УДК 539.3

Рівняння електромагнітотермомеханіки поляризовних неферомагнітних тіл за врахування локального зміщення маси

Василь Кондрат[1], Ольга Грицина[2]

[1] д. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: kon@cmm.lviv.ua
[2] к. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: gryt@cmm.lviv.ua

Отримано повну систему співвідношень електромагнітотермомеханіки електропровідного поляризовного середовища з урахуванням локального зміщення маси. Показано, що множина спряжених параметрів, які визначають рівноважний термодинамічний стан, поряд із температурою-ентропією, тензорами деформації та напружень, векторами напруженості електричного поля та поляризації містить дві пари нових параметрів, а саме: наведену масу й енергетичну міру μ'_π *впливу зміщення маси на внутрішню енергію, вектор зміщення маси та просторовий градієнт енергетичної міри* μ'_π, *які зумовлені врахуванням локального зміщення маси. Таке розширення простору параметрів стану дозволяє описати приповерхневу неоднорідність напружено-деформованого стану й електричної поляризації. Врахування локального зміщення маси приводить також до виникнення додаткових об'ємних сил і перевизначення тензора напружень. Показано, що у разі виключення з теорії параметрів, які характеризують зміщення маси, приходимо до просторово нелокальної електромагнітотермомеханіки поляризовних тіл.*

Ключові слова: математичне моделювання, взаємозв'язані електромагнітотермомеханічні процеси, локальне зміщення маси, електропровідні поляризовні тіла, нелокальність, приповерхневі явища.

Вступ. У науковій літературі різних років висвітленню та розвитку теорії взаємозв'язаних механічних, теплових та електромагнітних процесів у поляризовних середовищах, а також прикладних проблем електродинаміки поляризовних систем присвячено значну кількість монографій, підручників і публікацій у періодичних виданнях [1-9]. Це зумовлено, насамперед, широким використанням поляризовних (зокрема, діелектричних) матеріалів у багатьох галузях науки, техніки та виробництва. За наявності електричного поля у таких середовищах спостерігається взаємне зміщення електричних зарядів атомів, молекул чи їх комплексів, тобто поляризація. Під час опису цього явища у взаємозв'язку з механічними та тепловими процесами, зазвичай, не враховують зміщення маси, яке супроводжує зміщення електричного заряду. Відзначимо принагідно, що зміщення маси може спричинюватися не лише процесом електричної поляризації [10, 11] (для прикладу, таке зміщення може виникати за прискореного руху тіла, молекули якого є масово несиметричні). Вочевидь уперше увагу на процес зміщення маси в термомеханічних системах звернуто в роботі [11], у якій, зокрема, показано, що врахування локального зміщення маси приводить до нелокальності термодинамічного стану. Надалі такі дослідження розвивали переважно стосовно приповерхневих явищ і проблем міцності [13-15].

Метою цієї роботи є формулювання й аналіз основних співвідношень математичної моделі для опису механотермоелектромагнітних процесів у електропровідних поляризовних тілах, в яких поряд із процесом зміщення електричного заряду враховано також локальне зміщення маси.

1. Об'єкт дослідження

Розглядаємо ізотропне термопружне поляризовне неферомагнітне тіло, яке займає область (V) евклідового простору й обмежене поверхнею (Σ). Тіло перебуває під впливом зовнішніх механічної та теплової дій, а також електромагнітного поля, внаслідок чого у ньому протікають механічні, теплові й електромагнітні процеси. Електричний складник електромагнітного поля приводить до упорядкування зв'язаних електричних зарядів тіла (поляризації), що проявляється, зокрема, у виникненні електричного та масового потоків густини $\mathbf{J}_{es}$ та $\mathbf{J}_{ms}$ відповідно. Виникнення потоку маси зумовлене тим, що зв'язані заряди різних знаків мають різну масу (маси атомів водню та кисню у молекулах води, електронів і ядер тощо).

Усі поля, які характеризують процеси, що протікають у тілі, повинні задовольняти фундаментальні закони фізики — балансу маси, імпульсу, моменту імпульсу, ентропії й енергії. Вихідні співвідношення моделі будемо формулювати за підходом Ейлера.

2. Рівняння балансу маси

Для системи «тіло – електромагнітне поле» рівняння балансу маси в інтегральній формі має вигляд

$$\frac{d}{dt}\int_{(V)}\left(\rho+c^{-2}U_e\right)dV=-\int_{(\Sigma)}\left(\mathbf{J}_*+c^{-2}\mathbf{S}_e\right)\cdot\mathbf{n}d\Sigma\,, \tag{1}$$

де ρ — густина маси, $U_e=(\varepsilon_0\mathbf{E}^2+\mu_0\mathbf{H}^2)/2$ — густина енергії електромагнітного поля, c — швидкість електромагнітної хвилі у вакуумі, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — вектори напруженостей електричного та магнітного полів, ε_0, μ_0 — електрична та магнітна сталі, $\mathbf{J}_*$ — вектор густини потоку речовини, $\mathbf{S}_e=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ — вектор густини потоку енергії електромагнітного поля, $\mathbf{n}$ — вектор зовнішньої нормалі до поверхні (Σ), «$\cdot$» і «$\times$» — знаки скалярного та векторного добутків.

Порівняльна кількісна оцінка густин речовини ρ й електромагнітного поля $c^{-2}U_e$ свідчить, що ці величини стають співмірні лише для дуже великих (недосяжних на практиці) напруженостей полів — $E\approx10^{14}$ В/м, $H\approx10^{10}$ А/м. Тільки для таких значень напруженостей полів стає суттєвий і потік маси електромагнітного поля.

