

До визначення хімічного потенціалу на поверхні деформівного твердого тіла

Тарас Нагірний¹, Костянтин Червінка²

¹ д. ф.-м. н., проф., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАНУ, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005; Zielena Góra University, prof. Shafran st., 4, Zielena Góra, Poland, 65-516, e-mail: tnaigirny@yahoo.com
² к. ф.-м. н., Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: tchervinka@gmail.com

За локально градієнтного підходу в термомеханіці напружено-деформований стан вільного від зовнішнього силового навантаження тіла визначається збуренням хімічного потенціалу на поверхні тіла, яке може бути ототожене зі збуренням енергії взаємодії. Параметри такого стану впливають на межу міцності та її розмірний ефект. На основі модельних задач (контакт двох півпросторів; шар, що контактує з двома ідентичними півпросторами; суцільна куля) запропоновано шляхи визначення хімічного потенціалу на поверхні контакту та на вільній поверхні тіла. Встановлено, що для тіл, характерний розмір яких є значно більший від розміру області приповерхневої неоднорідності, значення хімічного потенціалу на поверхні визначається характеристиками матеріалу тіла й оточення.

Ключові слова: локально градієнтний підхід, енергія взаємодії, межа міцності, поверхневі явища.

Вступ. Експлуатаційні характеристики, зокрема, межа міцності деформівних тіл вагомо залежать від стану їхніх приповерхневих і приконтактних областей [1, 2]. У науковій літературі останніх десятиліть надається значна увага розвитку модельного опису напружено-деформованого стану таких областей. Сюди можна віднести підходи, в основі яких лежать просторово нелокальні [3, 4] чи градієнтні [5, 6] моделі.

У даній роботі проведено дослідження, що базуються на використанні локально градієнтного підходу в термомеханіці [7-9]. Цей підхід дозволяє описати приповерхневу та приконтактну неоднорідність напружено-деформованого стану тіла та врахувати його вплив на параметри міцності, зокрема, розмірний ефект межі міцності.

Якщо за ключові функції вибрати вектор переміщення \vec{u} , збурення температури θ та хімічного потенціалу η , то ключова система рівнянь моделі локально градієнтної термомеханіки для опису рівноважного стану має вигляд [8]

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - (3\lambda + 2\mu) (\alpha_t \vec{\nabla} \theta - \alpha_m \vec{\nabla} \eta) &= 0, \\ \nabla^2 \theta = 0, \quad \chi_m \nabla^2 \eta - \beta_m \eta - \beta_{tm} \theta - (3\lambda + 2\mu) \alpha_m e &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $\lambda, \mu, \alpha_m, \alpha_t, \chi_m, \beta_m, \beta_{tm}$ — сталі матеріалу.

Якщо ж за ключову функцію замість вектора переміщення \vec{u} вибрати тензор напружень $\hat{\sigma}$, то систему рівнянь (1) необхідно доповнити рівняннями сумісності деформацій і тоді ключова система рівнянь є така

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \left\{ \hat{\sigma} - \left[\frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma - 2\mu (\alpha_t \theta - \alpha_m \eta) \right] \hat{I} \right\} \times \vec{\nabla} = 0, \\ \nabla^2 \theta = 0, \quad \nabla^2 \eta - \kappa_\eta^2 \eta - \kappa_\theta^2 \theta - \kappa_\sigma^2 \sigma = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\kappa_\eta^2 = [\beta_m - 3(3\lambda + 2\mu)\alpha_m^2] / \chi_m$, $\kappa_\theta^2 = [\beta_m + 3(3\lambda + 2\mu)\alpha_m^2] / \chi_m$, $\kappa_\sigma^2 = \alpha_m / \chi_m$.

