УДК 517.926

Моделювання дискретно-континуальних систем. Основи концепції квазіпохідних

Огляд

Роман Тацій[1], Марта Стасюк[2], Віктор Мазуренко[3]

[1] д. ф.-м. н., професор, Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, вул. Клепарівська, 35, Львів, Україна, 79000
[2] к. ф.-м. н., доцент, Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, вул. Клепарівська, 35, Львів, Україна, 79000 e-mail: marta_stasiuk@yahoo.com
[3] к. ф.-м. н., Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, Україна, 76005, e-mail: mazvic@ukr.net

У статті з'ясовано доцільність введення поняття квазіпохідних як ефективного апарату дослідження прикладних задач, що зводяться до розв'язування, так званих, квазідиференціальних рівнянь. Такі рівняння виникають під час дослідження реальних фізичних процесів, виводяться на основі законів збереження та зображуються в дивергентній формі. Основні етапи розвитку концепції квазіпохідних наведено в хронологічному порядку від кінця 30-х років минулого століття до сьогодення. Новий поштовх розвитку теорії квазідиференціальних рівнянь надано авторами. Основою цього було створення лінійної теорії скалярних і векторних квазідиференціальних рівнянь з узагальненими функціями в коефіцієнтах і правих частинах, які за допомогою певним чином введених квазіпохідних зводяться до коректних систем диференціальних рівнянь із мірами. Це дало можливість розвинути такі новітні напрямки досліджень, як спектральна теорія узагальнених самоспряжених і несамоспряжених задач, теорія стійкості, наближені методи тощо. За браком місця основні результати таких досліджень наведені у статті без доведень, проте, з посиланнями на відповідні публікації.

Ключові слова: квазіпохідна, квазідиференціальне рівняння, функція обмеженої варіації, міра, інтеграл Рімана-Стільтьєса.

Зміст

Вступ. Дослідження різноманітних фізичних процесів, які враховують природну єдність дискретного та неперервного, приводять до необхідності створення адекватних математичних моделей. Багато з них описуються диференціальними рівняннями, що містять доданки на взірець $\left(p(x)y^{(m)}\right)^{(n)}$ [1-4]. За умови недостатньої гладкості коефіцієнта $p(x)$ такі рівняння вже не можна звести (з допомогою операції n-кратного диференціювання) до звичайних диференціальних. Щоб підкреслити цей важливий факт, у науковій літературі їх називають *квазідиференціальними* рівняннями.

Розглянемо, наприклад, на відкритому інтервалі I дійсної осі квазідиференціальне рівняння другого порядку

$$\left(ay'\right)' + \lambda by = f \;, \tag{*}$$

де λ — параметр, a^{-1} — обмежена та вимірна (за Лебегом) на I функція, b, f — узагальнені функції нульового порядку (міри). Рівняння (*) є дискретно-неперервна модель багатьох фізико-механічних явищ [2, 3] (вимушені поперечні коливання струн змінного натягу, поздовжні та крутильні коливання стрижнів, що окрім розподілених, несуть на собі й зосереджені маси; поширення температури з урахуванням неперервних і дискретних джерел тощо). Коефіцієнт a може бути, наприклад, кусково-неперервною функцією (змінна площа попереднього перерізу стрижня). Тоді формальне виконання операції $\left(ay'\right)' \equiv ay'' + a'y'$, що диктується бажанням звести рівняння (*) до «класичної форми», призводить до відомої проблеми множення узагальнених функцій [44].

Інший приклад — квазідиференціальне рівняння 4-го порядку, що є математичною моделлю вимушених поперечних коливань стрижня з дискретно-неперервним розподілом параметрів й узагальненими зовнішніми навантаженнями [1]

$$\left(ay''\right)'' - \omega^2\left[-\left(by'\right)' + cy\right] = f_1 + f_2 \,. \tag{**}$$

Тут ω^2 — квадрат частоти коливань, a — поперечна жорсткість стрижня, b та c — узагальнений момент і маса відповідно, f_1, f_2 — узагальнене зовнішнє зусилля та момент. Коефіцієнт a тут знову може бути кусково-неперервний, b, c й f_1 — узагальнені функції нульового порядку, f_2 — узагальнена функція першого порядку.

Проблеми дослідження рівнянь вигляду (*), (**) та подібних типів починаються вже з означення їх розв'язків, а побудова лінійних (елементарних) теорій неможлива без застосування концепції квазіпохідних.

Мабуть, першим, хто вжив термін «квазідиференціальне рівняння», був Д. Шин [5-7]. Власне, йому й належить ідея введення квазіпохідних, яка дозволяє відмовитися від вимог гладкості коефіцієнтів чи звести їх до мінімуму. У роботах [8, 9] розглянено доволі загальні квазідиференціальні рівняння вигляду

$$f^{[n]} - lf = 0,\;\; \operatorname{Im} l \neq 0,\;\; a < x < b \,, \tag{1}$$

де $f^{[0]} = P_{00}(x)f,\ f^{[k]} = iP_{kk}(x)\dfrac{d}{dx}f^{[k-1]} + \sum\limits_{\nu=0}^{k-1} P_{k\nu}(x)f^{[\nu]},\ k=\overline{1,n},\ i=\sqrt{-1}$, і спряжені до них («$\overline{\cdot}$» означає комплексне спряження)

$$g^{\{n\}} - l\,g = 0, \quad \operatorname{Im} l \neq 0, \quad a < x < b, \tag{2}$$

$$g^{\{0\}} = Q_{00}(x)g, \quad g^{\{k\}} = iQ_{kk}(x)\frac{d}{dx}g^{\{k-1\}} + \sum_{\nu=0}^{k-1} Q_{k\nu}(x)g^{\{\nu\}}, \quad k=\overline{1,n},$$

$$Q_{k\nu} = \overline{P_{n-\nu,n-k}P^{-1}_{n-\nu,n-\nu}P_{n-k,n-k}}, \quad \nu \le k, \quad k,\nu = \overline{0,n}$$

за умов, що комплекснозначні функції $P_{k\nu}(x)\left(\nu \le k;\, k,\nu=\overline{0,n}\right)$ визначені та вимірні на інтервалі (a, b), а функції $P^{-1}_{kk}(x)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ і $P_{k\nu}(x)\left(\nu<k,\ k=\overline{1,n},\ \nu=\overline{0,n-1}\right)$ квадратично сумовні за Лебегом на кожному скінченному замкненому інтервалі $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$. При цьому функції $f(x)$ і $g(x)$ вважаються розв'язками рівнянь (1) і (2) відповідно, якщо вирази $f^{[k]}$ і $g^{\{k\}}\left(k=\overline{0,n-1}\right)$ є абсолютно неперервні та задовольняють відповідно рівності (1) і (2) майже всюди на інтервалі (a, b).

У праці [8] для рівнянь (1) і (2) доведено теореми про існування та єдиність розв'язків початкових задач і встановлено зв'язок між ними.

Ідеї Шина виявилися достатньо плідними та згодом були розвинені в різних аспектах у працях М. Г. Крейна [9, 10], Н. І. Ахієзера й І. М. Глазмана [11, 12], М. А. Наймарка [13], С. А. Орлова [14], Ф. С. Рофе-Бекетова та В. І. Когана [15, 16] та інших авторів (див. бібліографію в [13]).

Так, окремі розділи фундаментальних робіт [9, 12, 13] присвячені самоспряженому квазідиференціальному виразу парного порядку

$$l(y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(p_{n-k}(x)y^{(k)}\right)^{(k)} \tag{3}$$

і відповідному квазідиференціальному рівнянню

$$l(y) = f(x) \tag{4}$$

із вимірними на інтервалі (a, b) та локально сумовними за Лебегом на цьому інтервалі (тобто сумовними на кожному його компактному підінтервалі) коефіцієнтами $p_0^{-1}(x), p_1(x),..., p_n(x)$ і правою частиною $f(x)$. Для виразу (3) вводяться квазіпохідні

$$y^{[k]} = \frac{d^k y}{dx^k},\ k=\overline{0,n-1}; \quad y^{[n]} = p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n};$$

$$y^{[n+k]} = p_k(x)\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}} - \frac{d}{dx}y^{[n+k-1]},\ k=\overline{1,n-1},$$

і ставиться початкова задача

$$y^{[k]}(x_0) = c_k, \quad k = \overline{0, 2n-1}, \tag{5}$$

що має єдиний розв’язок у класі абсолютно неперервних функцій разом зі своїми похідними до $(2n - 1)$-го порядку включно. Доведення цього факту (який залишається правильним також для рівнянь $l(y) - \lambda y = f(x)$ із довільним комплексним параметром λ) ґрунтується на зведенні задачі (4), (5) із допомогою вектора $\mathbf{Y} = \left(y, y^{[1]}, y^{[2]}, ..., y^{[2n-1]}\right)^{\mathrm{T}}$ до вигляду

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y} + \mathbf{F}(x), \tag{6}$$

$$\mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0, \; x_0 \in I, \tag{7}$$

із вимірними та локально сумовними за Лебегом на інтервалі (a, b) функціональними матрицею $\mathbf{A}(x)$ і вектором $\mathbf{F}(x)$, і подальшим застосуванням методу послідовних наближень Пікара.

Для диференціальних рівнянь $l(y) = \lambda y$ довільного парного чи непарного порядку m із неперервними операторними коефіцієнтами загальний вигляд самоспряжених крайових задач на скінченному проміжку $[0, b]$ отримано у статті [15]. Застосований у ній метод ґрунтується на понятті ермітового бінарного відношення, заданого у довільному гільбертовому просторі. Виявляється, що задання такого відношення еквівалентне визначенню певних крайових умов, що описують самоспряжені розширення для операції $l(y)$. Операції, що досліджувалися у цитованій роботі, задаються виразом

$$l(y) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left\{ \left(p_{n-k}(x) y^{(k)}\right)^{(k)} - i\left[\left(q_{n-k}(x) y^{(k)}\right)^{(k-1)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(q_{n-k}(x) y^{(k-1)}\right)^{(k)}\right]\right\} + p_n(x) y$$

у випадку парного m і виразом

$$l(y) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left\{ i\left[\left(q_{n-k}(x) y^{(k)}\right)^{(k+1)} + \left(q_{n-k}(x) y^{(k+1)}\right)^{(k)}\right] + \left(p_{n-k}(x) y^{(k)}\right)^{(k)} \right\},$$

якщо m — непарне. До того ж відзначено, що умови неперервності коефіцієнтів можна послабити, якщо розглядати $l(y)$ як квазідиференціальну операцію. Власне, так її розглядають у роботі Ф. Волкера [17], де приймають, що скалярні коефіцієнти сумовні за Лебегом, а операцію непарного порядку визначено виразом

$$l(y) = (-1)^n \left\{ i\left[q_0(x)\left(q_0(x) y^{(n)}\right)' \right]^{(n)} + \left(p_0(x) y^{(n)}\right)^{(n)} \right\} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left\{ i\left[\left(q_{n-k}(x) y^{(k)}\right)^{(k+1)} + \left(q_{n-k}(x) y^{(k+1)}\right)^{(k)}\right] + \left(p_{n-k}(x) y^{(k)}\right)^{(k)} \right\}.$$

Застосовуючи теорію систем першого порядку [18], автор отримує двосторонні оцінки для розмірності лінійного многовиду розв'язків, що належать до $\mathbb{L}_2\left([0,\infty];\, \omega(x)dx\right)$, рівняння $l(y)=\lambda\,\omega(x)y$ із локально сумовною за Лебегом на інтервалі (a, b) ваговою функцією $\omega(x)$, такою що $\omega(x)>0$ майже всюди на (a, b). Подібні питання для рівнянь із матричними коефіцієнтами різними методами досліджували автори статей [16, 19].

