frac{\partial\breve{f}}{\partial\rho_m},\quad \vec{\pi}_m=\frac{\partial\breve{f}}{\partial\vec{\nabla}\mu'_\pi}, \qquad (3)$$

вираз для виробництва ентропії

$$\sigma_s=-\frac{1}{T}\delta\breve{f}-\vec{J}_q\cdot\frac{\vec{\nabla}T}{T^2}, \qquad (4)$$

та рівняння балансу імпульсу

$$\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{\nabla}\cdot\hat{\sigma}_*+\vec{F}_e+\rho\vec{F}_*. \qquad (5)$$

Для конкретизації рівнянь стану необхідно вибрати відповідне подання питомої вільної енергії $\breve{f}$.

У лінійному наближенні для ізотропного матеріалу рівняння стану будуть мати вигляд

$$\hat{\sigma}_* = \int\limits_{-\infty}^{t} K_1^{\sigma}(t-t')\frac{\partial \hat{e}(t')}{\partial t'}dt' + \int\limits_{-\infty}^{t} K_2^{\sigma}(t-t')\frac{\partial e(t')}{\partial t'}dt'\hat{I} +$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{t} K_s^{\sigma}(t-t')\frac{\partial T(t')}{\partial t'}dt'\hat{I} + \int\limits_{-\infty}^{t} K_{\mu}^{\sigma}(t-t')\frac{\partial \rho_m(t')}{\partial t'}dt'\hat{I},$$
$$s - s_0 = -\int\limits_{-\infty}^{t} K_s^{s}(t-t')\frac{\partial T(t')}{\partial t'}dt' - \int\limits_{-\infty}^{t} K_{\mu}^{s}(t-t')\frac{\partial \rho_m(t')}{\partial t'}dt' -$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{t} K_{\sigma}^{s}(t-t')\frac{\partial e(t')}{\partial t'}dt',$$
$$\mu'_{\pi} - \mu'_{\pi 0} = \int\limits_{-\infty}^{t} K_{\mu}^{\mu}(t-t')\frac{\partial \rho_m(t')}{\partial t'}dt' + \int\limits_{-\infty}^{t} K_s^{\mu}(t-t')\frac{\partial T(t')}{\partial t'}dt' +$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{t} K_{\sigma}^{\mu}(t-t')\frac{\partial e(t')}{\partial t'}dt',$$
$$\vec{p} = -\int\limits_{-\infty}^{t} K_p^{p}(t-t')\frac{\partial \vec{E}_*(t')}{\partial t'}dt' - \int\limits_{-\infty}^{t} K_{\pi}^{p}(t-t')\frac{\partial \vec{\nabla}\mu'_{\pi}(t')}{\partial t'}dt',$$
$$\vec{\pi}_m = \int\limits_{-\infty}^{t} K_{\pi}^{\pi}(t-t')\frac{\partial \vec{\nabla}\mu'_{\pi}(t')}{\partial t'}dt' + \int\limits_{-\infty}^{t} K_p^{\pi}(t-t')\frac{\partial \vec{E}_*(t')}{\partial t'}dt'. \tag{6}$$

Ядра релаксацій $K_i^{\sigma}(t-t')$, $K_s^{\sigma}(t-t')$, $K_{\mu}^{\sigma}(t-t')$, $K_w^{s}(t-t')$, $K_w^{\mu}(t-t')$, $K_b^{p}(t-t')$, $K_b^{\pi}(t-t')$ (тут $i=1,2$, $w\in\{\sigma, s, \mu\}$ $b\in\{p, \pi\}$) у співвідношеннях (6) повинні відповідати принципу загасаючої пам'яті [9, 10], звідки випливають подання

$$K_{\beta}^{\alpha}(t-t') = K_{\beta 0}^{\alpha} + K_{\beta 1}^{\alpha}(t-t'),$$
$$\lim_{t-t'\to 0} K_{\beta 1}^{\alpha}(t-t') = 0. \tag{7}$$

Тут ядра $K_{\beta 0}^{\alpha}$ не залежать від часу і характеризують миттєву реакцію тіла.