Для постановки граничних задач локально градієнтної термомеханіки необхідно задавати значення збурення хімічного потенціалу η_a на поверхні тіла. Тому напруження та збурення хімічного потенціалу в тілі будуть залежати від величини η_a . Справді, якщо розглянути безмежний шар (область $|x| \leq l$), поверхні якого вільні від силового навантаження, то для компонент $\sigma_y = \sigma_z$ тензора напружень і збурення хімічного потенціалу за ізотермічного наближення маємо [10]

$$\begin{aligned} \sigma_y(x) = \sigma_z(x) = a_0 \eta_a \left[(1 - \alpha \Psi) \frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - (1 - \alpha) \Psi \right], \\ \eta(x) = \eta_a \left[(1 - \alpha \Psi) \frac{\text{ch}(\xi x)}{\text{ch}(\xi l)} - (1 - \alpha) \Psi \right], \end{aligned}$$

де $\Psi = \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l \{1 - \alpha [1 - \text{th}(\xi l) / (\xi l)]\}}$, $\alpha = -\frac{2a_0 \kappa_\sigma^2}{\xi^2}$, $a_0 = -2\mu \alpha_m \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}$, $\xi^2 = \kappa_\eta^2 - 2a_0 \kappa_\sigma^2$.

Зауважимо, що механічні напруження $\sigma_y = \sigma_z$ найбільшого значення досягають на поверхнях $x = \pm l$ шару

$$\sigma_y(\pm l) = \sigma_z(\pm l) = a_0 \eta_a (1 - \Psi) \quad (3)$$

і зменшуються зі зменшенням характерного розміру тіла ξl .

Межа міцності та її розмірний ефект, подібно до напруженого стану тіла, також залежать від поверхневого значення хімічного потенціалу η_a . Для шару, розтягнутого у напрямку осі Oy , значення інтенсивності p_k силового навантаження, що приводить до руйнування тіла, визначається за формулою [8]

$$p_k = \frac{1}{2 + f(\xi l)} \left\{ \frac{2 - D}{1 - D} \sigma_+ + \left[\frac{D}{1 - D} - f(\xi l) \right] \frac{\kappa_\eta^2}{\kappa_\sigma^2} \eta_a - f(\xi l) \frac{\kappa_\theta^2}{\kappa_\sigma^2} \theta_a \right\}. \quad (4)$$

Тут σ_+ — межа міцності «товстих» шарів ($\xi l \gg 1$) за відлікової температури

$$(\theta = 0), \quad f(\xi l) = D \left(1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right) / \left\{ 1 - D \left[1 - \frac{\text{th}(\xi l)}{\xi l} \right] \right\}, \quad D = 2a_0 \kappa_\sigma^2 / \xi^2.$$

Співвідношення (4) отримано у припущенні крихкого руйнування. Приймається, що тіло зруйнується миттєво, якщо максимальні головні напруження у будь-якій точці тіла досягнуть теоретичної межі міцності σ^p для матеріалу. Величина σ_+ пов'язана з σ^p формулою

$$\sigma_+ = 2 \frac{1-D}{2-D} \left(\sigma^p - \frac{\eta_a \kappa_\eta^2}{2\kappa_\sigma^2} \frac{D}{1-D} \right).$$

Звідси для «товстих» шарів отримано співвідношення

$$p_k = \sigma_+ - \frac{D}{2-D} \frac{\kappa_\theta^2}{\kappa_\sigma^2} \theta_a,$$

яке описує лінійну залежність межі міцності від температури [11, 12] тоді, як вираз (4) враховує розмірний ефект такої залежності.

Значення хімічного потенціалу η_a враховує вплив довкілля (середовища, яке контактує з тілом) на фізико-механічні процеси у тілі та пов'язане з природою цього середовища. З метою встановлення характеру такого впливу розглянемо наступні модельні задачі.