Серед робіт зарубіжних математиків із теорії квазідиференціальних операторів, окрім цитованої роботи [17], відзначимо також праці К. Кодаіри [20], Й. Вайдмана [21, 22], Ф. Аткінсона [18], А. Зеттла, В. Еверітта, Л. Маркуса [23-30], Г. Бенке та Д. Гінтона [31-34]. Так, у [29] можна знайти огляд ряду результатів стосовно проблеми індексів дефекту операторів. У статті [21] у гільбертовому просторі $\mathbb{L}_2^r(a,b)$ функцій, сумовних із квадратом на інтервалі (a, b) із вагою $r(x)$, вивчається спектральна теорія операторів, породжених диференціальними виразами вигляду

$$l(y)=\frac{1}{r(x)}\left[-\frac{d}{dx}\,p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y\right]$$

із вимірними на (a, b) та локально сумовними за Лебегом на цьому інтервалі коефіцієнтами $p^{-1}(x), q(x)$ і $r(x)$, до того ж $p(x)>0$ й $r(x)>0$ майже всюди на (a, b). Близькі за виглядом вирази досліджено в монографії [18]. У роботі [21] ці дослідження розвинені на випадок формально самоспряжених квазідиференціальних виразів

$$l(y)=\frac{1}{r(x)}\left\{\sum_{j=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}(-1)^j\left(p_j(x)y^{(j)}\right)^{(j)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}(-1)^j\left[\left(q_j(x)y^{(j)}\right)^{(j+1)}-\left(q_j^*(x)y^{(j+1)}\right)^{(j)}\right]\right\}$$

довільного (парного чи непарного) порядку з вимірними на інтервалі (a, b) $(m\times m)$-матричнозначними коефіцієнтами $r(x), p_j(x), q_j(x)$, такими що $r(x)$ — додатно визначена для майже всіх $x\in(a,b)$ матриця, $p_j(x)$ — ермітові матриці. Окрім того, у випадку парного n $(n = 2k)$ приймають, що матриця $p_k(x)$ є регулярна $\forall\, x\in(a,b)$, а функції $\left|p_k^{-1}\right|, \left|p_k^{-1}q_{k-1}\right|, \left|p_{k-1}-q_{k-1}^*p_k^{-1}q_{k-1}\right|, \left|p_j\right|, \left|q_j\right| \left(j=\overline{0,k-2}\right), |r|$ — локально сумовними за Лебегом на (a, b). Якщо ж n непарне $(n = 2k + 1)$, то матриця $q_k(x)$ повинна бути абсолютно неперервна на (a, b), $\hat{q}_k(x)=q_k(x)-q_k^*(x)$ — регулярна $\forall\, x\in(a,b)$, а $\left|\hat{q}_k^{-1}\right|, \left|\hat{q}_k^{-1}q_{k-1}\right|, \left|\hat{q}_k^{-1}(p_k+q_k'\right|, \left|p_j\right|, \left|q_j\right| \left(j=\overline{0,k-1}\right), |r|$ — локально сумовні за Лебегом на (a, b).

Для $m = 1$ подібний клас квазідиференціальних виразів вивчено у роботах [24-26]. Квазідиференціальні вирази, що містять лише члени парного порядку

$\left(p_j(x)y^{(j)}\right)^{(j)}$, досліджені у праці [20]. Питання факторизації (розкладу на множники) квазідиференціальних операторів розглянуто в [28]. У статті [29] вивчено диференціальні вектор-оператори, породжені зліченною кількістю квазідиференціальних виразів на дійсній осі. Дослідженню крайових задач для звичайних диференціальних і квазідиференціальних операторів присвячено монографію [30]. У публікаціях [31-34] вивчено спектральну теорію диференціальних операторів парного та непарного порядків на півосі та на всій дійсній осі.

У статті [33] запропоновано загальний підхід до побудови (у вигляді рядів за параметром) фундаментальної системи розв'язків квазідиференціального рівняння довільного порядку вигляду

$$M[y]=\lambda N[y],$$

де $M[y]\equiv\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\left(p_i(x)y^{(i)}\right)^{(i)}$, $N[y]\equiv\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\left(q_j(x)y^{(j)}\right)^{(j)}$ — квазідиференціальні вирази порядків $2m$ і $2n$ ($m>n$) відповідно з інтегровними на деякому проміжку коефіцієнтами $p_0^{-1}(x), p_i(x)$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ і $q_j(x)\left(j=\overline{0,n}\right)$, λ — (комплексний) параметр. На прикладі рівняння другого порядку з кусково-аналітичними коефіцієнтами (з розривами першого роду у скінченному числі точок) проілюстровано конструктивний спосіб визначення коефіцієнтів характеристичних рядів відповідних крайових задач. Отримані результати розширили сферу застосовності методу характеристичних рядів на дискретно-континуальні моделі механічних систем. У статті [36], що є логічним продовженням цих досліджень, отримано структуру розв'язків, як диференціальних, так і квазідиференціальних рівнянь із кусковозмінними коефіцієнтами.

У роботах В. Я. Дерра [37-39] досліджено подібні до (1) квазідиференціальні рівняння

$$q_P^n x\equiv p_{nn}(t)\frac{d}{dx}q_P^{n-1}x+\sum_{k=0}^{n-1}p_{nk}(t)q_P^k x=f(t), \tag{8}$$

де $P=\{p_{ik}\}$ $\left(p_{ik}=0 \text{ для } k>i\right)$, $q_P^0 x=p_{00}(t)x,$

$$q_P^k x=p_{kk}(t)\frac{d}{dt}q_P^{k-1}x+\sum_{\nu=0}^{k-1}p_{k\nu}(t)q_P^{\nu}x,\quad k=\overline{1,n},$$

з дійснозначними коефіцієнтами $p_{ik}(t), k\le i$, та локально сумовними за Лебегом на інтервалі (a, b) функціями $p_{ii}^{-1}(t), p_{ik}(t)p_{ii}^{-1}(t), f(t)p_{nn}^{-1}(t)$. На випадок таких рівнянь переносяться основні твердження теорії неосциляції, вводиться поняття узагальненої задачі Валле-Пуссена, розв'язок якої шукається в класі функцій із кусково абсолютно неперервними квазіпохідними. Автор праці [40] розв'язок звичайного диференціального рівняння з розподілами в коефіцієнтах визначає як розв'язок відповідного квазідиференціального рівняння.

Відзначимо також, що суттєві результати в теорії квазідиференціальних рівнянь на графах отримані Ю. В. Покорним і його учнями. Повне уявлення про їх досягнення й актуальність досліджень у цьому напрямку можна отримати з колективної монографії [41].

Позаяк ми зачепили вже квазідиференціальні рівняння з розподілами (Шварца) в коефіцієнтах, то доречно згадати також про дослідження звичайних диференціальних рівнянь з узагальненими функціями у коефіцієнтах. Як відомо, крайові задачі для таких рівнянь успішно вивчаються математиками та механіками віддавна. До введення поняття δ-функції точкові сингулярності з'являлись у задачах у формі специфічних умов спряження для розв'язку та його похідних у точках, які з погляду сучасної теорії належать до сингулярного носія коефіцієнтів рівняння. Такі дослідження здебільше мали частковий характер, бо стосувалися рівнянь конкретного вигляду. Рівняння, коефіцієнти яких містять імпульсні особливості (типу δ-функції та її похідних), описують процеси у фізичних системах із дискретно неперервним розподілом параметрів — стержнях, пластинах, оболонках із зосередженими в точках, на лініях чи окремих поверхнях масами та моментами інерції, несучими пластами нульової товщини тощо.

Ця тематика отримала суттєвий поштовх для розвитку завдяки фундаментальним роботам М. Г. Крейна й І. С. Каца (див. [18, с. 648]) стосовно диференціальних рівнянь другого порядку, що моделюють вільні коливання струни, маса якої допускає, окрім неперервного, ще й точковий розподіл. Із математичної точки зору дослідження пов'язані з узагальненим диференціальним виразом

$$l_{MQ}(y) = -\frac{d}{dM(x)}\left[y^{+}(x) - \int_{c+0}^{x+0} y(s)dQ(s) \right], \tag{9}$$

де $M(x)$ — неспадна на деякому скінченному чи нескінченному інтервалі функція, $Q(x)$ — різниця двох неспадних функцій, $y^{+}(x)$ — правостороння похідна функції $y(x)$. Якщо $M(x)$ і $Q(x)$ абсолютно неперервні та майже всюди $M'(x) = \rho(x)$, $Q'(x) = q(x)$, то диференціальне рівняння $l_{MQ}(y) - \lambda y = 0$ рівносильне рівнянню $-y'' + \left[q(x) - \lambda\rho(x)\right]y = 0$.

Для $Q(x) = const$ диференціальний вираз (9) вивчав В. Феллер [42, 43]. Його робота [54] цікава тим, що містить внутрішнє аксіоматичне означення операції $-\frac{d}{dM(x)}y^{+}(x)$. Завдяки Феллеру такі диференціальні операції почали застосовувати у теорії марковських процесів. Однак, автор визначав операцію так, що вона втрачала сенс за наявності у функції $M(x)$ інтервалів постійності. Внаслідок цього його результати виявилися недостатньо загальними, бо не охоплювали важливий випадок дискретних марковських процесів, таких як, наприклад, процеси розмноження та вимирання (їх дослідження приводить до моделі навантаженої струни).

Значна кількість публікацій (як теоретичного, так і прикладного характеру) з теорії диференціальних рівнянь і систем рівнянь із розподілами у коефіцієнтах свідчить про актуальність постановок задач, які поєднують континуальність із дискретністю. У монографії О. Філіппова [44] зроблено огляд різних класів диференціальних рівнянь із узагальненими функціями, у тому числі, диференціальних рівнянь із імпульсними коефіцієнтами, лінійних і найпростіших нелінійних рівнянь із узагальненими функціями в правій частині, лінійних систем, які не розв'язані відносно похідних і мають розривні розв'язки, а також диференціальних рівнянь, що містять узагальнені функції в коефіцієнтах. Вказано деякі класи рівнянь і систем, які шляхом заміни змінних зводять до систем Каратеодорі, що дозволяє довести існування та дослідити властивості їх розв'язків. У роботі наведено численну бібліографію, що дає повне уявлення про стан досліджень у цьому напрямку.

Відзначимо, що під час дослідження (квазі)диференціальних рівнянь із розподілами одним із найважливіших питань є раціональне означення розв'язку. Як відомо [57], такі рівняння з допомогою введення квазіпохідних вдається звести до лінійної диференціальної системи першого порядку на взірець

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{C}'(x)\mathbf{Y} + \mathbf{F}'(x). \tag{10}$$

Якщо $\mathbf{C}(x)$ і $\mathbf{F}(x)$ абсолютно неперервні [18], то система (10) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{Y}_0 + \int_{x_0}^{x} d\mathbf{C}(t)\mathbf{Y}(t) + \mathbf{F}(x) - \mathbf{F}\left(x_0\right) \tag{11}$$

з інтегралом Лебега. Це властиво для квазідиференціальних рівнянь із сумовними за Лебегом коефіцієнтами; до того ж система (10) є система типу Каратеодорі та допускає запис у вигляді (6). Еквівалентність зберігається й тоді, коли $\mathbf{C}(x)$ — абсолютно неперервна, а $\mathbf{F}(x)$ має обмежену варіацію [46] або коли $\mathbf{C}(x)$ і $\mathbf{F}(x)$ — неперервні функції обмеженої варіації [47]. При цьому диференціювання та рівність у (10) розуміють у сенсі теорії узагальнених функцій, а в другому випадку інтеграл у рівнянні (11) розуміють у сенсі класичного інтеграла Рімана-Стільтьєса.

Усе це не узагальнюється безпосередньо на випадок, коли $\mathbf{C}(x)$ є розривна функція обмеженої варіації, навіть за умови, що $\mathbf{F}(x) \equiv \mathbf{0}$. У цьому випадку розриви матриці-функції $\mathbf{C}(x)$ обов'язково породжують розриви розв'язку $\mathbf{Y}(x)$ і до того ж в одних і тих же ж точках. Тому інтеграл Стільтьєса у рівнянні (11) може не існувати (див. приклад [46, с. 214]). Теорія узагальнених функцій тут також не допомагає, бо, наприклад, добуток δ-функції на її невизначений інтеграл (функцію Хевісайда) не існує, а відтак не визначений добуток матричної *міри Стільтьєса* [46, с. 160] $\mathbf{C}'(x)$ на функцію обмеженої варіації.

Однак, якщо для функцій обмеженої варіації розрізняти значення $\mathbf{Y}(x-0)$, $\mathbf{Y}(x), \mathbf{Y}(x+0)$ і розглядати лівий $\mathbf{Y}(x)-\mathbf{Y}(x-0)$ і правий $\mathbf{Y}(x+0)-\mathbf{Y}(x)$ стрибки, то вдається визначити інтеграл у рівнянні (11), якщо $\mathbf{C}(x)$ і $\mathbf{Y}(x)$ є розривні функції обмеженої варіації. За різних припущень (наприклад, якщо $\mathbf{Y}(x)=\mathbf{Y}(x-0)$, $\mathbf{Y}(x)=\left[\mathbf{Y}(x-0)+\mathbf{Y}(x+0)\right]/2$ або $\mathbf{Y}(x)=\mathbf{Y}(x+0)$ тощо) отримують різні умови існування розв'язку рівняння (11) і відповідно системи (10), відрізняються й самі розв'язки. У монографіях [44, 49] відзначено, що відомі означення розв'язку системи (10) у такій ситуації реалізуються в рамках трьох основних підходів.