Тому надалі не будемо враховувати складники $c^{-2}U_e$ та $c^{-2}\mathbf{S}_e$ у рівнянні (1), а відтак воно набуває вигляду

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)}\rho dV = -\int\limits_{(\Sigma)}\mathbf{J}_*\cdot\mathbf{n}d\Sigma\,. \tag{2}$$

Приймемо, що вектор густини потоку маси $\mathbf{J}_*$ визначається сумою конвективного складника $\mathbf{J}_{mc} = \rho\mathbf{v}_*$ ($\mathbf{v}_*$ — вектор середньої швидкості переміщення частинок тіла) та складника $\mathbf{J}_{ms}$, пов'язаного з упорядкуванням структури фізично малого елемента (частинки) тіла, тобто

$$\mathbf{J}_* = \mathbf{J}_{mc} + \mathbf{J}_{ms}\,.$$

Якщо співвідношенням

$$\Pi_m = \int\limits_0^t \mathbf{J}_{ms}\,dt \tag{3}$$

ввести вектор локального зміщення маси Π_m так, що

$$\mathbf{J}_{ms} = \frac{\partial\Pi_m}{\partial t}\,, \tag{4}$$

то для вектора $\mathbf{J}_*$ густини потоку маси отримаємо

$$\mathbf{J}_* = \rho\mathbf{v}_* + \frac{\partial\Pi_m}{\partial t}\,.$$

Означимо також вектор $\mathbf{v}$ швидкості центра мас частинок тіла

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\left(\rho\mathbf{v}_* + \frac{\partial\Pi_m}{\partial t}\right). \tag{5}$$

Тоді локальна форма рівняння (2) балансу маси набуває стандартного вигляду

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0\,. \tag{6}$$

Якщо врахувати подання (5) і ввести вектор $\mathbf{J}_m = \rho(\mathbf{v}_* - \mathbf{v})$, то рівняння (6) балансу маси можна записати так

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\mathbf{v} + \mathbf{J}_m + \frac{\partial\Pi_m}{\partial t}\right) = 0\,. \tag{7}$$

Введемо величину $\rho_{m\pi}$, яка має розмірність густини маси та яку, аналогічно до наведеного заряду [16], назвемо густиною наведеної маси. Вимагаємо, щоб для довільного тіла скінченних розмірів (область (V)) вектор Π_m локального зміщення маси (який має розмірність густини масового дипольного моменту кг · м / м^3) та густина $\rho_{m\pi}$ задовольняли співвідношення [16]

$$\int_{(V)} \Pi_m dV = \int_{(V)} \rho_{m\pi} \mathbf{r}\, dV \,, \tag{8}$$

де r — радіус-вектор.

Інтеграл у правій частині формули (8) не залежить від вибору системи відліку. Звідси випливає, що

$$\int_{(V)} \rho_{m\pi} dV = 0 \,. \tag{9}$$

Домножимо скалярно ліву та праву частини співвідношення (8) на довільний сталий вектор $\mathbf{a}$ та використаємо тотожність $\mathbf{a} \cdot \Pi_m = (\Pi_m \cdot \nabla)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$ [16]. У підсумку одержимо

$$\int_{(V)} (\Pi_m \cdot \nabla)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) dV = \int_{(V)} \nabla \cdot \left[\Pi_m (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \right] dV - \int_{(V)} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\nabla \cdot \Pi_m) dV =$$
$$= \int_{(V)} \rho_{m\pi} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) dV \,. \tag{10}$$

Оскільки вектор Π_m дорівнює нулю поза тілом, то інтеграл $\int_{(V)} \nabla \cdot \left[\Pi_m (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \right] dV = 0$. Тоді, враховуючи довільність вектора $\mathbf{a}$ й області (V), із співвідношення (10) отримуємо

$$\rho_{m\pi} = -\nabla \cdot \Pi_m \,. \tag{11}$$

З формул (4) й (11) одержуємо рівняння

$$\frac{\partial \rho_{m\pi}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{ms} = 0 \,, \tag{12}$$

яке має форму закону збереження наведеної маси.

3. Рівняння електродинаміки

Рівняння, які відображають закони Ампера, Фарадея та збереження електричного заряду, в інтегральній формі мають вигляд [3, 16-18]

$$\oint_{(l)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{(\Sigma)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Sigma \,, \qquad \oint_{(l)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(\Sigma)} \mathbf{J}_{ef} \cdot \mathbf{n} d\Sigma \,,$$
$$\oint_{(\Sigma)} \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{n} d\Sigma = -\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho_e dV \,. \tag{13}$$

Тут $\mathbf{B}$ — вектор індукції магнітного поля для неферомагнітного середовища, яке розглядаємо, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$; $\mathbf{J}_e$ — вектор густини електричного струму; $\mathbf{J}_{ef} = \mathbf{J}_{ed} + \mathbf{J}_{es}$ — вектор густини повного електричного струму, $\mathbf{J}_{ed} = \varepsilon_0(\partial \mathbf{E} / \partial t)$, $\mathbf{J}_{es}$ — вектор густини струму, зумовленого впорядкуванням зарядової системи (поляризаційний струм); ρ_e — густина вільного електричного заряду.

Аналогічно до подання (3) введемо вектор Π_e локального зміщення електричного заряду, який пов'язаний із вектором $\mathbf{J}_{es}$ співвідношенням [16]

$$\Pi_e = \int_0^t \mathbf{J}_{es}\, dt ,$$

звідки

$$\mathbf{J}_{es} = \frac{\partial \Pi_e}{\partial t} .$$

Тоді для вектора густини повного електричного струму $\mathbf{J}_{ef}$ маємо

$$\mathbf{J}_{ef} = \mathbf{J}_e + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial t} . \qquad (14)$$

Введемо величину $\rho_{e\pi}$, яка має розмірність густини електричного заряду й яку називають [16] густиною наведеного заряду. Вимагаємо, щоб для довільного тіла скінченних розмірів (область (V)) вектор Π_e локального зміщення електричного заряду (який має розмірність густини електричного дипольного моменту $\text{Кл}\cdot\text{м}/\text{м}^3$) та густина $\rho_{e\pi}$ [16] були такі, що

$$\int_{(V)} \Pi_e dV = \int_{(V)} \rho_{e\pi} \mathbf{r}\, dV .$$

Аналогічно до формул (9), (11) і (12) отримаємо співвідношення

$$\int_{(V)} \rho_{e\pi} dV = 0 , \qquad \rho_{e\pi} = -\nabla \cdot \Pi_e \qquad (15)$$

та рівняння

$$\frac{\partial \rho_{e\pi}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{es} = 0 ,$$

яке має форму закону збереження наведеного електричного заряду [16]. Бачимо, що вектор Π_e має зміст вектора поляризації $\mathbf{P}$.