1. Система двох контактуючих півпросторів

Розглянемо контакт двох півпросторів, що займають області $x < 0$ і $x > 0$ у прямокутній декартовій системі координат $\{x, y, z\}$. Величини, що стосуються півпростору $x < 0$ відзначатимемо індексом «0», а ті, що стосуються півпростору $x > 0$ — індексом «1». Приймаємо, що при $x \rightarrow \pm \infty$ у півпросторах реалізується ситуація, як у відповідному безмежному середовищі (матеріали півпростору та середовища ідентичні). В актуальний момент часу температура тіла однорідна та відмінна від відлікової, збурення температури в обох півпросторах дорівнює θ_a .

Компоненти тензора напружень і хімічний потенціал задовольняють таку систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_x^{(i)}}{dx} &= 0, & \frac{d^2\sigma_y^{(i)}}{dx^2} &= \frac{d^2\sigma_z^{(i)}}{dx^2} = a_0^{(i)} \frac{d^2\eta^{(i)}}{dx^2}, \\ \frac{d^2\eta^{(i)}}{dx^2} - \kappa_i^2 \eta^{(i)} - \kappa_{\sigma i}^2 \sigma^{(i)} &= \kappa_{\theta i}^2 \theta_a \quad (i = 0, 1). \end{aligned} \quad (5)$$

Тут $\sigma^{(i)} = \sigma_x^{(i)} + \sigma_y^{(i)} + \sigma_z^{(i)}$. Деформації $\hat{\epsilon}$ та переміщення \vec{u} можна визначити з рівнянь стану для напружень і співвідношень Коші.

Крайові умови запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{(0)} \Big|_{x \rightarrow -\infty} &= 0, & \hat{\sigma}^{(1)} \Big|_{x \rightarrow +\infty} &= 0, \\ |H^{(0)} \Big|_{x \rightarrow -\infty} &< \infty, & |H^{(1)} \Big|_{x \rightarrow +\infty} &< \infty \end{aligned} \quad (6)$$

у півпросторах при $x \rightarrow \pm \infty$ та

$$H_*^{(0)} + \eta^{(0)} = H_*^{(1)} + \eta^{(1)}, \quad \gamma_0 \frac{d\eta^{(0)}}{dx} = \gamma_1 \frac{d\eta^{(1)}}{dx},$$

$$\sigma_x^{(0)} = \sigma_x^{(1)}, \quad u_x^{(0)} = u_x^{(1)} \quad (7)$$

на поверхні контакту $x = 0$.

Зазначимо, що умови (7) на поверхні $x = 0$ враховують енергетичну дію одного з півпросторів на інший (умови на хімічний потенціал) і допускають проковзування півпросторів.

Розв'язок задачі (5)-(7) має вигляд

$$\eta^{(i)}(x) = \frac{(-1)^i \zeta_{1-i}}{\zeta_0 + \zeta_1} \left[H_*^{(1)} - H_*^{(0)} - \left(\frac{\kappa_{\theta 1}^2}{\kappa_1^2} - \frac{\kappa_{\theta 0}^2}{\kappa_0^2} \right) \theta_a \right] \exp\left((-1)^i \xi_i x\right) - \frac{\kappa_{\theta i}^2}{\kappa_i^2} \theta_a,$$

$$\sigma_y^{(i)}(x) = \sigma_z^{(i)}(x) = \frac{(-1)^i a_0^{(i)} \zeta_{1-i}}{\zeta_0 + \zeta_1} \left[H_*^{(1)} - H_*^{(0)} - \left(\frac{\kappa_{\theta 1}^2}{\kappa_1^2} - \frac{\kappa_{\theta 0}^2}{\kappa_0^2} \right) \theta_a \right] \exp\left((-1)^i \xi_i x\right), \quad (8)$$

де $\zeta_i = \gamma_i \xi_i$, $\xi_i^2 = \kappa_i^2 + 2a_0^{(i)} \kappa_{\sigma i}^2$, $i = 0, 1$.