Перший *підхід* пов'язаний зі спробами формалізації цієї системи в рамках теорії розподілів і зводиться до проблеми множення узагальнених функцій на розривні. Спочатку на основі секвенціального підходу [50] вводиться означення добутку міри на функцію обмеженої варіації, а потім відповідним чином дається означення розв'язку системи (10) [47, 49, 51, 52]. *Другий підхід* започаткований у роботі Я. Курцвейля [65] і передбачає формальний перехід до інтегрального рівняння (11), в якому інтеграл розуміється у сенсі Перрона-Стільтьєса, Лебега-Стільтьєса чи як некласичний інтеграл Рімана-Стільтьєса [54-57]. За такого підходу, стрибки розв'язку залежатимуть від значень функції $\mathbf{C}(x)$ у точках розриву. *Третій підхід* базується на ідеї апроксимації елементів матриці-функції $\mathbf{C}(x)$ послідовностями гладких функцій [49, 58]. При цьому розв'язок системи (10), що визначається границею своїх гладких наближень, збігається з розв'язком інтегрального рівняння (11).

Як бачимо, поняття розв'язку для диференціальних рівнянь із розподілами не є однозначно визначене і головною причиною цього є проблема множення узагальнених функцій. Під час вибору того чи іншого означення розв'язку потрібно повніше враховувати характер граничного переходу, що приводить до рівняння, яке розглядається. Цього недоліку позбавлений підхід, прийнятий у роботах [45, 59-67], і якого ми дотримуватимемось у цій статті. У рамках такого підходу під розв'язком системи (10) розуміють вектор-функцію обмеженої варіації, що справджує систему в сенсі теорії розподілів, причому вказуються ефективні (в термінах матриць $\mathbf{C}(x)$ і $\mathbf{F}(x)$) умови, за яких система (10) є *коректна*, тобто під час її дослідження не виникає проблема множення функціоналів.

Статтю організовано наступним чином. У першому пункті вивчається одна з важливих проблем, яка виникає під час дослідження диференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами, — проблема множення розподілів. Тут встановлені необхідні та достатні умови, за яких такий добуток існує в рамках теорії узагальнених функцій. У другому пункті розглядається клас *коректних* систем із мірами та вивчаються питання існування та єдиності розв'язку початкових задач для таких систем. У пункті 3 на конкретних прикладах диференціальних рівнянь із розподілами в коефіцієнтах показано переваги *концепції квазіпохідних* для дослідження таких рівнянь. На основі цієї концепції у наступних двох пунктах встановлені теореми існування та єдиності розв'язків початкових задач для однорідних квазідиференціальних рівнянь (вихідного та спряженого) з мірами й отримано вирази для стрибків цих розв'язків. Пункт 6 присвячено побудові лінійної теорії таких рівнянь. Отримано аналог формули Ліувілля-Остроградського-Якобі, введено поняття фундаментальної системи розв'язків, з'ясовано структуру загального розв'язку. Окремо, у пункті 7, встановлено також структуру фундаментальної матриці, що відповідає квазідиференціальному рівнянню. Отримана структура фундаментальної матриці переконує в тому, що таку концепцію закладено природою квазідиференціальних рівнянь. Нарешті, в останньому пункті досліджуються неоднорідні квазідиференціальні рівняння з розподілами. Спершу з'ясовано допустимий порядок найстаршої узагальненої похідної у правій частині таких рівнянь, далі отримано подання розв'язків початкових задач в інтегральному вигляді з допомогою функції Коші та її квазіпохідних.

У статті дотримуватимемося таких позначень: I — відкритий інтервал дійсної осі $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}^{p\times q}$ — лінійний простір комплексних ($p\times q$)-матриць $\mathbf{C}=\left(c_{ij}\right)_{i,j=1}^{p,q}$ із нормою $\left|\mathbf{C}\right|=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\left|c_{ij}\right|$; Т — символ транспонування; «$*$» — операція спряження (тобто комплексне спряження та транспонування); $\mathbb{C}^p$ — p-вимірний лінійний комплексний простір з (евклідовою) нормою $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_p^2}$ елемента $x=(x_1,x_2,...,x_p)^{\mathrm{T}}$; $\mathbb{C}^k(I)$ — простір k разів локально неперервно диференційовних на інтервалі I функцій, тобто функцій, що мають неперервні похідні до k-го порядку включно на кожному компактному підінтервалі $[a,b]\subset I$; $\mathbb{AC}(I),\mathbb{L}(I),\mathbb{L}_2(I)$ — відповідно простори локально абсолютно неперервних, локально сумовних за Лебегом і локально квадратично інтегровних за Лебегом на інтервалі I функцій; $\mathbb{BV}_{loc}^{+}(I)$ — простір функцій локально обмеженої на інтервалі I варіації (вважаємо, що елементи функціональних матриць належать до відповідних просторів); $\mathbb{D}(I)$ — простір неперервних функцій $I\to\mathbb{C}$ з компактним носієм, спряжений до якого є простір $\mathbb{D}'(I)$ розподілів (Шварца); 0 — нульовий елемент (матриця, вектор або число); $\mathbf{E}$ — одинична матриця; (f,φ) — значення функціонала f на функції $\varphi(x)$; $\Delta g(x)=g(x)-g(x-0)$ — стрибок функції $g\in\mathbb{BV}_{loc}^{+}(I)$ у точці $x\in I$.

1. Про коректність добутку мір на функції обмеженої варіації

Як відомо, добуток двох узагальнених функцій не завжди існує. Так, наприклад, не існує (тобто неоднозначний або некоректний) добуток функції Хевісайда на її узагальнену похідну. Щоб дослідити коректність добутків $\mathbf{F}'(x)\mathbf{G}(x)$ і $\mathbf{F}(x)\mathbf{G}'(x)$, де $\mathbf{F}'(x)$, $\mathbf{G}'(x)$ — узагальнені похідні функціональних матриць $\mathbf{F}(x)$ і $\mathbf{G}(x)$ з елементами з простору $\mathbb{BV}_{loc}^{+}(I)$, запишемо дискретні компоненти $\mathbf{F}_d(x)$ і $\mathbf{G}_d(x)$ матриць-функцій $\mathbf{F}(x)$ і $\mathbf{G}(x)$ у вигляді

$$\mathbf{F}_d(x)=\sum_{x_s\le x}\left[\mathbf{F}\left(x_s\right)-\mathbf{F}\left(x_s-0\right)\right]=\sum_{s}\Delta\mathbf{F}\left(x_s\right)H\left(x-x_s\right),$$
$$\mathbf{G}_d(x)=\sum_{x_s\le x}\left[\mathbf{G}\left(x_s\right)-\mathbf{G}\left(x_s-0\right)\right]=\sum_{s}\Delta\mathbf{G}\left(x_s\right)H\left(x-x_s\right),\tag{12}$$

де $\Delta\mathbf{F}\left(x_s\right)$ і $\Delta\mathbf{G}\left(x_s\right)$ — стрибки матриць $\mathbf{F}(x)$ і $\mathbf{G}(x)$ відповідно, а $H\left(x-x_s\right)$ — зміщена функція Хевісайда. Тоді, враховуючи подання (12) і те, що узагальнена похідна від функції Хевісайда є дельта-функція Дірака, тобто $H'\left(x-x_s\right)=$ $=\delta\left(x-x_s\right)$, отримуємо

$$\mathbf{F}'(x) = \mathbf{F}'_c(x) + \sum_s \Delta\mathbf{F}(x_s)\delta(x - x_s),$$
$$\mathbf{G}'(x) = \mathbf{G}'_c(x) + \sum_s \Delta\mathbf{G}(x_s)\delta(x - x_s). \tag{13}$$

Використовуючи зображення (13), запишемо формально добутки

$$\mathbf{F}'\mathbf{G} = \mathbf{F}'\mathbf{G}_c + \mathbf{F}'_c\mathbf{G}_d + \sum_{r,s} \Delta\mathbf{F}(x_r)\Delta\mathbf{G}(x_s)\delta(x - x_r)H(x - x_s),$$
$$\mathbf{F}\mathbf{G}' = \mathbf{F}\mathbf{G}'_c + \mathbf{F}_c\mathbf{G}'_d + \sum_{r,s} \Delta\mathbf{F}(x_r)\Delta\mathbf{G}(x_s)\delta(x - x_s)H(x - x_r). \tag{14}$$

Добутки під знаками сум у формулах (14), взагалі кажучи, неоднозначні в сенсі теорії узагальнених функцій, бо

$$\delta(x - x_r)H(x - x_s) = \begin{cases} \delta(x - x_r), & \text{якщо } x_r > x_s, \\ 0, & \text{якщо } x_r < x_s, \end{cases}$$

а для $x_r = x_s$ такий добуток не існує. Ці міркування вимагають такого означення.

Означення 1. Добутки $\mathbf{F}'(x)\mathbf{G}(x)$ і $\mathbf{F}(x)\mathbf{G}'(x)$ називатимемо *коректними*, якщо для довільного $x \in I$ виконується умова

$$\Delta\mathbf{F}(x)\Delta\mathbf{G}(x) = 0. \tag{15}$$

Враховуючи *означення 1*, добутки (14) можна записати так

$$\mathbf{F}'\mathbf{G} = \mathbf{F}'\mathbf{G}_c + \mathbf{F}'_c\mathbf{G}_d + \sum_{r>s} \Delta\mathbf{F}(x_r)\Delta\mathbf{G}(x_s)\delta(x - x_r),$$
$$\mathbf{F}\mathbf{G}' = \mathbf{F}\mathbf{G}'_c + \mathbf{F}_c\mathbf{G}'_d + \sum_{r<s} \Delta\mathbf{F}(x_r)\Delta\mathbf{G}(x_s)\delta(x - x_s),$$

де позначено $\sum\limits_{r>s} \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_r \sum\limits_s$ за умови $x_r > x_s$ чи навпаки.

Позначимо через $\mathbf{H}(x)$ і $\mathbf{Z}(x)$ первісні мір $\mathbf{F}'(x)\mathbf{G}(x)$ і $\mathbf{F}(x)\mathbf{G}'(x)$ відповідно, тобто $\mathbf{H}'(x) = \mathbf{F}'(x)\mathbf{G}(x),\ \mathbf{Z}'(x) = \mathbf{F}(x)\mathbf{G}'(x)$.

Теорема 1 [18, 74]. Нехай $\mathbf{F}(x)$, $\mathbf{G}(x)$ належать до $\mathbb{BV}^+_{loc}(I)$. Тоді:

1) $\mathbf{H}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} d\mathbf{F}(t)\mathbf{G}(t) + \mathbf{H}_0$, $\mathbf{Z}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \mathbf{F}(t)d\mathbf{G}(t) + \mathbf{Z}_0$, де $x_0, x \in I$, $\mathbf{H}_0, \mathbf{Z}_0$ — довільні сталі матриці, а інтеграли в правих частинах є некласичні матричні інтеграли Рімана-Стільтьєса;

2) $\mathbf{H}(x)$, $\mathbf{Z}(x)$ належать до $\mathbb{BV}^+_{loc}(I)$;

3) $\Delta\mathbf{H}(x) = \Delta\mathbf{F}(x)\mathbf{G}(x-0),\ \Delta\mathbf{Z}(x) = \mathbf{F}(x-0)\Delta\mathbf{G}(x) \quad \forall x \in I$.

Зауваження 1. За умови коректності (15) добутків $\mathbf{F}'(x)\mathbf{G}(x)$ і $\mathbf{F}(x)\mathbf{G}'(x)$ інтеграли у підпункті 1 є класичні матричні інтеграли Рімана-Стільтьєса (насправді — сукупності таких скалярних інтегралів). При цьому рівності у підпункті 3 для довільного $x \in I$ набувають вигляду $\Delta\mathbf{H}(x) = \Delta\mathbf{F}(x)\mathbf{G}(x)$, $\Delta\mathbf{Z}(x) = \mathbf{F}(x)\Delta\mathbf{G}(x)$.

2. Лінійні диференціальні системи з мірами

2.1. Розглянемо початкову задачу для однорідної системи диференціальних рівнянь із мірами

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{C}'(x)\mathbf{Y}(x), \quad x \in I, \tag{16}$$

$$\mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0, \quad x_0 \in I, \tag{17}$$

де $\mathbf{Y}(x)$ — невідома n-вимірна вектор-функція, $\mathbf{C}(x)$ — функціональна $(n\times n)$-матриця, елементи якої належать класу $\mathbb{BV}^+_{loc}(I)$, $\mathbf{C}'(x)$ — її узагальнена похідна.

Відзначимо, що стрибки матриці-функції $\mathbf{C}(x)$ породжують також стрибки розв'язку $\mathbf{Y}(x)$ рівняння (16), причому у тих же ж точках, тому добуток $\mathbf{C}'(x)\mathbf{Y}(x)$, взагалі кажучи, неоднозначний.