З огляду на те, що $\sigma_s \geq 0$, а $\breve{f}$ не залежить від градієнта температури, отримаємо що $-\delta\breve{f} \geq 0$ [9]. Тоді з виразу (4) для виробництва ентропії випливає, що $-\vec{J}_q \cdot \vec{\nabla}T/T^2 \geq 0$. Потік тепла $\vec{J}_q$ спричинений дією термодинамічної сили $\vec{\nabla}T/T^2$, тобто

$$\vec{J}_q = \vec{J}_q\left(\vec{\nabla}T/T\right). \tag{8}$$

Приймемо, що ця залежність є функціональною. У лінійному наближенні за врахування співвідношень (7), (8) отримаємо

$$\vec{J}_q = -\lambda_0 \vec{\nabla} T + \int_{-\infty}^{t} \lambda_1 (t - t') \frac{\partial \vec{\nabla} T(t')}{\partial t'} dt' . \quad (9)$$

Ядра релаксацій $K_i^{\sigma}(t-t')$, $K_s^{\sigma}(t-t')$, $K_{\mu}^{\sigma}(t-t')$, $K_w^{s}(t-t')$, $K_w^{\mu}(t-t')$, $K_b^{p}(t-t')$, $K_b^{\pi}(t-t')$ ($i=1,2$, $w \in \{\sigma, s, \mu\}$ $b \in \{p, \pi\}$) та $\lambda_1(t-t')$ є характеристиками матеріалу і потребують експериментального визначення. Зауважимо, що на відміну від визначальних співвідношень, отриманих раніше у роботах [5-7], ці ядра можуть мати не лише експоненціальний характер.

Висновки. У роботі отримано реологічні визначальні співвідношення (6) та (9), які разом із відповідними балансовими та геометричними рівняннями [4] складають повну систему рівнянь моделі і можуть бути використані для опису взаємозв'язаних електротермомеханічних процесів та процесу локального зміщення маси у діелектричному середовищі із загасаючою пам'яттю. Під час постановки відповідних задач математичної фізики цю систему рівнянь слід доповнити крайовими умовами.

Література

[1] *Бурак Я. Й.* Визначальні співвідношення локально-градієнтної термомеханіки // Доп. АН УССР. Сер. А. — 1987. — № 12. — С. 19-23.

[2] *Нагірний Т., Грицина О., Червінка К.* Локально-градієнтний підхід у термомеханіці // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2006. — Вип. 3. — С. 72-83.

[3] *Бурак Я. Й., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Математичне моделювання механотермодифузійних процесів у твердих розчинах при врахуванні локального зміщення маси // ДАН України. — 2007. — № 3. — С. 59-64.

[4] *Бурак Я. Й., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Приповерхневі механоелектромагнетні явища у термопружних поляризовних тілах за локального зміщення маси // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2007. — № 4. — С. 5-17.

[5] *Грицина О. Р.* Механотермодифузійні процеси в багатокомпонентних твердих розчинах з урахуванням необоротності локальних зміщень маси // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2007. — Вип. 5. — С. 30-41.

[6] *Грицина О. Р., Кондрат В. Ф.* Моделювання електротермомеханічних процесів у в'язкій електропровідній поляризованій рідині з урахуванням необоротності локальних зміщень маси та електричного заряду // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — Вип. 5, 2007. — С. 42-54.

[7] *Кондрат В., Нагірний Т., Грицина О.* Утворення та взаємовплив приповерхневих неоднорідностей у пружному шарі за врахування необоротності локального зміщення маси // Машинознавство. — 2008. — № 3 (129). — С. 31-36.

[8] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функции и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.

[9] *Карнаухов В. Г.* Связанные задачи термовязкоупругости. К.: Наук. думка, 1982. — 260 с.

[10] *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. Москва: Мир, 1975. — 592 с.

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2008, вип. 7, 52-57

Constitutive equations of thermomechanics of rheological media with fading memory taking into account the local displacements of mass

Olha Hrytsyna

The rheological constitutive equations of the model of coupled thermomechanics with regard of the rheological behaviour of the deformable polarized media with fading memory are obtained. Here along with irreversibility of the deformation, heat transfer and polarization processes, the irreversibility of the local mass processes is taken into account.

Определяющие соотношения термомеханики наследственных сред с затухающей памятью и учетом локального смещения массы

Ольга Грицина

Сформулированы определяющие соотношения модели взаимосвязанной термомеханики с учетом наследственных свойств деформируемых поляризирующихся сред с затухающей памятью. При этом с необратимостью процессов деформирования, теплопереноса и поляризации учтена также необратимость процесса локального смещения массы.

Отримано 4.04.08