Значення хімічного потенціалу на поверхні півпросторів $H(0)$ визначається характеристиками матеріалів, зовнішньою дією θ_a й абсолютними значеннями $H_*^{(i)}$ ($i = 0, 1$) потенціалів середовищ

$$H(0) = \frac{\zeta_0 H_*^{(0)} + \zeta_1 H_*^{(1)}}{\zeta_0 + \zeta_1} - \left(\zeta_0 \frac{\kappa_{\theta 0}^2}{\kappa_0^2} + \zeta_1 \frac{\kappa_{\theta 1}^2}{\kappa_1^2} \right) \frac{\theta_a}{\zeta_0 + \zeta_1}. \quad (9)$$

Поверхневі напруження за відсутності збурення температури пропорційні різниці $H_*^{(0)}$ та $H_*^{(1)}$ й експоненційно зникають при відході від поверхні контакту. Тому в одному півпросторі ці напруження є розтягувальні тоді, як у іншому вони є стискальні. Поверхневі напруження зменшуються зі зменшенням різниці між характеристиками матеріалів півпросторів і зникають у випадку контакту двох півпросторів з ідентичного матеріалу. Це відображено на рис. 1, 2. Тут $x_p = \xi_0 x$, $\zeta_0/\zeta_1 = 5$, $\xi_0/\xi_1 = 5$, $a_0^{(1)}/a_0^{(0)} = 5$; $H_p = (H - H_*^{(0)}) / (H_*^{(1)} - H_*^{(0)})$ — приведений хімічний потенціал, $S_p = \sigma_y^{(i)} / [a_0^{(1)} (H_*^{(1)} - H_*^{(0)})]$ — приведені напруження.

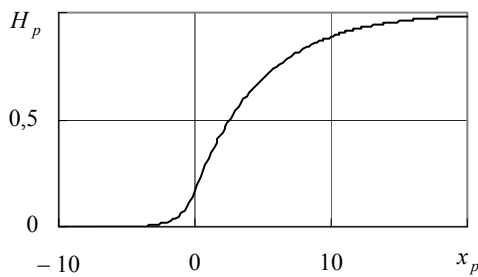


Рис. 1. Хімічний потенціал у системі двох півпросторів

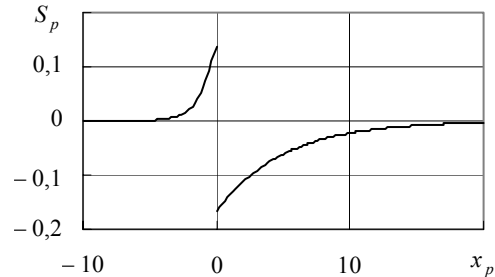


Рис. 2. Напруження у системі двох півпросторів

2. Система «шар – два півпростори»

Розглянемо шар, що займає область $-l < x < l$ і контактує з двома ідентичними півпросторами (області $x < -l$, $x > l$). Позначатимемо величини, що стосуються шару, індексом «1», півпростору $x < -l$ — індексом «0», а півпростору $x > l$ — індексом «2». Система рівнянь для визначення хімічного потенціалу та напружень співпадає з системою (5), у якій індекс набуває значень $i = 0, 1, 2$. Граничні умови приймаємо у вигляді

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{(0)} \Big|_{x \rightarrow -\infty} &= 0, & \hat{\sigma}^{(2)} \Big|_{x \rightarrow +\infty} &= 0, \\ \left| H^{(0)} \right|_{x \rightarrow -\infty} &< \infty, & \left| H^{(2)} \right|_{x \rightarrow +\infty} &< \infty \end{aligned} \quad (10)$$

у півпросторах при $x \rightarrow \pm \infty$,

$$\begin{aligned} H_*^{(0)} + \eta^{(0)} &= H_*^{(1)} + \eta^{(1)}, & \gamma_0 \frac{d\eta^{(0)}}{dx} &= \gamma_1 \frac{d\eta^{(1)}}{dx}, \\ \sigma_x^{(0)} &= \sigma_x^{(1)}, & u_x^{(0)} &= u_x^{(1)} \end{aligned} \quad (11)$$