Застосовуючи теореми Остроградського-Гауса та Стокса [19] до рівнянь (13) і використовуючи подання (14), отримуємо таку локальну форму цих рівнянь

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{J}_e + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0 . \qquad (16)$$

Якщо подіяти оператором дивергенції на перші два рівняння системи (16) і врахувати третє рівняння цієї системи та співвідношення $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0$ [19], то отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 , \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \Pi_e) - \rho_e\right] = 0 . \qquad (17)$$

Введемо вектор $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \Pi_e$, який природно назвати вектором індукції електричного поля, та приймемо нульові початкові умови для $\nabla \cdot \mathbf{B}$ та $\left(\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_e\right)$. Тоді зі співвідношень (17) одержимо рівняння

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0\,, \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e\,, \tag{18}$$

які відображають закони Гауса-Фарадея та Гауса-Кулона і разом із першими двома рівняннями системи (16) складають повну систему рівнянь Максвелла. Надалі замість вектора Π_e будемо використовувати стандартне позначення $\mathbf{P}$ для вектора поляризації.

4. Рівняння балансу енергії електромагнітного поля

Із рівнянь Максвелла випливає рівняння, яке трактують як рівняння балансу енергії електромагнітного поля [16-18],

$$\frac{\partial U_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_e + \left(\mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right) \cdot \mathbf{E} = 0\,. \tag{19}$$

Останній доданок у рівнянні (19) відображає вплив електромагнітного поля на речовину, яка разом із полем складає єдину матеріальну систему. Перепишемо цей доданок таким чином, щоб у нього входили вектор $\mathbf{p} = \mathbf{P}/\rho$ питомої поляризації та вектори $\mathbf{E}_*$, $\mathbf{P}_*$, $\mathbf{J}_{e*}$ електромагнітного поля та густини електричного струму в системі відліку центрів мас, яка рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$ відносно лабораторної системи відліку,

$$\mathbf{E}_* = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\,, \quad \mathbf{P}_* = \mathbf{P} + \varepsilon_0\mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{M}\,, \quad \mathbf{J}_{e*} = \mathbf{J}_e - \rho_e \mathbf{v}\,.$$

Тут $\mathbf{M}$ — вектор намагніченості, який у нашому випадку немагнітного тіла дорівнює нулю; вектор $\mathbf{J}_{e*}$ трактуємо як вектор густини струму провідності. Враховуючи це, а також рівняння балансу маси (6), запишемо рівняння (19) балансу енергії електромагнітного поля так

$$\frac{\partial U_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_e + \mathbf{J}_{e*} \cdot \mathbf{E}_* + \left[\rho_e \mathbf{E}_* + \left(\mathbf{J}_{e*} + \frac{\partial (\rho \mathbf{p})}{\partial t}\right) \times \mathbf{B} + \right.$$

$$\left. + \rho\left(\nabla \mathbf{E}_*\right) \cdot \mathbf{p}\right] \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{E}_* \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \nabla \cdot \left[\rho\left(\mathbf{E}_* \cdot \mathbf{p}\right)\hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{v}\right] = 0\,. \tag{20}$$

Тут $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ — повна похідна за часом.

5. Рівняння балансу ентропії

Швидкість зміни ентропії елемента тіла визначається притоком ентропії ззовні, конвективним складником потоку ентропії через поверхню тіла, виникненням ентропії σ_s за одиницю часу та розподіленими джерелами тепла $\Re$. В інтегральній формі рівняння балансу ентропії має вигляд [1]

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)}\rho s\,dV=-\oint\limits_{(\Sigma)}\mathbf{J}_s\cdot\mathbf{n}d\Sigma-\oint\limits_{(\Sigma)}\rho s\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma+\int\limits_{(V)}\sigma_s dV+\int\limits_{(V)}\rho\frac{\Re}{T}dV\,, \qquad (21)$$

де s — питома ентропія, $\mathbf{J}_s$ — вектор густини потоку ентропії, T — абсолютна температура.

Локальна форма рівняння (21) є

$$\rho\frac{ds}{dt}=-\nabla\cdot\mathbf{J}_s+\sigma_s+\rho\frac{\Re}{T}\,,$$

або, враховуючи співвідношення $\mathbf{J}_s=\mathbf{J}_q/T$, яке пов'язує вектори густин потоків ентропії $\mathbf{J}_s$ і тепла $\mathbf{J}_q$, маємо

$$\rho T\frac{ds}{dt}=-\nabla\cdot\mathbf{J}_q+\frac{1}{T}\mathbf{J}_q\cdot\nabla T+T\sigma_s+\rho\Re\,. \qquad (22)$$

6. Рівняння балансу енергії системи тіло – електромагнітне поле

Приймаємо, що повна енергія системи у довільний момент часу є сума внутрішньої ρu (u — питома внутрішня енергія) та кінетичної $\rho\mathbf{v}^2/2$ енергій, а також енергії електромагнітного поля U_e. Її зміна відбувається внаслідок конвективного перенесення енергії $\rho(u+\mathbf{v}^2/2)$ через поверхню, роботи поверхневих зусиль $\hat{\sigma}\cdot\mathbf{v}$, потоків тепла $\mathbf{J}_q$ й енергії електромагнітного поля $\mathbf{S}_e$, роботи $\mu\mathbf{J}_m$, затраченої на перенесення частинок тіла відносно центра мас і роботи $\mu_\pi\partial\Pi_m/\partial t$, виконаної на упорядкування структури тіла (локальним зміщенням маси), дії масових сил $\mathbf{F}$ і розподілених теплових джерел $\Re$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)}\left(\rho u+U_e+\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2\right)dV=-\oint\limits_{(\Sigma)}\left[\rho\left(u+\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)\mathbf{v}-\hat{\sigma}\cdot\mathbf{v}+\right.$$
$$\left.+\mathbf{S}_e+\mathbf{J}_q+\mu\mathbf{J}_m+\mu_\pi\frac{\partial\Pi_m}{\partial t}\right]\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma+\int\limits_{(V)}\left(\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}+\rho\Re\right)dV\,, \qquad (23)$$

де $\hat{\sigma}$ — тензор напружень Коші, μ — хімічний потенціал, μ_π — міра зміни внутрішньої енергії системи, зумовленої локальним зміщенням маси.