Означення 2. Вважаємо, що вектор $\mathbf{Y}(x)$ належить до *допустимого класу* $\mathbb{D}_C(I)$, якщо $\mathbf{Y} \in \mathbb{BV}^+_{loc}(I)$ і $\Delta\mathbf{C}(x)\Delta\mathbf{Y}(x) = 0 \quad \forall x \in I$.

Означення 3. Під *розв'язком* рівняння (16) будемо розуміти вектор-функцію $\mathbf{Y}(x)$ із класу $\mathbb{D}_C(I)$, що задовольняє це рівняння в узагальненому сенсі: $(\mathbf{Y}',\varphi) = (\mathbf{C}'\mathbf{Y},\varphi) \quad \forall\varphi \in \mathbb{D}(I)$.

Теорема 2 [74]. У класі функцій $\mathbb{D}_C(I)$ задача (16), (17) та інтегральне рівняння

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{Y}_0 + \int_{x_0}^{x} d\mathbf{C}(t)\mathbf{Y}(t), \quad x_0, x \in I, \tag{18}$$

— еквівалентні.

Наступне твердження дає ефективний критерій належності розв'язку $\mathbf{Y}(x)$ рівняння (18) до класу $\mathbb{D}_C(I)$.

Теорема 3 [60-74]. Для існування розв'язку $\mathbf{Y}(x)$ рівняння (18) у класі $\mathbb{D}_C(I)$ необхідно та досить виконання умови

$$\left[\Delta\mathbf{C}(x)\right]^2 = \mathbf{0} \quad \forall x \in I. \tag{19}$$

Наслідок 1. За умови (19) стрибок довільного розв'язку рівняння (16) визначається формулою $\Delta\mathbf{Y}(x) = \Delta\mathbf{C}(x)\mathbf{Y}(x)$.

За умови (19) однорідне рівняння (16) називатимемо *коректним.*

2.2. Розглянемо тепер неоднорідну початкову задачу

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{C}'(x)\mathbf{Y}(x) + \mathbf{F}'(x), \tag{20}$$

$$\mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0, \tag{21}$$

де вектор-функція $\mathbf{F} \in \mathbb{BV}_{loc}^{+}(I)$, а відповідне інтегральне рівняння має вигляд

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{Y}_0 + \int_{x_0}^{x} d\mathbf{C}(t)\mathbf{Y}(t) + \mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x_0) . \tag{22}$$

Умова (19) ще не забезпечує належності розв'язку рівняння (22) до класу $\mathbb{D}_C(I)$ через наявність доданка $\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x_0)$, однак справджується твердження.

Теорема 4 [74]. Якщо однорідна система (16) коректна, то для існування розв'язку рівняння (20) у класі $\mathbb{D}_C(I)$ необхідно та досить виконання умови

$$\Delta\mathbf{C}(x)\Delta\mathbf{F}(x) = \mathbf{0} \quad \forall x \in I . \tag{23}$$

Наслідок 2. За умов (19), (23) початкова задача (20), (21) має єдиний розв'язок $\mathbf{Y} \in \mathbb{D}_C(I)$, що подається у формі Коші

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{B}(x, x_0)\mathbf{Y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{B}(x,s)\, d\,\mathbf{F}(s) , \tag{24}$$

де $\mathbf{B}(x, s)$ — фундаментальна матриця рівняння (16), що за змінною x є розв'язком цього рівняння та для $x = s \in I$ справджує умову нормованості $\mathbf{B}(s,s) = \mathbf{E}$.

За умов (19), (23) неоднорідне рівняння (20) також називатимемо *коректним*.

3. Концепція квазіпохідних

3.1. Диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' - a_1(x)y = 0 , \tag{25}$$

де $y(x)$ — невідома функція від дійсної змінної $x \in I$, $a_1(x) = b_1'(x)$, до того ж $b_1 \in \mathbb{BV}_{loc}^{+}(I)$, звичайним чином зводиться до диференціальної системи першого порядку

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{C}'(x)\mathbf{Y}(x) , \tag{26}$$

де $\mathbf{Y} = (y, y')^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{C}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1(x) & 0 \end{pmatrix}$.

Позаяк $\Delta\mathbf{C}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta b_1(x) & 0 \end{pmatrix}$, то $\left[\Delta\mathbf{C}(x)\right]^2 = 0$ для довільного $x \in I$ і, таким чином, система (26) — коректна.

Якщо під розв'язком диференціального рівняння (25) розуміти першу координату $y(x)$ вектора $\mathbf{Y}(x)$, то це рівняння та система (26) — еквівалентні (в узагальненому сенсі). Ця обставина дозволяє не лише побудувати лінійну (елементарну) теорію рівняння (25), але й вивчити локальні властивості його розв'язку $y(x)$ і похідної $y'(x)$.

3.2. Багато задач математичної фізики приводять до дослідження диференціального рівняння

$$l_2[y] \equiv \left(a_0(x)y'\right)' - a_1(x)y = 0\,, \tag{27}$$

де $a_0^{-1}(x)$ — локально обмежена та вимірна на інтервалі I функція, а функція $a_1(x) = b_1'(x)$, де $b_1 \in \mathbb{BV}_{loc}^{+}(I)$, є міра Стільтьєса на інтервалі I (узагальнена функція нульового порядку).

Зовнішня «близькість» рівнянь (25) і (27) оманлива. Суттєва відмінність між ними полягає в тому, що за наведених умов на коефіцієнти $a_0(x)$ і $a_1(x)$ лінійну теорію рівняння (27), на відміну від рівняння (25), неможливо побудувати в термінах розв'язку $y(x)$ і його похідної $y'(x)$, залишаючись у рамках класичної теорії узагальнених функцій. Інакше кажучи, в загальному випадку (коли $a_0^{-1}(x)$ обмежена та вимірна функція) з допомогою вектора $\mathbf{Y}(x) = \left(y(x), y'(x)\right)^T$ це рівняння *не зводиться до коректної системи першого порядку*.

Справді, виконуючи в (27) формально операцію диференціювання, приходимо до диференціального рівняння

$$a_0(x)y'' + a_0'(x)y' - a_1(x)y = 0$$

або

$$y'' + a_0^{-1}(x)a_0'(x)y' - a_0^{-1}(x)a_1(x)y = 0\,.$$

Нехай, для прикладу, $a_0(x)$ — східчаста функція, що не набуває нульових значень на довільному компакті з I. Тоді $a_0^{-1}(x)$ — теж східчаста функція (очевидно, обмежена та вимірна), точки розривів якої співпадають із точками розривів $a_0(x)$. Це означає, що добутки $a_0^{-1}(x)a_0'(x)$ і $a_0^{-1}(x)a_1(x)$ у загальному випадку не визначені. Вони існують, якщо, скажімо, $a_0(x)$ — неперервна функція локально обмеженої на I варіації, але таке припущення сильно обмежує можливість дослідження цілих класів реальних фізичних процесів (поздовжні коливання стержнів із кусково-змінним перерізом, крутильні коливання валів змінної жорсткості, температурні задачі з кусково-змінним коефіцієнтом теплопровідності тощо).

Цих ускладнень можна уникнути, якщо використати наступні міркування. Розглянемо вираз $y^{[1]} = a_0(x)y'$, який назвемо *квазіпохідною* диференціального виразу $l_2[y]$. Легко переконатися, що з допомогою вектора $\mathbf{Y} = \left(y, y'\right)^{\mathrm{T}}$ рівняння (27) зводиться до системи вигляду (16) із матрицею

$$\mathbf{C}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & a_0^{-1}(x) \\ a_1(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Ця система — коректна, оскільки знову $\left[\Delta\mathbf{C}(x)\right]^2 = 0$ для довільного $x \in I$. Відтак ми отримали можливість побудувати лінійну теорію рівняння (27), яке надалі називатимемо *квазідиференціальним*, у термінах розв'язку $y(x)$ і його квазіпохідної $y^{[1]}(x)$.

3.3. Ідея введення квазіпохідних поширюється також на рівняння вищих порядків. Тут ми обмежимося її ілюстрацією у випадку квазідиференціального рівняння четвертого порядку

$$l_4[y] \equiv \left(a_0(x)y''\right)'' - \left(a_1(x)y'\right)' + a_2(x)y = 0 . \qquad (28)$$

Якщо від коефіцієнтів $a_i(x)$, $i = \overline{0,2}$, вимагати, щоб вони належали до простору $\mathbb{C}^{2-i}(I)$, то, виконуючи операції диференціювання, отримаємо рівняння четвертого порядку з неперервними коефіцієнтами, розв'язок якого слід шукати у класі $\mathbb{C}^4(I)$. Втім, такі вимоги є надто жорсткі, бо рівняння (28) зберігає сенс і без припущення про гладкість $a_0(x)$, $a_1(x)$ і вимоги $y \in \mathbb{C}^4(I)$. Позначимо через

$$y^{[0]} = y, \quad y^{[1]} = y', \quad y^{[2]} = a_0(x)y'', \quad y^{[3]} = a_1(x)y' - \left(a_0(x)y''\right)'$$

квазіпохідні диференціального виразу $l_4[y]$. Якщо рівняння (28) тлумачити, скажімо, як рівняння поперечного згину балки (без врахування дії зовнішніх чинників), яке отримується внаслідок відокремлення змінних у відповідному рівнянні з частинними похідними [1], то введені квазіпохідні набувають цілком реального механічного змісту, а саме: $y^{[0]}$ означає згин балки, $y^{[1]}$ — кут повороту, $y^{[2]}$ — згинальний момент, $y^{[3]}$ — поперечну силу. У разі, якщо коефіцієнти $a_0^{-1}(x)$, $a_i(x)$ ($i = 1, 2$) рівняння (28) належать до простору $\mathbb{L}(I)$, то рівняння матиме сенс, якщо від функції $y(x)$ вимагати локальну абсолютну неперервність на інтервалі I разом із квазіпохідними до третього порядку включно. При цьому, очевидно, що $y(x)$ справджує рівняння (28) майже скрізь на I.

Однак, у цьому напрямку можна піти ще дальше, якщо прийняти, що $a_0^{-1}(x)$ — локально обмежена та вимірна на інтервалі I функція, а коефіцієнти $a_i(x) = b_i'(x)$, де $b_i \in \mathbb{BV}_{loc}^{+}(I)$, $i = 1, 2$, є міри Стільтьєса на інтервалі I. Бачимо, що з допомогою вектора $\mathbf{Y} = \left(y, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]}\right)^{\mathrm{T}}$ рівняння (28) зводиться до системи вигляду (16), причому

$$\mathbf{C}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1}(x) & 0 \\ 0 & a_1(x) & 0 & -1 \\ a_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta\mathbf{C}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta b_1(x) & 0 & 0 \\ \Delta b_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси для довільного $x \in I$ випливає рівність $\left[\Delta C(x)\right]^2 = 0$, тобто коректність еквівалентної рівнянню (28) системи першого порядку. Відтак рівняння (28) має сенс, якщо від функції $y(x)$ вимагати, щоб вона та її перша квазіпохідна $y^{[1]}(x)$ належали до $\mathbb{AC}(I)$, а квазіпохідні $y^{[2]}(x)$ і $y^{[3]}(x)$ були функціями з простору $\mathbb{BV}_{loc}^{+}(I)$. При цьому диференціювання та рівність у (28) розуміються в сенсі теорії узагальнених функцій, тобто як диференціювання та рівність функціоналів. Цей випадок характеризується тим, що балка несе на собі, окрім неперервно розподілених, ще й зосереджені в деяких точках x_s маси та моменти, під час переходу через які (точки) згинальний момент $y^{[2]}(x)$ і поперечна сила $y^{[3]}(x)$ змінюються стрибкоподібно, в той час, як згин $y(x)$ і кут повороту $y^{[1]}(x)$ — неперервно.

Наведені приклади показують, що для кожного конкретного випадку слід вводити свої квазіпохідні, які (окрім випадку «звичайних» похідних) тісно пов'язані з коефіцієнтами відповідного диференціального виразу. Надалі, без обмеження загальності, усі (звичайні) диференціальні вирази та відповідні їм рівняння називатимемо *квазідиференціальними*.

3.4. Нехай тепер $l_n[y]$ — квазідиференціальний вираз n-го порядку, а

$$l_n[y]=0 \tag{29}$$

відповідне квазідиференціальне рівняння, що з допомогою вектора $\mathbf{Y} = \left(y, y^{[1]}, y^{[2]}, \ldots, y^{[n-1]}\right)^{\mathrm{T}}$ зводиться до коректної диференціальної системи

$$\mathbf{Y}'(x)=\mathbf{C}'(x)\mathbf{Y}(x), \quad \left[\Delta\mathbf{C}(x)\right]^2=0 \quad \forall x\in I. \tag{30}$$

Означення 4. Функції $y^{[k]}(x)\left(k=\overline{0,n-1},\, y^{[0]} \overset{\text{def}}{=} y\right)$ називатимемо *квазіпохідними* квазідиференціального виразу $l_n[y]$.