на поверхні $x = -l$ та

$$\begin{aligned} H_*^{(1)} + \eta^{(1)} &= H_*^{(0)} + \eta^{(2)}, & \gamma_1 \frac{d\eta^{(1)}}{dx} &= \gamma_0 \frac{d\eta^{(2)}}{dx}, \\ \sigma_x^{(1)} &= \sigma_x^{(2)}, & u_x^{(1)} &= u_x^{(2)} \end{aligned} \quad (12)$$

на поверхні $x = l$.

Тут враховано, що $H_*^{(0)} = H_*^{(2)}$, $\gamma_0 = \gamma_2$, і далі ми приймемо $\kappa_0 = \kappa_2$, $\zeta_0 = \zeta_2$, $a_0^{(0)} = a_0^{(2)}$.

Розв'язок задачі (5), (10)-(12) є такий

$$\begin{aligned} \eta^{(0)}(x) &= K \frac{\zeta_1 \operatorname{sh}(\xi_1 l) \exp[\xi_0(l+x)]}{\zeta_1 \operatorname{sh}(\xi_1 l) + \zeta_0 \operatorname{ch}(\xi_1 l)} - \frac{\kappa_{\theta 0}^2}{\kappa_0^2} \theta_a, \\ \eta^{(1)}(x) &= -K \frac{\zeta_0 \operatorname{ch}(\xi_1 x)}{\zeta_1 \operatorname{sh}(\xi_1 l) + \zeta_0 \operatorname{ch}(\xi_1 l)} - \frac{\kappa_{\theta 1}^2}{\kappa_1^2} \theta_a, \\ \eta^{(2)}(x) &= K \frac{\zeta_1 \operatorname{sh}(\xi_1 l) \exp[\xi_0(l-x)]}{\zeta_1 \operatorname{sh}(\xi_1 l) + \zeta_0 \operatorname{ch}(\xi_1 l)} - \frac{\kappa_{\theta 0}^2}{\kappa_0^2} \theta_a, \\ \sigma_y^{(i)}(x) &= \sigma_z^{(i)}(x) = a_0^{(i)} \eta^{(i)} - \frac{\kappa_{\theta i}^2}{\kappa_{\sigma i}^2} \theta_a, \quad i = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (13)$$

Тут

$$K = H_*^{(1)} - H_*^{(0)} - \left(\frac{\kappa_{\theta 0}^2}{\kappa_0^2} + \frac{\kappa_{\theta 1}^2}{\kappa_1^2} \right) \theta_a, \quad \zeta_i = \gamma_i \xi_i, \quad \xi_i^2 = \kappa_i^2 + 2a_0^{(i)} \kappa_{\sigma i}^2, \quad i = 0, 1.$$

Розподіл приведених хімічного потенціалу H_p та напружень S_p у шарі та пів-просторах показано на рис. 3, 4 для тих же значень параметрів, що й на рис. 1, 2. Підставляючи значення хімічного потенціалу на поверхнях шару

$$\eta^{(1)}(\pm l) = - \left[H_*^{(1)} - H_*^{(0)} - \left(\frac{\kappa_{\theta 0}^2}{\kappa_0^2} - \frac{\kappa_{\theta 1}^2}{\kappa_1^2} \right) \theta_a \right] \frac{\zeta_0 \operatorname{ch}(\xi_1 l)}{\zeta_1 \operatorname{sh}(\xi_1 l) + \zeta_0 \operatorname{ch}(\xi_1 l)} - \frac{\kappa_{\theta 1}^2}{\kappa_1^2} \theta_a \equiv \eta_a$$