Якщо врахувати рівняння балансу маси (6), (7), енергії електромагнітного поля (20) та ентропії (22) та використати теорему Остроградського-Гаусса, то з (23) отримаємо рівняння балансу енергії у локальній формі

$$\rho\frac{du}{dt}=\rho T\frac{ds}{dt}+\left[\hat{\sigma}-\rho\left(\mathbf{E}_*\cdot\mathbf{p}\right)\hat{\mathbf{I}}\right]:\frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt}+\rho\mathbf{E}_*\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}-\mu'_\pi\frac{\partial\nabla\cdot\Pi_m}{\partial t}-$$
$$-\nabla\mu'_\pi\cdot\frac{\partial\Pi_m}{\partial t}+\rho_e\mathbf{E}_*-\mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_*-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}-T\sigma_s+\mathbf{v}\cdot\left\{-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\right.$$
$$\left.+\nabla\cdot\left[\hat{\sigma}-\rho\left(\mathbf{E}_*\cdot\mathbf{p}\right)\hat{\mathbf{I}}\right]+\left(\mathbf{J}_{e*}+\frac{\partial(\rho\mathbf{p})}{\partial t}\right)\times\mathbf{B}+\rho\left(\nabla\mathbf{E}_*\right)\cdot\mathbf{p}+\rho\mathbf{F}\right\}.$$

Тут $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$, $\hat{\mathbf{e}} = \left[\nabla\mathbf{u} + \left(\nabla\mathbf{u}\right)^T\right]\Big/2$ — тензор деформації, $\mathbf{u}$ — вектор переміщення, індекс «T» вказує на операцію транспонування тензора.

Якщо ввести питомі величини $\boldsymbol{\pi}_m = \Pi_m / \rho$, $\rho_m = \rho_{m\pi} / \rho$ та врахувати рівняння балансу маси (6), то прийдемо до такого рівняння балансу внутрішньої енергії

$$\rho\frac{du}{dt} = \rho T\frac{ds}{dt} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt} + \rho\mathbf{E}_* \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt} - \rho\nabla\mu'_\pi \cdot \frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} +$$
$$+\mathbf{J}_{e*} \cdot \mathbf{E}_* - \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T} - T\sigma_s + \mathbf{v} \cdot \left\{-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \rho_e\mathbf{E}_* + \right.$$
$$\left. +\left(\mathbf{J}_{e*} + \frac{\partial(\rho\mathbf{p})}{\partial t}\right) \times \mathbf{B} + \rho\left(\nabla\mathbf{E}_*\right) \cdot \mathbf{p} + \rho\mathbf{F}_*\right\}, \tag{24}$$

де $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \rho\left(\mathbf{E}_* \cdot \mathbf{p} - \rho_m\mu'_\pi - \boldsymbol{\pi}_m \cdot \nabla\mu'_\pi\right)\hat{\mathbf{I}}$, $\mathbf{F}_* = \mathbf{F} + \rho_m\nabla\mu'_\pi - \boldsymbol{\pi}_m \cdot \nabla\nabla\mu'_\pi$.

Перейдемо до нової термодинамічної функції $f = u - Ts - \mathbf{E}_* \cdot \mathbf{p} + \nabla\mu'_\pi \cdot \boldsymbol{\pi}_m$ — узагальненої вільної енергії Гельмгольца. Тоді з (24) отримаємо таке балансове співвідношення

$$\rho\frac{df}{dt} = -\rho s\frac{dT}{dt} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt} - \rho\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{E}_*}{dt} + \rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt} + \rho\boldsymbol{\pi}_m \cdot \frac{d\nabla\mu'_\pi}{dt} + \mathbf{J}_{e*} \cdot \mathbf{E}_* - \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T}$$
$$-T\sigma_s + \mathbf{v} \cdot \left\{-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \rho_e\mathbf{E}_* + \left(\mathbf{J}_{e*} + \frac{\partial(\rho\mathbf{p})}{\partial t}\right) \times \mathbf{B} + \rho\left(\nabla\mathbf{E}_*\right) \cdot \mathbf{p} + \rho\mathbf{F}_*\right\}. \tag{25}$$

Враховуючи інваріантність рівняння (25) відносно просторових трансляцій і припускаючи, що вільна енергія f визначається скалярними T, ρ_m, векторними $\mathbf{E}_*, \nabla\mu'_\pi$ та тензорним $\hat{\mathbf{e}}$ параметрами, які є незалежні, отримуємо узагальнене рівняння Гіббса

$$df = -sdT + \rho^{-1}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : d\hat{\mathbf{e}} - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{E}_* + \mu'_\pi d\rho_m + \boldsymbol{\pi}_m \cdot d\nabla\mu'_\pi,$$

вираз для виробництва ентропії

$$\sigma_s = \mathbf{J}_{e*} \cdot \frac{\mathbf{E}_*}{T} - \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T^2} \tag{26}$$

та рівняння балансу імпульсу

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \mathbf{F}_e + \rho\mathbf{F}_*, \tag{27}$$

де $\mathbf{F}_e = \rho_e\mathbf{E}_* + \left[\mathbf{J}_{e*} + \frac{\partial(\rho\mathbf{p})}{\partial t}\right] \times \mathbf{B} + \rho\left(\nabla\mathbf{E}_*\right) \cdot \mathbf{p}$ — вектор густини пондеромоторної сили.