Зокрема, квазіпохідними диференціального виразу $y^{(n)}-\sum_{i=1}^{n} a_i(x)y^{(n-i)}$ є звичайні похідні $y^{(k)}(x),\ k=\overline{0,n-1}$.

Означення 5. Квазідиференціальне рівняння (29) називатимемо *коректним*, якщо коректна відповідна йому система (30).

Як показує приклад квазідиференціального рівняння (28), невдалий вибір координат вектора $\mathbf{Y}(x)$, тобто квазіпохідних, може привести до некоректної системи та навпаки. Окрім цього, цей приклад показує, що під час зведення до системи слід уникати виконання операції диференціювання коефіцієнтів.

Означення 6. Під *розв'язком* квазідиференціального рівняння (29) будемо розуміти першу координату $y(x)$ вектора $\mathbf{Y}(x)$ диференціальної системи (30), що задовольняє його в узагальненому сенсі, тобто, коли диференціювання та рівність у (29) розуміють у сенсі теорії узагальнених функцій: $\left(l_n[y],\varphi\right)=0,\ \varphi\in\mathbb{D}(I)$.

Розглянемо тепер спряжену до (30) систему

$$\mathbf{Z}'(x)=-\left(\mathbf{C}'(x)\right)^{*}\mathbf{Z}(x). \tag{31}$$

Нехай $\mathbf{Z} = \left(z^{\{n-1\}}, z^{\{n-2\}}, ..., z^{\{1\}}, z\right)^{\mathrm{T}}$ — невідома вектор-функція.

Означення 7. Квазідиференціальне рівняння

$$l_n^*[z] = 0\,, \tag{32}$$

якому згідно з еквівалентною системою (31) в узагальненому сенсі задовольняє остання координата $z(x)$ вектора $\mathbf{Z}(x)$, називатимемо *спряженим* до квазідиференціального рівняння (29). При цьому функції $z^{\{k\}}(x)\left(k = \overline{0, n-1},\ z^{\{0\}} \overset{\mathrm{def}}{=} z\right)$ називаються *квазіпохідними* квазідиференціального виразу $l_n^*[z]$.

Надалі, через $y^{[\cdot]}$ і $z^{\{\cdot\}}$ ми позначатимемо *квазіпохідні в сенсі вихідного та спряженого виразів* відповідно. Цим ми дотримуємося позначень, вперше введених Д. Шином [5-7]. Якщо квазіпохідні $y^{[k]}(x)$ квазідиференціального виразу $l_n[y]$ визначені, то квазіпохідні $z^{\{k\}}(x)$ спряженого квазідиференціального виразу $l_n^*[z]$, як далі буде показано, визначаються однозначно та навпаки. Ці квазіпохідні в загальному випадку не співпадають. Для ілюстрації розглянемо квазідиференціальне рівняння

$$\left(a_0(x)y''\right)' - a_1(x)y' - a_2(x)y = 0\,, \tag{33}$$

для якого квазіпохідні визначимо так: $y^{[1]} = y'$, $y^{[2]} = a_0(x)y''$. У результаті прийдемо до такої диференціальної системи першого порядку

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1}(x) \\ a_2(x) & a_1(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Якщо прийняти, що $a_0^{-1}(x)$ — обмежена та вимірна на інтервалі I функція, $a_i(x) = b_i'(x)$, де $b_i \in \mathbb{BV}_{loc}^+(I)$, $i = 1, 2$, то для довільного $x \in I$

$$\left[\Delta\mathbf{C}(x)\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta b_2(x) & \Delta b_1(x) & 0 \end{pmatrix}^2 = 0\,,$$

тобто система (34), а разом із нею і квазідиференціальне рівняння (33), є коректні.

Спряжена система має вигляд (тут для більшої загальності функції $a_0(x)$, $b_1(x)$, $b_2(x)$ вважаємо комплекснозначними)

$$\begin{pmatrix} z^{\{2\}} \\ z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}' = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & \overline{a}_2(x) \\ 1 & 0 & \overline{a}_1(x) \\ 0 & 1/\overline{a}_0(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\{2\}} \\ z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}.$$

Із цієї системи випливають узагальнені рівності

$$z' = -\frac{1}{\overline{a}_0(x)} z^{\{1\}}, \quad \left(z^{\{1\}}\right)' = -z^{\{2\}} - \overline{a}_1(x)z, \quad \left(z^{\{2\}}\right)' = -\overline{a}_2(x)z,$$

звідки $z^{\{1\}} = -\overline{a}_0(x)z'$, $z^{\{2\}} = -\left(z^{\{1\}}\right)' - \overline{a}_1(x)z$ і

$$\left(\overline{a}_0(x)z'\right)'' - \left(\overline{a}_1(x)z\right)' + \overline{a}_2(x)z = 0. \tag{35}$$

Таким чином, $y^{[k]} \neq y^{\{k\}}$ $\left(k = 1, 2\right)$, а спряжене до (33) рівняння має вигляд (35).

4. Початкова задача для квазідиференціальних рівнянь із мірами

Розглянемо квазідиференціальний вираз

$$L_{mn}[y] \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \left(a_{ij}(x) y^{(n-i)}\right)^{(m-j)}, \qquad m, n \in \mathbb{N}, \tag{36}$$

де $y(x)$ — функція, визначена на деякому інтервалі I дійсної осі $\mathbb{R}$. Квазідиференціальні вирази вигляду (36) із достатньо гладкими, а також сумовними за Лебегом на інтервалі I коефіцієнтами $a_{ij}(x)$, у різних аспектах досліджувалися багатьма авторами (див. вступ). Ми ж послаблюємо вимоги до коефіцієнтів квазідиференціального виразу (36) і надалі приймаємо, що виконуються такі припущення:

(I) $a_{00}^{-1}(x)$ — локально обмежена та вимірна на інтервалі I функція;

(II) $a_{i0}(x), a_{0j}(x) \in \mathbb{L}_2(I)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$;

(III) $a_{ij}(x) = b_{ij}'(x)$, де $b_{ij} \in \mathbb{BV}_{loc}^{+}(I)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Окрім того, для більшої загальності, $a_{i0}(x)$, $a_{0j}(x)$ і $b_{ij}(x)$ вважаємо комплекснозначними функціями дійсної змінної.

Із наведених умов видно, що виконувати операцію $(m-j)$-кратного диференціювання у виразі (36) не можна через недостатню гладкість його коефіцієнтів. Якщо провести диференціювання в узагальненому сенсі, то від розв'язку $y(x)$ диференціального рівняння

$$L_{mn}[y] = 0 \tag{37}$$

ми будемо змушені вимагати достатньої гладкості для того, щоб операції множення в лівій частині цього рівняння були законними (а не лише формальними) з точки зору теорії узагальнених функцій. Усіх цих труднощів вдається уникнути, якщо стати на шлях концепції квазіпохідних.

Структура виразу (36) диктує доцільність введення наступних квазіпохідних.

Означення 8. Квазіпохідними функції $y(x)$, що відповідають виразу $L_{mn}[y]$, називаємо функції $y^{[k]}(x)\left(k = \overline{0, n+m},\ y^{[0]} \overset{\text{def}}{=} y\right)$, які визначаються формулами

$$y^{[i]} = y^{(i)}, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad y^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} a_{i0}(x) y^{(n-i)};$$

$$y^{[n+j]} = -\left(y^{[n+j-1]}\right)' + \sum_{i=0}^{n} a_{ij}(x) y^{(n-i)}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{38}$$

Із допомогою таким чином введених квазіпохідних (38) квазідиференціальний вираз (36) можна записати у вигляді $L_{mn}[y] \equiv y^{[n+m]}$.

Із відомих уже причин зрозуміло, що початкову задачу («задачу Коші») для рівняння (37) із початковими значеннями в точці $x_0 \in I$ є сенс ставити лише в термінах квазіпохідних

$$y^{[k]}\left(x_0\right) = y_0^k, \quad k = \overline{0, n+m-1}, \tag{39}$$

де y_0^k $\left(k = \overline{0, n+m-1}\right)$ — задані числа. Проблему існування розв'язку цієї задачі вирішує наступна теорема.

Теорема 5 [59, 64]. За умов (I)-(III) існує єдиний розв'язок $y(x)$ початкової задачі (37), (39) такий, що $y^{[i]} \in \mathbb{AC}(I), i = \overline{0, n-1}$, а решта квазіпохідних $y^{[n+j]} \in \mathbb{BV}_{loc}^{+}(I)$, $j = \overline{0, m-1}$, у точках $x_s \in I$ розривів функцій $b_{ij}(x)$ мають стрибки, що визначаються формулами

$$\Delta y^{[n+j]}(x_s) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta b_{n-i, j+1}(x_s) y^{(i)}(x_s), \quad j = \overline{0, m-1}. \tag{40}$$

Слід підкреслити, що стрибки квазіпохідних розв'язків коректних квазідиференціальних рівнянь із мірами однозначно диктуються структурою їх коефіцієнтів і це виражається формулами (40). Ці формули можна трактувати також як *умови спряження* під час практичної побудови розв'язків квазідиференціальних рівнянь вигляду (37).

5. Властивості розв'язків спряженого рівняння

Щоб отримати вигляд спряженого до (36) квазідиференціального рівняння, а також вирази для його квазіпохідних, розглянемо спряжену до системи $\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{C}'(x)\mathbf{Y}(x)$ узагальнену диференціальну систему

$$\mathbf{Z}'(x) = -\left(\mathbf{C}'(x)\right)^{*} \mathbf{Z}(x). \tag{41}$$

Використовуючи конкретний вигляд матриці $\mathbf{C}'(x)$ [59, 64], приходимо до наступних означень.

Означення 9. Спряженим до (36) називається квазідиференціальний вираз

$$L_{mn}^{*}[z] \equiv \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \left[\overline{a}_{ij}(x) z^{(m-j)}\right]^{(n-i)}. \tag{42}$$

Означення 10. Квазіпохідними функції $z(x)$, що відповідають виразу $L_{mn}^{*}[z]$ (*квазіпохідними в сенсі спряженого рівняння*), називаються функції $z^{\{k\}}(x)$ $\left(k=\overline{0,m+n},\ z^{\{0\}}\overset{\text{def}}{=}z\right)$, які визначаються виразами

$$z^{\{j\}}=z^{(j)},\ \ j=\overline{1,m-1};\quad z^{\{m\}}=-\sum_{j=0}^{m}\overline{a}_{0j}(x)z^{(m-j)}\ ;$$

$$z^{\{m+i\}}=-\left(z^{\{m+i-1\}}\right)'-\sum_{j=0}^{m}\overline{a}_{ij}(x)z^{(m-j)},\quad i=\overline{1,n}\,. \tag{43}$$

Бачимо, що $z^{\{m+n\}}\equiv -L_{mn}^{*}[z]$. Окрім того, квазіпохідні $z^{\{k\}}(x)$ визначаються однозначно з системи (41). Розглянемо тепер початкову задачу

$$L_{mn}^{*}[z]=0\,, \tag{44}$$

$$z^{\{k\}}\left(x_0\right)=z_0^k,\quad k=\overline{0,m+n-1}\,, \tag{45}$$

де z_0^k $\left(k=\overline{0,m+n-1}\right)$ — задані числа. Проблему існування розв'язку цієї задачі вирішує наступна теорема.

Теорема 6 [59, 64]. За умов (I)-(III) існує єдиний розв'язок $z(x)$ початкової задачі (44), (45), такий що $z^{\{j\}}\in\mathbb{AC}(I),\, j=\overline{0,m-1}$, а решта квазіпохідних $z^{\{m+i\}}\in\mathbb{BV}_{loc}^{+}(I)$, $i=\overline{0,n-1}$, в точках $x_s\in I$ розривів функцій $b_{ij}(x)$ мають стрибки, що визначаються формулами

$$\Delta z^{\{m+i\}}\left(x_s\right)=-\sum_{j=0}^{m-1}\Delta\overline{b}_{i+1,m-j}\left(x_s\right)z^{(j)}\left(x_s\right),\quad i=\overline{0,n-1}\,.$$

Проілюструємо *теореми 5 і 6* на прикладі квазідиференціального рівняння другого порядку

$$L_{11}[y]\equiv-\left(a_{00}(x)y'\right)'+a_{01}(x)y'-\left(a_{10}(x)y\right)'+a_{11}(x)y=0\,, \tag{46}$$

де $a_{00}^{-1}(x)$ — локально обмежена та вимірна на деякому інтервалі $I\subset\mathbb{R}$ функція, $a_{10},a_{01}\in\mathbb{L}_2(I),a_{11}(x)=b_{11}'(x)$ і $b_{11}\in\mathbb{BV}_{loc}^{+}(I)$.