у співвідношення (4) у наближенні $\exp(\xi_1 l) \gg 1$ і використовуючи відповідні позначення ($\kappa_{\theta 1}^2 = \kappa_{\theta}^2$, $\kappa_1^2 = \kappa_{\eta}^2$), одержуємо

$$p_k = \left[\frac{1-D}{2-D} + \frac{D}{(2-D)^2 \xi l} \right] \left[\frac{2-D}{1-D} \sigma_+ - \frac{D}{(1-D)^2} \frac{\kappa_{\eta}^2}{\kappa_{\sigma}^2} \frac{\zeta_0}{\zeta_1 - \zeta_0} \frac{H_*^{(1)} - H_*^{(0)}}{\xi l} - \frac{D}{1-D} \left[1 - \frac{1}{(1-D) \xi l} \right] \left(\frac{\kappa_{\theta 0}^2}{\kappa_0^2} - \frac{\kappa_{\theta}^2}{\kappa_{\eta}^2} \right) \frac{\kappa_{\eta}^2}{\kappa_{\sigma}^2} \frac{\zeta_0 \theta_a}{\zeta_0 + \zeta_1} \right], \quad (14)$$

$$\text{де } \sigma_+ = 2 \frac{1-D}{2-D} \left[\sigma^p + \frac{\kappa_{\eta}^2}{2 \kappa_{\sigma}^2} \frac{D}{1-D} \frac{\zeta_0}{\zeta_0 + \zeta_1} (H_*^{(1)} - H_*^{(0)}) \right].$$

Бачимо, що інтенсивність критичного навантаження шару залежить від характеристик матеріалу шару, різниці $H_*^{(1)} - H_*^{(0)}$ енергій взаємодії у шарі та півпросторах, що виступають у ролі «оточення», а також параметрів $\kappa_{\theta 0}^2 / \kappa_0^2$ і ζ_0 .

За припущення, що товщина шару є велика порівняно з областю приповерхневої неоднорідності, яке приймали при отриманні (4), за постійної температури ($\theta_a = 0$) із формули (14) отримуємо співвідношення

$$p_k = \sigma_+ - \frac{2a_0}{2-D} \frac{\zeta_0}{\zeta_0 + \zeta_1} \frac{H_*^{(1)} - H_*^{(0)}}{\xi l}, \quad (15)$$

що підтверджує можливість впливати за допомогою «оточення» на міцність тіл малих розмірів (тонкі плівки). Це узгоджується з відомими експериментальними даними [13].

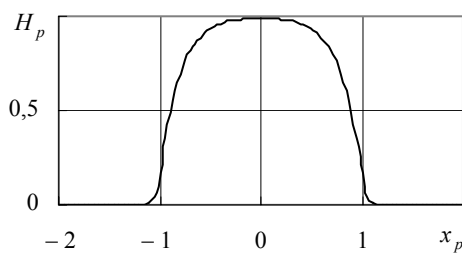


Рис. 3. Хімічний потенціал у системі «шар – два півпростори»

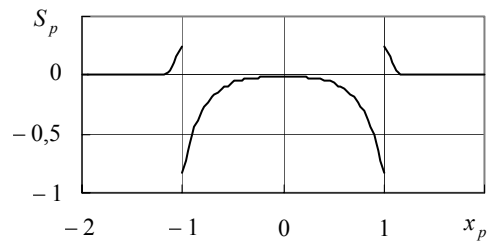


Рис. 4. Напруження у системі «шар – два півпростори»

3. Хімічний потенціал на поверхні кулі

Вільну від зовнішнього силового навантаження кулю радіусу R_0 віднесемо до сферичної системи координат $\{r, \varphi, \psi\}$, центр якої співпадає з центром кулі. Приймаємо, що на поверхні кулі задано постійні значення η_a збурення хімічного потенціалу. Обмежимося ізотермічним наближенням ($\theta_a = 0$).