Відзначимо, що у виразі (26) для виробництва ентропії відсутні складники, зумовлені поляризацією та зміщенням маси, оскільки ці процеси розглядали у наближенні оборотних. Бачимо також, що вільна енергія залежить не лише від температури T, тензора деформації $\mathbf{e}$ та вектора $\mathbf{E}_*$ напруженості електричного поля, а й від параметрів ρ_m і $\nabla\mu'_\pi$, які пов'язані з урахуванням локального зміщення маси.

7. Визначальні співвідношення

7.1. Рівняння стану. З рівняння Гіббса за незалежності параметрів T, ρ_m, $\mathbf{E}_*$, $\nabla\mu'_\pi$, $\hat{\mathbf{e}}$ випливають рівняння стану, які запишемо так

$$s = -\left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{\hat{\mathbf{e}},\rho_m,\nabla\mu'_\pi,\mathbf{E}_*}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \rho\left.\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{e}}}\right|_{T,\,\rho_m,\nabla\mu'_\pi,\mathbf{E}_*}, \quad \mu'_\pi = \left.\frac{\partial f}{\partial \rho_m}\right|_{T,\,\hat{\mathbf{e}},\,\nabla\mu'_\pi,\mathbf{E}_*},$$

$$\mathbf{p} = -\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{E}_*}\right|_{T,\,\hat{\mathbf{e}},\,\rho_m,\nabla\mu'_\pi}, \quad \boldsymbol{\pi}_m = \left.\frac{\partial f}{\partial(\nabla\mu'_\pi)}\right|_{T,\,\hat{\mathbf{e}},\,\rho_m,\mathbf{E}_*}. \tag{28}$$

Якщо розкласти вільну енергію f у ряд за збуреннями параметрів стану та для малих збурень обмежитися в цьому розвиненні квадратичними членами, то для ізотропного початково однорідного тіла отримаємо

$$f = f_0 - s_0\left(T-T_0\right) + \mu'_{\pi 0}\rho_m + \frac{1}{2}\rho_0^{-1}a_1^\sigma I_1^2 + \rho_0^{-1}a_2^\sigma I_2 + \frac{1}{2}a_T^s\left(T-T_0\right)^2 +$$
$$+\frac{1}{2}a_\rho^\mu\rho_m^2 + \frac{1}{2}a_\mu^\pi\left(\nabla\mu'_\pi\right)^2 + \frac{1}{2}a_E^p\mathbf{E}_*^2 + a_{eT}\rho_0^{-1}I_1\left(T-T_0\right) +$$
$$+a_{\rho T}\rho_m\left(T-T_0\right) + a_{e\rho}\rho_0^{-1}I_1\rho_m + a_{E\mu}\mathbf{E}_*\cdot\nabla\mu'_\pi .$$

Тут $I_1 = \hat{\mathbf{e}}:\hat{\mathbf{I}} \equiv e$, $I_2 = \hat{\mathbf{e}}:\hat{\mathbf{e}}$ — перший і другий інваріанти тензора деформації відповідно; a_1^σ, a_2^σ, a_T^s, a_ρ^μ, a_E^p, a_μ^π, a_{eT}, $a_{\rho T}$, $a_{e\rho}$, $a_{E\mu}$ — характеристики матеріалу; f_0, s_0 і $\mu'_{\pi 0}$ — значення вільної енергії, ентропії та приведеного потенціалу μ'_π у вихідному стані. Зазначимо, що, записуючи вираз для вільної енергії, у вихідному стані ми приймали $\hat{\mathbf{e}} = 0$, $T = T_0$, $\rho_m = 0$, $\mathbf{E}_* = 0$, $\nabla\mu'_\pi = 0$, $s = s_0$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 0$, $\mu'_\pi = \mu'_{\pi 0}$, $\mathbf{p} = 0$, $\boldsymbol{\pi}_m = 0$.

Враховуючи подання для вільної енергії, на основі формул (28) отримаємо такі лінійні рівняння стану

$$s = s_0 - \left[a_T^s\left(T-T_0\right) + \rho_0^{-1}a_{eT}e + a_{\rho T}\rho_m\right],$$
$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 2a_2^\sigma\hat{\mathbf{e}} + \left[a_1^\sigma e + a_{eT}\left(T-T_0\right) + a_{e\rho}\rho_m\right]\hat{\mathbf{I}},$$
$$\mu'_\pi = \mu'_{\pi 0} + a_\rho^\mu\rho_m + \rho_0^{-1}a_{e\rho}e + a_{\rho T}\left(T-T_0\right),$$
$$\mathbf{p} = -a_E^p\mathbf{E}_* - a_{E\mu}\nabla\mu'_\pi,$$
$$\boldsymbol{\pi}_m = a_\mu^\pi\nabla\mu'_\pi + a_{E\mu}\mathbf{E}_*. \tag{29}$$

Бачимо, що за обраного модельного опису причиною електричної поляризації є не лише електричне поле, а й градієнт величини μ'_π. Оскільки в околі поверхні тіла величина $\left|\nabla\mu'_\pi\right|$ відмінна від нуля [13, 15], то це спричинить приповерхневу поляризацію тіла [20]. Урахування такого взаємозв'язку може бути важливе для опису та дослідження електромагнітної емісії, спричиненої утворенням нової поверхні в тілі, або електромагнітного відгуку тіла на нестаціонарну силову дію на його поверхню [21].