Тут $m=n=1$, тому згідно виразів (38) квазіпохідні визначаємо так

$$y^{[0]}\overset{\text{def}}{=}y,\quad y^{[1]}-a_{00}(x)y'+a_{10}(x)y,\quad y^{[2]}=-\left(y^{[1]}\right)'+a_{01}(x)y'+a_{11}(x)y\,,$$

причому, $y^{[2]}\equiv L_{11}[y]$. Еквівалентна диференціальна система першого порядку має вигляд

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} -a_{00}^{-1}(x)a_{10}(x) & a_{00}^{-1}(x) \\ a_{11}(x)-a_{01}(x)a_{00}^{-1}(x)a_{10}(x) & a_{01}(x)a_{00}^{-1}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Розв'язок цієї системи, що задовольняє початкову умову $\left(y(x_0), y^{[1]}(x_0)\right) = \left(y_0, y_0^1\right)$, є розв'язок наступної системи інтегральних рівнянь типу Вольтерра-Стільтьєса

$$\begin{cases} y(x) = y_0 - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{a_{10}(t)}{a_{00}(t)} y(t)\,dt + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{a_{00}(t)} y^{[1]}(t)\,dt, \\ y^{[1]}(x) = y_0^1 - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{a_{01}(t)a_{10}(t)}{a_{00}(t)} y(t)\,dt + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{a_{01}(t)}{a_{00}(t)} y^{[1]}(t)\,dt + \int\limits_{x_0}^{x} y(t)\,db_{11}(t). \end{cases} \quad (48)$$

Стрибок розв'язку в довільній точці $x \in I$ визначається співвідношенням

$$\begin{pmatrix} \Delta y(x_s) \\ \Delta y^{[1]}(x_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta b_{11}(x_s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x_s) \\ y^{[1]}(x_s) \end{pmatrix}.$$

Звідси $\Delta y(x_s) = 0 \ \forall x_s \in I$, тому функція $y(x)$ принаймні неперервна. Але з першого рівняння системи (48), з огляду на вигляд квазіпохідної $y^{[1]}(x)$, випливає, що $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} y'(t)dt$. Це означає, що функція $y(x)$ відновлюється за своєю похідною та є локально абсолютно неперервна на інтервалі I.

Друге ж рівняння цієї системи можна переписати так

$$y^{[1]}(x) = y_0^1 + \int\limits_{x_0}^{x} a_{01}(t) y'(t)dt + \int\limits_{x_0}^{x} y(t)db_{11}(t),$$

звідки випливає, що перша квазіпохідна $y^{[1]} \in \mathbb{BV}_{loc}^{+}(I)$. Її ж стрибок у точці $x_s \in I$ на підставі (48) дорівнює $\Delta y^{[1]}(x_s) = \Delta b_{11}(t) y(x_s)$.

Спряжена до (47) система має вигляд

$$\begin{pmatrix} z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \overline{a}_{10}(x)\overline{a}_{00}^{-1}(x) & \overline{a}_{10}(x)\overline{a}_{00}^{-1}(x)\overline{a}_{01}(x) - \overline{a}_{11}(x) \\ -\overline{a}_{00}^{-1}(x) & -\overline{a}_{00}^{-1}(x)\overline{a}_{01}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\{1\}} \\ z \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Із другого рівняння $z' = -\overline{a}_{00}^{-1}(x) z^{\{1\}} - \overline{a}_{00}^{-1}(x)\overline{a}_{01}(x) z$ цієї системи отримуємо вираз для першої квазіпохідної $z^{\{1\}} = -\overline{a}_{00}(x)z' - \overline{a}_{01}(x)z$, який, очевидно, співпадає з виразом (43) для $m = 1$. Підставивши його замість $z^{\{1\}}$ у перше рівняння

$$\left(z^{\{1\}}\right)' = \overline{a}_{10}(x)\overline{a}_{00}^{-1}(x) z^{\{1\}} + \left[\overline{a}_{10}(x)\overline{a}_{00}^{-1}(x)\overline{a}_{01}(x) - \overline{a}_{11}(x)\right] z$$

системи (49), маємо $\left(-\overline{a}_{00}(x)z' - \overline{a}_{01}(x)z\right)' = -\overline{a}_{10}(x)z' - \overline{a}_{11}(x)z$ і, отже, спряжене до (46) квазідиференціальне рівняння

$$-\left(\overline{a}_{00}(x)z'\right)' + \overline{a}_{10}(x)z' - \left(\overline{a}_{01}(x)z\right)' + \overline{a}_{11}(x)z = 0$$

є частковий випадок (якщо $m = n = 1$) рівняння (42).

Повторюючи ці міркування можна показати, що стрибок розв'язку системи (49) у довільній точці $x_s \in I$ визначається рівністю

$$\begin{pmatrix} \Delta z^{\{1\}}\left(x_s\right) \\ \Delta z\left(x_s\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\overline{b}_{11}\left(x_s\right) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\{1\}}\left(x_s\right) \\ z\left(x_s\right) \end{pmatrix}.$$

Звідси $\Delta z^{\{1\}}\left(x_s\right) = -\Delta\overline{b}_{11}\left(x_s\right) z\left(x_s\right), \quad \Delta z\left(x_s\right) = 0$, причому $z(x) \in \mathbb{AC}(I)$.

6. Лінійна теорія квазідиференціальних рівнянь із мірами

Нехай функції $y_1(x), y_2(x), ..., y_{m+n}(x)$ і $z_1(x), z_2(x), ..., z_{m+n}(x)$ є розв'язки вихідного

$$L_{mn}[y] = 0 \tag{37}$$

і спряженого

$$L_{mn}^*[z] = 0 \tag{44}$$

квазідиференціальних рівнянь відповідно. Складемо матриці-функції

$$\mathbf{W}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_{m+n}(x) \\ y_1^{[1]}(x) & y_2^{[1]}(x) & \dots & y_{m+n}^{[1]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{[m+n-1]}(x) & y_2^{[m+n-1]}(x) & \dots & y_{m+n}^{[m+n-1]}(x) \end{pmatrix}$$

та

$$\mathbf{V}(x) = \begin{pmatrix} z_1^{\{m+n-1\}}(x) & z_2^{\{m+n-1\}}(x) & \dots & z_{m+n}^{\{m+n-1\}}(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_1^{\{1\}}(x) & z_2^{\{1\}}(x) & \ddots & z_{m+n}^{\{1\}}(x) \\ z_1(x) & z_2(x) & \dots & z_{m+n}(x) \end{pmatrix}.$$

Визначники $\det\mathbf{W}(x)$ і $\det\mathbf{V}(x)$ називатимемо *квазівронскіанами* розв'язків $y_k(x)$ і $z_k(x)$, $k = \overline{1, m+n}$. Справджуються наступні аналоги формули Ліувілля-Остроградського-Якобі.

Теорема 7 [59, 64]. Для довільної точки $x_0 \in I$ квазівронскіани $\det\mathbf{W}(x)$ і $\det\mathbf{V}(x)$ обчислюються за формулами

$$\det\mathbf{W}(x) = \det\mathbf{W}\left(x_0\right) \exp\left[\int_{x_0}^{x} \frac{a_{01}(t) - a_{10}(t)}{a_{00}(t)} dt\right], \tag{50}$$

$$\det\mathbf{V}(x) = \det\mathbf{V}\left(x_0\right) \exp\left[\int_{x_0}^{x} \frac{\overline{a}_{01}(t) - \overline{a}_{10}(t)}{\overline{a}_{00}(t)} dt\right]. \tag{51}$$

Наслідок 3. Якщо $\mathrm{tr}[\mathbf{C}'(x)] = \mathrm{tr}[\mathbf{C}'(x)]^*$, то для довільної точки $x \in I$ добуток $\det\mathbf{W}(x)\det\mathbf{V}(x) = const$.

Означення 11. Розв'язки $y_1(x), y_2(x), ..., y_{m+n}(x)$ рівняння (37) називаємо *лінійно незалежними*, якщо рівність $\sum_{k=1}^{m+n} c_k y_k(x) = 0$ за деяких сталих c_k справджується лише тоді, коли $c_k = 0$ для довільного $k = \overline{1, m+n}$, і *лінійно залежними*, якщо хоча б одна зі сталих c_k відмінна від нуля.

Означення 12. Довільну лінійно незалежну систему розв'язків $y_k(x), k = \overline{1, m+n}$, квазідиференціального рівняння (37) називаємо *фундаментальною системою розв'язків*.

Зрозуміло, що для побудови будь-якої фундаментальної системи розв'язків достатньо розв'язати для рівняння (37) $m + n$ «задач Коші» з початковими умовами $y_j^{[i-1]}(x_0) = c_{ij}$, $i, j = \overline{1, m+n}$, де числа c_{ij} вибрані так, що $\det\{c_{ij}\} \neq 0$.

Теорема 8 [59, 64]. Якщо розв'язки $y_1(x), y_2(x), ..., y_{m+n}(x)$ квазідиференціального рівняння (37) лінійно залежні, то квазівронскіан $\det\mathbf{W}(x)$ цих розв'язків тотожно дорівнює нулеві на I. Навпаки, якщо $\det\mathbf{W}(x) = 0$ хоча б в одній точці $x_0 \in I$, то розв'язки $y_k(x)$, $k = \overline{1, m+n}$, рівняння (37) лінійно залежні.

Наслідок 4. Якщо $\det\mathbf{W}(x) \neq 0$ хоча б в одній точці $x_0 \in I$, то розв'язки $y_k(x)$, $k = \overline{1, m+n}$, квазідиференціального рівняння (37) утворюють фундаментальну систему.

Наслідок 5. Загальний розв'язок квазідиференціального рівняння (37) є лінійна комбінація розв'язків $y_k(x)$, $k = \overline{1, m+n}$, довільної фіксованої фундаментальної системи, тобто $y(x) = \sum_{k=1}^{m+n} c_k y_k(x)$, де $c_k = const$.

Зрозуміло, що усе сказане після наслідку 3 природним чином поширюється і на випадок спряженого квазідиференціального рівняння (44) з тією лише різницею, що замість квазіпохідних $y^{[\cdot]}$ і квазівронскіана (50) фігуруватимуть $z^{\{\cdot\}}$ і квазівронскіан (51).

7. Структура фундаментальної матриці, що відповідає квазідиференціальному рівнянню

Нехай (29) — коректне квазідиференціальне рівняння n-порядку, що зводиться до еквівалентної узагальненої диференціальної системи першого порядку (30)

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{C}'(x)\mathbf{Y}(x), \quad [\Delta\mathbf{C}(x)]^2 = 0 \quad \forall x \in I,$$

де $\mathbf{Y} = \left(y, y^{[1]}, ..., y^{[n-1]}\right)^{\mathrm{T}}$ — невідома вектор-функція, визначена на інтервалі I дійсної осі $\mathbb{R}$, $y^{[i]}(x)$ $\left(i = \overline{0, n-1}\right)$ — деяким чином введені квазіпохідні виразу $l_n[y]$.

Означення 13. Матрицю-функцію $\mathbf{B}(x, s)$, яка за змінною x справджує систему (30) і в точці $x = s \in I$ початкову умову $\mathbf{B}(s, s) = \mathbf{E}$, називаємо *фундаментальною матрицею*, що відповідає квазідиференціальному рівнянню (29).

Означення 14. Функцією Коші квазідиференціального рівняння (29) називаємо функцію $K(x, s)$, яка за змінною x є розв'язком цього рівняння та в точці $x = s \in I$ справджує початкові умови

$$K^{[i]}(s,s) = 0 \quad \left(i = \overline{0, n-2}\right), \qquad K^{[n-1]}(s,s) = 1 .$$

Нехай також квазідиференціальне рівняння (32) спряжене до (29), а $z^{\{j\}}$ $\left(j = \overline{0, n-1}\right)$ — квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння.

Означення 15. Для достатньо гладкої комплекснозначної функції $f(x, s)$, визначеної на декартовому добутку $I \times I$ вираз $f^{[i]\{j\}}(x, s)$ називаємо *мішаною квазіпохідною* $(i + j)$*-го порядку*, якщо спочатку береться i-та квазіпохідна за (першим аргументом) x у сенсі вихідного квазідиференціального рівняння (29), а потім від отриманого результату — j-та квазіпохідна за (другим аргументом) s у сенсі спряженого рівняння (32).