Збурення хімічного потенціалу η та ненульова компонента $u_r \equiv u$ вектора переміщення \vec{u} задовольняють систему рівнянь, що описує рівновагу тіла,

$$\frac{d^2\eta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\eta}{dr} - \kappa^2 \eta = 0, \quad \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u) \right] = m \frac{d\eta}{dr}, \quad (16)$$

де $m = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha_m$.

Граничні умови приймаємо у вигляді

$$\eta = \eta_a, \quad (\lambda + 2\mu) \frac{du}{dr} + 2\lambda \frac{u}{r} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_m \eta = 0. \quad (17)$$

Рівняння (16) та умови (17) потрібно доповнити умовою обмеженості розв'язку в області тіла.

Розв'язок сформульованої задачі є такий

$$\eta(r) = \eta_a \frac{R \operatorname{sh}(\kappa r)}{r \operatorname{sh}(\kappa R)}, \quad u(r) = \eta_a m \frac{R}{\operatorname{sh}(\kappa R)} \frac{\kappa r \operatorname{ch}(\kappa r) - \operatorname{sh}(\kappa r)}{\kappa^2 r^2}. \quad (18)$$

Значення хімічного потенціалу на поверхні тіла визначається оточенням і властивостями матеріалу тіла. Тому приймаємо, що неоднорідність розподілу хімічного потенціалу, спричинена наявністю поверхні тіла, приводить до перерозподілу маси та виникнення напружено-деформованого стану тіла. Враховуючи рівняння стану

$$\rho = \rho_* - (3\lambda + 2\mu) \alpha_m e - \alpha_{mm} \eta, \quad (19)$$

де ρ_* — густина маси середовища, матеріал якого ідентичний матеріалу кулі, та розв'язок (18) маємо

$$\rho(r) = \rho_* - \eta_a \left[\frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha_m^2}{\lambda + 2\mu} - \alpha_{mm} \right] \frac{R \operatorname{sh}(\kappa r)}{r \operatorname{sh}(\kappa R)}. \quad (20)$$

У відліковому стані маса тіла дорівнювала

$$M_* = \int_{V_*} \rho_* dV_* = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_*.$$

За умови збереження маси для тіла в цілому ($M = M_*$) у наближенні $\exp(\kappa R) \gg \kappa R$ отримуємо значення хімічного потенціалу, що встановлюється на поверхні вільної від силового навантаження кулі

$$\eta_a = \frac{2(\lambda + 2\mu)}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_m} \frac{\rho_* + (3\lambda + 2\mu)\alpha_m - \frac{\alpha_{mm}}{3\alpha_m}}{\frac{\alpha_{mm}}{3\alpha_m} - \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha_m}{3(\lambda + 2\mu)}} \left(1 - \frac{1}{\xi R}\right). \quad (21)$$

Це співвідношення відображає той факт, що величині η_a властивий розмірний ефект. Зі збільшенням радіуса кулі значення η_a зростає, прямує до сталої величини

$$\eta_a = \frac{2(\lambda + 2\mu)}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_m} \frac{\rho_* + (3\lambda + 2\mu)\alpha_m - \frac{\alpha_{mm}}{3\alpha_m}}{\frac{\alpha_{mm}}{3\alpha_m} - \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha_m}{3(\lambda + 2\mu)}}, \quad (22)$$

яка визначається характеристиками матеріалу кулі.

Висновки. У роботі на основі аналізу розв'язків модельних задач локально градієнтної термомеханіки досліджено вплив зовнішнього середовища на збурення η_a хімічного потенціалу на поверхні тіла. Встановлено, що величина η_a визначається фізико-механічними характеристиками тіла й оточення, а також геометрією тіла. Зміна характеристик оточення може суттєво впливати на величину η_a , а отже і на приповерхневу неоднорідність тіла та його міцність.