7.2. Кінетичні співвідношення. Подамо рівняння (26) для виробництва ентропії у вигляді

$$\sigma_s = \sum_{k=1}^{2} \mathbf{j}_k \cdot \mathbf{X}_k , \tag{30}$$

де $\mathbf{j}_k$, $\mathbf{X}_k$ — термодинамічні потоки та сили

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{J}_{e*}, \quad \mathbf{X}_1 = \frac{1}{T}\mathbf{E}_*, \quad \mathbf{j}_2 = \mathbf{J}_q, \quad \mathbf{X}_2 = -\frac{1}{T^2}\nabla T . \tag{31}$$

Зі співвідношень (30), (31) у лінійному наближенні випливають такі кінетичні рівняння

$$\mathbf{j}_1 = L_{11}\mathbf{X}_1 + L_{12}\mathbf{X}_2, \quad \mathbf{j}_2 = L_{21}\mathbf{X}_1 + L_{22}\mathbf{X}_2 , \tag{32}$$

де L_1, L_2, L_{12}, L_{21} — кінетичні коефіцієнти. З огляду на принцип Онзагера [1] справджується рівність

$$L_{12} = L_{21} . \tag{33}$$

Враховуючи позначення (31), запишемо кінетичні рівняння (32) у вигляді [1]

$$\mathbf{J}_{e*} = \sigma_e \mathbf{E}_* + \sigma_e \eta \nabla T , \qquad \mathbf{J}_q = -\lambda \nabla T + \pi_t \mathbf{J}_{e*} , \tag{34}$$

де σ_e, λ — коефіцієнти електро- та теплопровідності, коефіцієнти η, π_t характеризують термоелектричні явища. Беручи до уваги рівняння (33), маємо, що $T\eta = -\pi_t$.

8. Ключові рівняння у лінійному наближенні

Рівняння балансу маси (6), перші два рівняння системи (16) і співвідношення (18), які відповідають законам Ампера, Фарадея, Гауса-Фарадея та Гауса-Кулона, рівняння балансу ентропії (22) й імпульсу (27), визначальні співвідношення (29) і (34) разом із відомими співвідношеннями Коші складають повну систему рівнянь електромагнітотермомеханіки поляризовних електромагнітних тіл за врахування локального зміщення маси. Запишемо її ключову форму в лінеаризованому наближенні відносно збурень функцій переміщення $\mathbf{u}$, температури T, напруженості електричного $\mathbf{E}$ й індукції магнітного $\mathbf{B}$ полів, питому густину наведеної маси ρ_m щодо вихідного стану, у якому $\mathbf{u} = 0$, $T = T_0$, $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, $\rho_m = 0$, $\nabla \mu'_\pi = 0$. Маємо

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \left(a_1^\sigma + a_2^\sigma\right)\nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{u}\right) + a_2^\sigma \Delta \mathbf{u} + a_{eT}\nabla T - a_{e\rho}\nabla\rho_m + \rho_0 \mathbf{F} ; \tag{35}$$

$$\begin{aligned} -\rho_0 T_0 a_T^s \frac{\partial T}{\partial t} &= \left(\lambda - \pi_t \sigma_e \eta\right)\Delta T + T_0 a_{eT} \frac{\partial\left(\nabla \cdot \mathbf{u}\right)}{\partial t} - \\ &- \rho_0 T_0 a_{\rho T} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} - \sigma_e \pi_t \nabla \cdot \mathbf{E} + \rho_0 \Re ; \end{aligned} \tag{36}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 ,$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma_e \mathbf{E} + \mu_0 \sigma_e \eta \nabla T + \mu_0 \left(\varepsilon_0 - \rho_0 a_E^p \right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} -$$
$$- \rho_0 \mu_0 a_{E\mu} \left(\frac{a_{e\rho}}{\rho_0} \frac{\partial \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{u} \right)}{\partial t} + a_{\rho T} \frac{\partial \nabla T}{\partial t} + a_\rho^\mu \frac{\partial \nabla \rho_m}{\partial t} \right),$$
$$\nabla \cdot \left\{ \left(\varepsilon_0 - \rho_0 a_E^p \right) \mathbf{E} - \rho_0 a_{E\mu} \left[\frac{a_{e\rho}}{\rho_0} \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{u} \right) + a_{\rho T} \nabla T + a_\rho^\mu \nabla \rho_m \right] \right\} = \rho_e; \quad (37)$$

$$\Delta \rho_m + \frac{1}{a_\mu^\pi a_\rho^\mu} \rho_m = -\frac{1}{a_\rho^\mu} \left(\frac{a_{e\rho}}{\rho_0} \Delta \left(\nabla \cdot \mathbf{u} \right) + a_{\rho T} \Delta T + \frac{a_{E\mu}}{a_\mu^\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} \right). \quad (38)$$

Зазначимо, що в рівнянні руху (35) відсутні пондеромоторні сили, а в рівнянні теплопровідності (36) — джоулеве тепло. Це зумовлено тим, що за вибраного вихідного стану подеромоторні сили та джоулеве тепло є нелінійні функції збурень полів. Відзначимо також, що рівняння (38) дозволяє визначити параметр ρ_m як деякий функціонал від $\mathbf{u}$, T, $\mathbf{E}$ та виключити ρ_m із рівнянь (35)-(37) і визначальних співвідношень (29). При цьому рівняння (35)-(37) стають інтегрально-диференціальні, а визначальні співвідношення (29) — просторово нелокальні. Покажемо це на прикладі безмежного середовища.

Знайдемо розв'язок рівняння (38). Оцінимо, насамперед, знаки коефіцієнтів у рівнянні (38). У стані термодинамічної рівноваги вільна енергія $F = U - Ts$ тіла, яка у нашому випадку є функція T, $\hat{\mathbf{e}}$, $\mathbf{p}$, ρ_m, π_m, набуває мінімального значення [22]. У разі відсутності збурень деформації, температури, векторів питомої поляризації $\mathbf{p}$ та питомого локального зміщення маси $\boldsymbol{\pi}_m$ для збурення вільної енергії тіла за врахування формули (9) отримаємо, що $\mathrm{F}(t) = \int_{(V)} \left[F(\mathbf{r},t) - F_0 \right] d\mathbf{r} = a_\rho^\mu \int_{(V)} \rho_m^2(\mathbf{r},t)\, d\mathbf{r} \ge 0$.