Наступне твердження відображає той факт, що для функції Коші $K(x, s)$ результат мішаного квазідиференціювання не залежить від порядку його виконання.

Лема 1 [64]. Якщо $K(x, s)$ — функція Коші квазідиференціального рівняння (29), то $K^{[i]\{j\}}(x,s) = K^{\{j\}[i]}(x,s)$.

Теорема 9 [61]. Фундаментальна матриця $\mathbf{B}(x, s)$, що відповідає квазідиференціальному рівнянню (29), має таку структуру

$$\mathbf{B}(x,s) = \begin{pmatrix} K^{\{n-1\}}(x,s) & \dots & K^{\{1\}}(x,s) & K(x,s) \\ K^{\{n-1\}[1]}(x,s) & \dots & K^{\{1\}[1]}(x,s) & K^{[1]}(x,s) \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ K^{\{n-1\}[n-1]}(x,s) & \dots & K^{\{1\}[n-1]}(x,s) & K^{[n-1]}(x,s) \end{pmatrix}.$$

Наслідок 6. Функції $K^{\{j\}}(x,s), j = \overline{0, n-1}$, утворюють нормальну в точці $x = s$ фундаментальну систему розв'язків квазідиференціального рівняння (29).

Наслідок 7. Якщо $\tilde{\mathbf{B}}(x,s)$ — фундаментальна матриця, що відповідає спряженому до (29) квазідиференціальному рівнянню (32), то

$$\tilde{\mathbf{B}}(x,s) \equiv \left(\mathbf{B}^{-1}(x,s)\right)^{*} = \mathbf{B}^{*}(s,x) =$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{K}^{\{n-1\}}(s,x) & \bar{K}^{[1]\{n-1\}}(s,x) & \dots & \bar{K}^{[n-1]\{n-1\}}(s,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{K}^{\{1\}}(s,x) & \bar{K}^{[1]\{1\}}(s,x) & \dots & \bar{K}^{[n-1]\{1\}}(s,x) \\ \bar{K}(s,x) & \bar{K}^{[1]}(s,x) & \dots & \bar{K}^{[n-1]}(s,x) \end{pmatrix}.$$

Останній результат дозволяє встановити тісний зв'язок між розв'язками вихідного та спряженого квазідиференціальних рівнянь.

Означення 16. Функцією Коші спряженого квазідиференціального рівняння (32) називаємо функцію $\tilde{K}(x,s)$, яка за змінною x справджує це рівняння та в точці $x = s$ початкові умови

$$\tilde{K}_x^{\{j\}}(s,s)=0 \quad \left(j=\overline{0,n-2}\right), \qquad \tilde{K}_x^{\{n-1\}}(s,s)=1$$

(тут індекс x відзначає, що квазіпохідна береться за цією змінною).

Зі структури матриці $\tilde{\mathbf{B}}(x,s)$ відразу випливає, що $\tilde{K}(x,s)\equiv\bar{K}(s,x)$.

Наслідок 8. Функція $\bar{K}(s,x)$ і її послідовні квазіпохідні $\bar{K}^{[i]}(s,x), i=\overline{1,n-1}$, за змінною s у сенсі вихідного рівняння (29) утворюють нормальну в точці $x = s$ фундаментальну систему розв'язків спряженого квазідиференціального рівняння (32).

8. Неоднорідне квазідиференціальне рівняння з розподілами

8.1. Розглянемо неоднорідне квазідиференціальне рівняння

$$L_{mn}[y]\equiv\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\right)^{(m-j)}=\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1}f_k^{(k+1)}(x), \tag{52}$$

де $f_k\in\mathbb{BV}_{loc}^{+}(I)$, а коефіцієнти a_{ij} справджукують згадані вище умови (I)-(III).

Спершу з'ясуємо, за якого найбільшого значення l рівняння (52) є коректне. Відповідь на це питання дає наступне твердження.

Теорема 10 [63]. Якщо $l\le m-1$, то за умов (I)-(III) рівняння (52) — коректне, тобто зводиться до коректної диференціальної системи.

Із цієї теореми випливає, що порядок найстаршої похідної у правій частині квазідиференціального рівняння (52) не може перевищувати числа m. Інакше (якщо $l\ge m$) для виконання умови коректності (23), яка перевіряється безпосередньо з урахуванням структури матриці стрибків $\Delta\mathbf{C}(x)$, вигляду вектора стрибків $\Delta\mathbf{F}(x)=\left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n+m-l-1},\Delta f_l(x),\Delta f_{l-1}(x),\ldots,\Delta f_0(x)\right)^{\mathrm{T}}$ і того факту, що $l\le m-1$, необхідно накласти додаткові обмеження (типу неперервності) або на функції $f_k(x)$, або на коефіцієнти $a_{ij}(x)$.

8.2. Початкові умови

$$y^{[\nu]}(x_0)=y_0^{\nu}, \quad \nu=\overline{0,n+m-1}, \quad x_0\in I, \tag{53}$$

де y_0^{ν} — задані числа, для рівняння (52) слід ставити в термінах квазіпохідних

$$y^{[i]}=y^{(i)}, \quad i=\overline{1,n-1}; \quad y^{[n]}=\sum_{i=0}^{n}a_{i0}(x)y^{(n-i)};$$

$$y^{[n+j]}=-\left(y^{[n+j-1]}\right)'+\sum_{i=0}^{n}a_{ij}(x)y^{(n-i)}, \quad j=\overline{1,m-l-1};$$

$$y^{[n+j]}=-\left(y^{[n+j-1]}\right)'+\sum_{i=0}^{n}a_{ij}(x)y^{(n-i)}+f'_{m-j}(x), \quad j=\overline{m-l,m}.$$

Теорема 11 [63, 64]. За умов (I)-(III) для довільного $l \le m-1$ існує єдиний розв'язок початкової задачі (52), (53), що подається у вигляді

$$y(x)=\sum_{v=0}^{n+m-1} K^{\{v\}}\left(x,x_0\right)y_0^{n+m-v-1}+\sum_{k=0}^{l}\int_{x_0}^{x} K^{\{k\}}(x,s)\,df_k(s)$$

(тут $K(x, s)$ — функція Коші однорідного квазідиференціального рівняння $L_{mn}[y] = 0$), і такий, що квазіпохідні $y^{[i]} \in \mathbb{AC}(I), i=\overline{0,n-1}$, а решта квазіпохідних $y^{[n+j]} \in \mathbb{BV}_{loc}^{+}(I)$, $j=\overline{0,m-1}$ в точках $x_s \in I$ розривів функцій $b_{ij}(x)$ і $f_k(x)$ мають стрибки, що визначаються формулами

$$\Delta y^{[n+j]}\left(x_s\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta b_{n-i,j+1}\left(x_s\right)y^{(i)}\left(x_s\right),\quad j=\overline{0,m-l-2},$$

$$\Delta y^{[n+j]}\left(x_s\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta b_{n-i,j+1}\left(x_s\right)y^{(i)}\left(x_s\right)+\Delta f_{m-j-1},\quad j=\overline{m-l-1,m-1}.$$

8.3. Аналогічним чином доводяться два наступні твердження.

Теорема 12 [63, 64]. За умов (I)-(III) неоднорідне квазідиференціальне рівняння

$$L_{mn}^{*}[z]\equiv\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\left(\overline{a}_{ij}(x)z^{(m-j)}\right)^{(n-i)}=\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1}g_k^{(k+1)}(x),\tag{54}$$

де $g_k \in \mathbb{BV}_{loc}^{+}(I)$, є коректне, якщо $l \le n-1$.

Теорема 13 [63, 64]. За умов (I)-(III) для довільного $l\left(0 \le l \le n-1\right)$ існує єдиний розв'язок квазідиференціального рівняння (54), що справджує початкові умови $z^{\{v\}}(x_0)=z_0^{v},\ v=\overline{0,m+n-1},\ x_0 \in I$, де z_0^{v} — задані числа, а $z^{\{v\}}$ — відповідним чином введені квазіпохідні. Цей розв'язок подається у вигляді

$$z(x)=\sum_{v=0}^{n+m-1}\overline{K}^{\{v\}}\left(x_0,x\right)z_0^{n+m-v-1}+\sum_{k=0}^{l}\int_{x_0}^{x}\overline{K}^{\{k\}}(s,x)\,dg_k(s),$$

причому квазіпохідні $z^{\{j\}} \in \mathbb{AC}(I), j=\overline{0,m-1}$, а решта квазіпохідних $z^{\{m+i\}} \in \mathbb{BV}_{loc}^{+}(I)$, $i=\overline{0,n-1}$ у точках $x_s \in I$ розривів функцій $b_{ij}(x)$ і $g_k(x)$ мають стрибки, визначені формулами

$$\Delta z^{\{m+i\}}\left(x_s\right)=-\sum_{j=0}^{m-1}\Delta\overline{b}_{i+1,m-j}\left(x_s\right)z^{(j)}\left(x_s\right),\quad i=\overline{0,n-l-2},$$

$$\Delta z^{\{m+i\}}\left(x_s\right)=-\sum_{j=0}^{m-1}\Delta\overline{b}_{i+1,m-j}\left(x_s\right)z^{(j)}\left(x_s\right)+\Delta g_{n-i-1}(x_s),\quad i=\overline{n-l-1,n-1}.$$

Висновки. Зроблено огляд праць, який присвячено розвитку теорії різних класів квазідиференціальних рівнянь і їх численних застосувань у задачах теоретичного та прикладного характеру. Представлено новітню лінійну теорію скалярних і векторних квазідиференціальних рівнянь з узагальненими функціями в коефіцієнтах і правих частинах. Ця теорія не вимагає конкретного вигляду квазідиференціального рівняння, а є наслідок певних загальних положень концепції квазіпохідних. Результати досліджень є оригінальні й отримані авторами та їх учнями. Їх теоретичні основи та деякі прикладні аспекти відображені в літературних джерелах [35, 36, 45, 59-77].

Література

[1] *Образцов, И. Ф.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем / *И. Ф. Образцов, Г. Г. Онанов*. — Москва: Машиностроение, 1973. — 659 с.

[2] Исследование сложных непрерывно-дискретных систем / *К. Я. Кухта* и др. — Киев: Наук. думка, 1981. — 272 с.

[3] *Гащук, П.* Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем / *П. Гащук, Л.-М. Зорій*. — Львів: Укр. технол., 1999. — 372 с.

[4] *Коллатц, Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями / *Л. Коллатц*; пер. с нем. — Москва: Наука, 1968. — 503 с.

[5] *Шин, Д.* Теорема существования квазидифференциального уравнения n-го порядка / *Д. Шин* // ДАН СССР. — 1938. — Т. 18, № 8. — С. 515-518.

[6] *Шин, Д.* О решениях самосопряженного дифференциального уравнения $u^{[n]} = lu$, $Il \neq 0$, принадлежащих к $L_2[0, \infty)$ / *Д. Шин* // ДАН СССР. — 1938. — Т. 18, № 8. — С. 519-522.

[7] *Шин, Д.* О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве / *Д. Шин* // ДАН СССР. — 1938. — Т. 18, № 8. — С. 523-526.

[8] *Шин, Д.* О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка / *Д. Шин* // Матем. сборник. — 1940. — Т. 7(49), № 3. — С. 479-527.

[9] *Крейн, М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I, II / *М. Г. Крейн* // Матем. сборник. — 1947. — Т. 20(62), № 3. — С. 431-495; Т. 21(63), № 3. — С. 365-404.

[10] *Крейн, М. Г.* Об одномерной сингулярной краевой задаче четного порядка в интервале $(0, \infty)$ / *М. Г. Крейн* // Доклады АН СССР. — 1950. — Т. 74, № 1. — С. 9-12.

[11] *Глазман, И. М.* К теории сингулярных дифференциальных операторов / *И. М. Глазман* // Усп. мат. наук. — 1950. — Т. 5, № 6(39). — С. 102-135.

[12] *Ахиезер, Н. И.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / *Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман*. — Москва-Ленинград: ГИТТЛ, 1950. — 484 с. — 2-е изд. — Москва: Наука, 1966. — 544 с.

[13] *Наймарк, М. А.* Линейные дифференциальные операторы / *М. А. Наймарк*. — Москва-Ленинград: ГИТТЛ, 1954. — 352 с. — 2-е изд. — Москва: Наука, 1969. — 528 с.

[14] *Орлов, С. А.* Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов / *С. А. Орлов* // Доклады АН СССР. — 1953. — Т. 92, № 3. — С. 483-486.

[15] *Рофе-Бекетов, Ф. С.* Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций / *Ф. С. Рофе-Бекетов* // Теория функций, функц. анализ и их приложения. — 1969. — № 8. — С. 3-24.