Література

- [1] *Бартенев Г. М., Зуев Ю. С.* Прочность и разрушение высокоэластичных материалов. — Москва-Ленинград: Химия, 1964. — 599 с.
- [2] *Ломашевский В. П., Алфимов П. Т., Лебедев А. А.* Экспериментальное исследование влияния эффекта масштаба и формы тела на закономерности деформирования и разрушения структурно-неоднородных материалов // Проблемы прочности. — 1982. — № 9. — С. 68-72.
- [3] *Eringen A. C., Edelen D. G.* On Nonlocal Elasticity // Int. J. Eng. Sci. — 1972. — Vol. 10. — P. 233-248.
- [4] *Bazant Z. P.* Nonlocal damage theory based on micromechanics of crack interactions // J. Eng. Mech. — 1994. — Vol. 120(3). — P. 593-617.
- [5] *Santaoja K.* Gradient theory from the thermomechanics point of view // Eng. Frac. Mech. — 2004. — Vol. 71. — P. 557-566.
- [6] *Maugin G. A.* The thermomechanics of nonlinear irreversible behaviours. — Singapore: World Scientific Publishing Co., 1999. — 348 p.
- [7] *Бурак Я. Й., Нагирный Т. С.* Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах // Прикл. механика. — 1992. — Т. 28, № 12. — С. 3-23.

- [8] *Фізико-математичне моделювання складних систем* / Я. Бурак, Є. Чапля, Т. Нагірний та ін.; під ред. Я. Бурака, Є. Чаплі. — Львів: СПОЛОМ, 2004. — 264 с.
- [9] *Nagirny T., Burak Ya. Thermodynamical models of continual description of the coupled processes in thin-film systems* // Proc. Inter. Symp. on Trends in Continuum Phys. — Poznan, Poland, Word Scientific, 1999. — P. 263-276.
- [10] *Нагірний Т. С. Поверхневі напруження у шарі. Поверхневий натяг та міцність шару* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1999. — Т. 42, № 4. — С. 111-115.
- [11] *Нагірний Т. С., Червінка К. А. Поверхневі напруження в шарі. Вплив температури на приповерхневий натяг та міцність* // Доп. НАН України. — 2000. — № 10. — С. 57-62.
- [12] *Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие: в 4 т.* / под ред. Панасюка В. В. — Киев: Наук. думка, 1988. — Т. 1: Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. С. Основы механики разрушения материалов. — 488 с.
- [13] *Рейбиндер П. А. Поверхностные явления в дисперсных системах* // Физико-химическая механика. — Москва: Наука, 1979. — 381 с.

To determination of chemical potential on the surface of a solid

Taras Nahirnyj, Kostiantyn Tchervinka

At local gradient approach in termomechanics stressed-strained state of free of external power load body is determined by disturbance of the chemical potential at the surface which can be equated to disturbance of interaction energy. The parameters of such state affect the ultimate strength and its size effect. On the basis of model problems (contact of two half-spaces; layer contacting with two identical half-spaces; solid sphere) there are proposed the methods of determination of chemical potential on the surface of contact and on the free surface of body. It is found that for bodies with characteristic size considerably larger of the size of nearsurface heterogeneity region, the value of interaction energy at the surface is completely determined by physical properties of the body and its surroundings.

К определению химического потенциала на поверхности деформируемого твердого тела

Тарас Нагірний, Константин Червінка

При локально градиентном подходе в термомеханике напряженно-деформированное состояние свободного от внешней силовой нагрузки тела определяется возмущением химического потенциала на поверхности тела, которое может быть отождествлено с возмущением энергии взаимодействия. Параметры такого состояния влияют на границу прочности и ее размерный эффект. На основе модельных задач (контакт двух полупространств, слой, контактирующий с двумя идентичными полупространствами, сплошной шар) предложены методы определения химического потенциала на поверхности контакта и свободной поверхности тела. Установлено, что для тел, характерный размер которых является значительно большим размера области приповерхностной неоднородности, значение химического потенциала на поверхности определяется физическими свойствами тела и окружения.

Отримано 15.05.08