Звідси випливає додатна визначеність коефіцієнта a_ρ^μ. Аналогічним чином можна показати, що $a_\mu^\pi < 0$. Отож $a_\rho^\mu a_\mu^\pi < 0$. Відтак розв'язок рівняння (38) можна подати у вигляді [23]

$$\rho_m \left(\mathbf{r} \right) = \frac{1}{4\pi a_\rho^\mu} \int f \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}' \right) \left\{ \frac{a_{e\rho}}{\rho_0} \Delta' e \left(\mathbf{r}' \right) + a_{\rho T} \Delta' \left[T \left(\mathbf{r}' \right) - T_0 \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{a_{E\mu}}{a_\mu^\pi} \nabla' \cdot \mathbf{E} \left(\mathbf{r}' \right) \right\} d\mathbf{r}', \quad (39)$$

де $f(\mathbf{r}) = \mathrm{e}^{-kr}/r$ — розв'язок рівняння $\Delta f - k^2 f = -4\pi\delta(\mathbf{r})$, $k^2 = -\left(a_\mu^\pi a_\rho^\mu \right)^{-1}$, $e(\mathbf{r}') = \nabla' \cdot \mathbf{u} \left(\mathbf{r}' \right)$, штрих біля оператора Лапласа означає, що похідна береться за «штрихованими» координатами.

Розглянемо інтеграл

$$\int f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Delta' g(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' = \int \Delta'\left[f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')g(\mathbf{r}')\right]d\mathbf{r}' - \int g(\mathbf{r}')\Delta' f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\mathbf{r}' =$$
$$= \oint \nabla'\left[f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')g(\mathbf{r}')\right]\cdot \mathbf{n}' d\Sigma' - \int g(\mathbf{r}')\Delta f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\mathbf{r}', \tag{40}$$

де **n'** — зовнішня нормаль до поверхні (Σ').

Якщо поверхню (Σ') вибрати, наприклад, у вигляді сфери та спрямувати її радіус до безмежності, то поверхневий інтеграл у формулі (40) зникає. Таким чином отримаємо

$$\int f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Delta' g(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' = -\int g(\mathbf{r}')\Big\{\left[\Delta f(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - k^2 f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right] +$$
$$+ k^2 f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Big\} d\mathbf{r}' = -\int g(\mathbf{r}')\left[-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + k^2 f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right] d\mathbf{r}' =$$
$$= 4\pi g(\mathbf{r}) - k^2 \int f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')g(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'. \tag{41}$$

Враховуючи співвідношення (41), з формули (39) одержуємо, що

$$\rho_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{a_\rho^\mu}\left\{\frac{a_{e\rho}}{\rho_0}e(\mathbf{r}) + a_{\rho T}\left[T(\mathbf{r}) - T_0\right]\right\} -$$
$$- \frac{k^2}{4\pi a_\rho^\mu}\int f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\left\{\frac{a_{e\rho}}{\rho_0}e(\mathbf{r}') + a_{\rho T}\left[T(\mathbf{r}') - T_0\right] + a_\rho^\mu a_{E\mu}\nabla'\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}')\right\}d\mathbf{r}'. \tag{42}$$

Якщо врахувати також, що згідно рівнянь (15) і (18_2), $\nabla\cdot\mathbf{E} = \varepsilon_0^{-1}\left(\rho_e + \rho_{e\pi}\right)$, то співвідношення (42) можна записати так

$$\rho_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{a_\rho^\mu}\left\{\frac{a_{e\rho}}{\rho_0}e(\mathbf{r}) + a_{\rho T}\left[T(\mathbf{r}) - T_0\right]\right\} - \frac{k^2}{4\pi a_\rho^\mu}\int f(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \times$$
$$\times \left\{\frac{a_{e\rho}}{\rho_0}e(\mathbf{r}') + a_{\rho T}\left[T(\mathbf{r}') - T_0\right] + \frac{a_\rho^\mu a_{E\mu}}{\varepsilon_0}\left[\rho_e(\mathbf{r}') + \rho_{e\pi}(\mathbf{r}')\right]\right\}d\mathbf{r}'.$$

Підставимо співвідношення (42) у рівняння стану (29). У підсумку для ентропії s отримаємо

$$s(\mathbf{r}) = s_0 - \left(a_T^s + \frac{a_{\rho T}^2}{a_\rho^\mu}\right)\left[T(\mathbf{r}) - T_0\right] - \rho_0^{-1}\left(a_{eT} + \frac{a_{\rho T}a_{e\rho}}{a_\rho^\mu}\right)e(\mathbf{r}) +$$
$$+ \frac{k^2 a_{\rho T}}{4\pi a_\rho^\mu}\int f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\left\{\frac{a_{e\rho}}{\rho_0}e(\mathbf{r}') + a_{\rho T}\left[T(\mathbf{r}') - T_0\right] + a_\rho^\mu a_{E\mu}\nabla'\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}')\right\}d\mathbf{r}'.$$

Решта рівнянь стану мають подібну структуру, а тому їх не записуємо. Таким чином бачимо, що врахування локального зміщення маси привело до перенормування (зміни величини) характеристик середовища та нелокальності зв'язку між параметрами стану. За врахування виразу (42) для ρ_m ключові рівняння (35)-(37) стають інтегро-диференціальні.

Висновки. З використанням методів і підходів термодинаміки незворотних процесів, механіки й електродинаміки суцільних середовищ отримано повну систему співвідношень електромагнітотермомеханіки електропровідного поляризовного середовища з урахуванням локального зміщення маси. З'ясовано, що у цьому випадку для опису локального термодинамічного стану середовища слід ввести дві пари додаткових параметрів, а саме — наведеної маси ρ_m і приведеної енергетичної міри μ'_π впливу зміщення маси на внутрішню енергію, вектора $\boldsymbol{\pi}_m$ зміщення маси та просторового градієнта енергетичної міри μ'_π. Таке розширення простору параметрів стану дозволяє описати приповерхневу неоднорідність напружено-деформованого стану й електричної поляризації. З огляду на це, отримані у роботі співвідношення можуть бути корисні під час дослідження електромагнітної емісії внаслідок утворення нової поверхні у тілі або електромагнітного відгуку на локальну зовнішню силову дію на поверхню тіла.

Зазначимо також, що у разі виключення з теорії параметрів, які характеризують зміщення маси, приходимо до просторово нелокальної електромагнітотермомеханіки поляризовних тіл.

Література

[1] *Гроот де С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. — Москва: Мир, 1964. — 456 с.

[2] *Карнаухов В. Г., Киричок В. Ф.* Электротермовязкоупругость. — Киев: Наук. думка, 1988. — 320 с.

[3] *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. — Москва: Мир, 1991. — 560 с.

[4] *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. — Москва: Мир, 1984. — 159 с.

[5] *Седов Л. И.* Механика сплошной среды: В 2 т. — Москва: Наука, 1976. — Т. 1. — 536 с.

[6] *Хорошун Л.* Побудова динамічних рівнянь електромагнітомеханіки діелектриків і п'єзоелектриків на основі двоконтинуумної механіки // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. — 2006. — Вип. 3. — С. 177-198.

[7] *Колодій Б. І., Орловський А. А., Панасюк В. В.* Розсіяння електромагнітних хвиль на дрібних дефектах в плоскошаруватих середовищах. — Київ: Наук. думка, 1985. — 132 с.

[8] *Назарчук З. Т.* Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. — Киев: Наук. думка, 1989. — 244 с.

[9] *Бурак Я. И.* Уравнения электроупругости изотропного диэлектрика в электростатическом поле // У кн.: Бурак Я. Й. Вибрані праці. — Львів: Ахіл, 2001. — С. 17-24.

[10] *Грицина О., Кондрат В.* Термомеханічні процеси у в'язкій рідині з урахуванням локального зміщення маси // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. — 2006.— Вип. 4. — С. 39-46.

[11] *Математичне* моделювання термомеханічних процесів у пружних тілах із врахуванням локального зміщення маси / Бурак Я. Й., Чапля Є. Я., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р. // Доп. НАН України. — 2007. — № 4. — С. 45-49.

[12] *Бурак Я. Й.* Визначальні співвідношення локально-градієнтної термомеханіки // Доп. АН УССР. Сер. А. — 1987. — № 12. — С. 19-23.
[13] *Бурак Я. Й., Нагірний Т. С., Грицина О. Р.* Про один підхід до врахування приповерхневої неоднорідності в термомеханіці твердих розчинів // Доп. АН України. Сер. А. — 1991. — № 11. — С. 47-51.
[14] *Бурак Я. Й., Нагірний Т. С., Чапля Є. Я.* Про термодинамічні основи теорії локально-градієнтних механотермодифузійних систем // Мат. методи та фіз-мех. поля. — 1998. — Т. 41, № 1. — С. 62-72.
[15] *Грицина О. Р., Нагірний Т. С., Червінка К. А.* Механотермодифузійні процеси у розтягнутій пластині із врахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2002. — Т. 45, № 1. — С. 123-127.
[16] *Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.* Классическая электродинамика. — Москва: Наука, 1985. — 400 с.
[17] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — Москва: Наука, 1982. — 620 с.
[18] *Тамм И. Е.* Теория электричества. — Москва: Наука, 1976. — 616 с.
[19] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. — Москва: Наука, 1974. — 831 с.
[20] *Киселев В. Ф.* Поверхностные явления в полупроводниках и диэлектриках. — Москва: Наука, 1970. — 340 с.
[21] *Фурса Т. В., Савельев А. В., Осипов К. Ю.* Исследование взаимосвязи параметров электромагнитного отклика из диэлектрических материалов с характеристиками ударного возбуждения // Журнал технической физики. — 2003. — Т. 73, вып. 11. — С. 59-63.
[22] *Мюнстер А.* Химическая термодинамика. — Москва: Мир, 1971. — 296 с.
[23] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1967. — 436 с.

The equations of electro-magneto-thermo-mechanics of polarized nonferromagnetic solids taking into account a local displacement of mass

Vasyl Kondrat, Olha Hrytsyna

A complete set of equations of electro-magneto-thermo-mechanics of electroconducting polarized medium is obtained taking into account a local displacement of mass. It is shown that the set of conjugate parameters determining the equilibrium thermodynamic state, along with temperature and entropy, strain and stress tensors, vectors of the electrical field intensity and polarization requires an introduction of two pairs of additional parameters — an induced mass and energy measure μ'_π *of the effect of the mass displacement on internal energy, as well as a mass displacement vector and space gradient of the value* μ'_π*, which are caused by the account of the local displacement of mass. Such an extension of the state parameters space allows one to describe the near-surface inhomogeneity of the stress-strain state and electrical polarization. The account of the local displacement of mass also leads to the appearance of additional volumetric forces and redefinition of the stress tensor. It has been shown that the parameters describing the displacement of mass can be eliminated from the set of equations. This yields the spatio-nonlocal electro-magneto-thermo-mechanics of polarized solids.*

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2008, вип. 8, 69-83

Уравнения электромагнитотермомеханики поляризируемых неферромагнитных тел с учетом локального смещения массы

Василий Кондрат, Ольга Грицина

Получена полная система соотношений электромагнитотермомеханики электропроводной поляризуемой среды с учетом локального смещения массы. Показано, что множество сопряженных параметров, определяющих равновесное термодинамическое состояние, наряду с температурой-энтропией, тензорами деформации и напряжений, векторами напряженностей электрического поля и поляризации включает две пары новых параметров, а именно — наведенную массу и энергетическую меру μ'_π *влияния смещения массы на внутреннюю энергию, вектор смещения массы и пространственный градиент энергетической меры* μ'_π, *обусловленные учетом локального смещения массы. Такое расширение пространства параметров состояния позволяет описать приповерхностную неоднородность напряженно-деформированного состояния и электрической поляризации. Учет локального смещения массы приводит также к возникновению дополнительных объемных сил и переопределению тензора напряжений. Показано, что при исключении из теории параметров, характеризующих смещение массы, приходим к пространственно нелокальной электромагнитотермомеханике поляризуемых тел.*

Отримано 21.03.08