[16] *Коган, В. И.* О квадратично интегрируемых решениях симметрических систем дифференциальных уравнений произвольного порядка / *В. И. Коган, Ф. С. Рофе-Бекетов*. — Харьков, 1973. — 60 с. (Препр. / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низк. температур).

[17] *Walker, Ph. W.* A Vector-matrix Formulation for Formally Symmetric Ordinary Differential Equations with Applications to Solutions of Integrable Square / *Ph. W. Walker* // J. London Math. Soc. — 1974. — Vol. 9, № 1. — P. 151-159.

[18] *Аткинсон, Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи / *Ф. Аткинсон*; пер. с англ. — Москва: Мир, 1968. — 749 с.
[19] *Брук, В. М.* О числе линейно независимых, квадратично интегрируемых решений систем дифференциальных уравнений / *В. М. Брук* // Функц. анализ. — 1975. — № 5. — С. 25-33.
[20] *Kodaira, K.* On Ordinary Differential Equations of Any Even Order and the Correponding Eigenfunction Expansions / *K. Kodaira* // Amer. J. Math. — 1950. — Vol. 72. — P. 502-544.
[21] *Weidmann, J.* Zur Spektraltheorie von Sturm-Liouville-Operatoren / *J. Weidmann* // Math. Zeitschr. — 1967. — Vol. 98, № 4. — P. 268-302.
[22] *Weidmann, J.* Spectral Theory of Ordinary Differential Operators / Lecture Notes in Mathematics, 1258 / *J. Weidmann*. — Springer-Verlag, 1987. — 303 p.
[23] *Everitt, W. N.* On the Deficiency Index Problem for Ordinary Differential Operators. 1910-1976 / *W. N. Everitt* // Differential Equations (Proceedings of The 1977 Uppsala International Conference). — P. 62-81.
[24] *Zettl, A.* Formally Self-adjoint Quasi-differential Operators / *A. Zettl* // Rocky Mountain J. of Math. — 1975. — Vol. 5. — P. 453-474.
[25] *Everitt, W. N.* Generalized Symmetric Ordinary Differential Expressions I: the General Theory / *W. N. Everitt, A. Zettl* // Nieuw Arch. Wiskunde. — 1979. — Vol. 27, No 3. — P. 363-397.
[26] *Everitt, W. N.* Linear Ordinary Quasi-differential Expressions / *W. N. Everitt* // Proceedings of the 1983 Beijing Symposium on Differential Equations and Differential Geometry. — Science Press, University of Beijing, P. R. China, 1986. — P. 1-28.
[27] *Everitt, W. N.* Some Remarks on Linear Ordinary Quasi-differential Expressions / *W. N. Everitt, D. Race* // Proc. London Math. Soc. — 1987. — Vol. 3-54, No 2. — P. 300-320.
[28] *Everitt, W. N.* Factorization of Quasi-differential Operators / *W. N. Everitt, I. S. Muldowhey, N. Thandi* // Proc. Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 113, No 1. — P. 93-98.
[29] *Everitt, W. N.* Differential Operators Generated by a Countable Number of Quasi-differential Expressions on the Real Line / *W. N. Everitt, A. Zettl* // Proc. London Math. Soc. —1992. — Vol. 3-64, No 3. — P. 524-544.
[30] *Everitt, W. N.* Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differential Operators / *W. N. Everitt, L. Markus* // Math. Surveys and Monographs. — Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. — Vol. 61.
[31] *Behncke, H.* Deficiency Indices and Spectral Theory of Third Order Differential Operators on the Half Line / *H. Behncke, D. Hinton* // Math. Nachr. — 2005. — Vol. 278. — P. 1430-1457.
[32] *Behncke, H.* Spectral Analysis of Fourth Order Differential Operators. I, II / *H. Behncke* // Math. Nachr. — 2006. — Vol. 279. — P. 58-72; Math. Nachr. — 2006. — Vol. 279. — P. 73-85.
[33] *Behncke, H.* Spectral Theory of Higher-order Differential Operators / *H. Behncke* // Proc. London Math. Soc. — 2006. — Vol. 92, No 1. — P. 139-160.
[34] *Behncke, H.* Eigenfunctions, Deficiency Indices and Spectra of Odd-order Differential Operators / *H. Behncke, D. Hinton* // Proc. London Math. Soc. — 2008. — Vol. 97, No 2. — P. 425-449.
[35] *Стасюк, М. Ф.* До дослідження коливань і стійкості систем з кусково-змінним розподілом параметрів / *М. Ф. Стасюк, Р. М. Тацій* // Доповіді АН УРСР. Сер. А. — 1982. — № 5. — С. 42-45.
[36] *Стасюк, М. Ф.* Структура розв'язків звичайних диференціальних і квазідиференціальних рівнянь з кусковозмінними коефіцієнтами / *М. Ф. Стасюк* // Доповіді АН УРСР. Сер. А. — 1982. — № 12. — С. 33-36.
[37] *Дерр, В. Я.* Квазидифференциальные уравнения: неосциляция решений / *В. Я. Дерр*. — Ижевск, 1984. — 54 с. (Деп. в ВИНИТИ, № 1749).
[38] *Дерр, В. Я.* Квазидифференциальные уравнения: сопряженные краевые задачи / *В. Я. Дерр*. — Ижевск, 1984. — 40 с. (Деп. в ВИНИТИ, № 2994).
[39] *Дерр, В. Я.* К обобщенной задаче Валле-Пуссена / *В. Я. Дерр* // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 11. — С. 1861-1872.
[40] *Дерр, В. Я.* К определению решения линейного дифференциального уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах / *В. Я. Дерр* // Доклады АН СССР. — 1988. — Т. 298, № 2. — С. 269-272.
[41] Дифференциальные уравнения на геометрических графах / *Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев* и др. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 272 с.

[42] *Feller, W.* On Second Order Differential Operators / *W. Feller* // Ann. Math. — 1955. — Vol. 61. — P. 90-105.
[43] *Feller, W.* The Birth and Death Processes as Diffusion Processes / *W. Feller* // J. Math. Pur. Appl. — 1959. — Vol. 38. — P. 301-345.
[44] *Филиппов, А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / *А. Ф. Филиппов*. — Москва: Наука, 1985. — 224 с.
[45] *Тацій, Р. М.* Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Тацій Роман Мар'янович; Львів. держ. ун-т ім. І. Франка. — Львів, 1994. — 37 с.
[46] *Халанай, А.* Качественная теория импульсных систем / *А. Халанай, Д. Векслер*; пер. с рум. — Москва: Мир, 1971. — 312 с.
[47] *Ligeza, J.* Cauchy's Problem for System of Linear Differential Equations with Distributional Coefficients / *J. Ligeza* // Coloq. Math. — 1975. — Vol. 33, No 2. — P. 295-303.
[48] *Натансон, И. П.* Теория функций вещественной переменной / *И. П. Натансон*. — Москва: Наука, 1974. — 480 с.
[49] *Завалищин, С. Т.* Импульсные процессы, модели и приложения / *С. Т. Завалищин*, *А. Н. Сесекин*. — Москва: Наука, 1991. — 256 с.
[50] *Антосик, П.* Теория обобщенных функций / *П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский*; пер. с англ. — Москва: Мир, 1976. — 311 с.
[51] *Antosik P.* Products of Measures and Functions of Finite Variations / *P. Antosik, J. Ligeza* // Generalized Functions and Operational Calculus: Proc. Conf. Varna, 1975. — Sofia, 1979. — P. 20-26.
[52] *Ligeza, J.* On Distributional Solution of Some Systems of Linear Differential Equuatios / *J. Ligeza* // Casop. Pro Pestov. Mat. — 1977. — Vol. 102, No 1. — P. 37-41.
[53] *Kurzweil, J.* Generalized Ordinary Differential Equations / *J. Kurzweil* // Czech. Math. J. — 1958. — Vol. 8, No 3. — P. 360-388.
[54] *Hildebrandt, T. H.* On Systems of Linear Differentio-Stiltjes-integral Equations / *T. H. Hildebrandt* // Illinois J. Math. — 1959. — Vol. 3, No 3. — P. 352-373.
[55] *Schwabik S.* Differential and Integral Equations / *S. Schwabik, M. Tvrdy, O. Vejvoda*. — Praha: Academia, 1979. — 249 p.
[56] *Pandit, S. G.* Differential Systems Involving Impulses / Lecture Notes in Mathematics / *S. G. Pandit, S. G. Deo*. — Berlin: Springer-Verlag, 1982. — Vol. 954. —102 p.
[57] *Ашордиа, М. Т.* О задачи Коши для системы обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнений / *М. Т. Ашордиа* // Тр. ин-та прикл. матем. — Тбил. ун., 1987. — № 22. — С. 5-41.
[58] *Левин, А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения / *А. Ю. Левин* // Вестн. Ярославского ун-та. — 1974. — Вып. 8. — С. 122-144.
[59] *Тацій, Р. М.* Общие квазидифференциальные уравнения с мерами / *Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. В. Кисилевич* // Деп. в Укр. НИИНТИ. — 1985. — № 2701. —34 с.
[60] *Тацій, Р. М.* Корректные дифференциальные системы с мерами / *Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк* // Вестн. Львов. политехн. ин-та. Дифференц. уравн. и их приложения. — 1988. — № 222.— С. 89-90.
[61] *Тацій, Р. М.* Про структуру фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння / *Р. М. Тацій, Б. Б. Пахолок* // Доповіді АН УРСР. Сер. А. — 1989.— № 4. — С. 25-28.
[62] *Тацій, Р. М.* Про апроксимацію розв'язків диференціальних рівнянь з мірами / *Р. М. Тацій, В. В. Іщук, В. В. Кісілевич* // Вісник Київського ун-ту. Математика і механіка. — 1990. — № 32.— С. 128-131.
[63] *Тацій, Р. М.* Про порядок узагальнених функцій в правих частинах квазідиференціальних рівнянь / *Р. М. Тацій, Б. Б. Пахолок* // ДАН УРСР. Сер. А. — 1990. — № 1. — С. 16-19.
[64] *Тацій, Р. М.* Узагальнені квазідиференціальні рівняння / *Р. М. Тацій.* — Львів, 1994. — № 2-94. — С. 1-54. (Препр. ІППММ АН України).
[65] *Тацій, Р. М.* Про спектральні властивості однієї дискретно-неперервної крайової задачі / *Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. В. Кісілевич* // Вісник ДУ «Львівська політехніка». Прикл. математика. — 1996. — № 229. — С. 165-170.

[66] *Тацій, Р. М.* Неоднорідна дискретно-неперервна крайова задача для векторного КДР / *Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. В. Кісілевич* // Вісник ДУ «Львівська політехніка». Прикл. математика. — 1998. — № 346. — С. 120-124.
[67] *Тацій, Р. М.* Про апроксимацію розв'язків дискретно-неперервних крайових задач / *Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. В. Кісілевич* // Вісник ДУ «Львівська політехніка». Прикл. математика. — 1999. — № 364. — С. 163-173.
[68] *Мазуренко, В. В.* Про звідність дискретно-неперервної крайової задачі до узагальненої схеми Аткінсона / *В. В. Мазуренко* // Доповіді НАН України. — 2001. — № 8. — С. 19-22.
[69] *Тацій, Р. М.* Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь парного порядку / *Р. М. Тацій, В. В. Мазуренко* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2001. — Т. 44, № 1. — С. 43-53.
[70] *Тацій, Р. М.* Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь непарного порядку / *Р. М. Тацій, В. В. Мазуренко* // Математичні студії. — 2001. — Т. 16, № 1. — С. 71-85.
[71] *Мазуренко, В. В.* О разрешимости неоднородной граничной задачи для дифференциальной системы с мерами / *В. В. Мазуренко, Р. М. Тацій* // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 3. — С. 328-336.
[72] *Тацій, Р. М.* Конструкція елементів фундаментальної матриці квазідиференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами / *Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. В. Кісілевич* // Вісник НУ «Львівська політехніка». Фіз.-мат. науки. — 2004. — № 518. — С. 30-35.
[73] *Makhney, O. V.* The Structure of Cauchy Function of a Vector Quasidifferential Equation / *O. V. Makhney, R. M. Tatsiy* // Matematychni Studii. — 2004. — Vol. 21. — P. 221-224.
[74] *Стасюк, М.* Матричні інтегральні рівняння та диференціальні системи з мірами / *М. Стасюк, Р. Тацій* // Вісник НУ «Львівська політехніка». Фіз.-мат. науки. — 2006. — Вип. № 566. — С. 33-40.
[75] *Махней, А. В.* Разложение по собственным функциям в случае простых собственных значений сингулярного квазидифференциального оператора / *А. В. Махней, Р. М. Таций* / Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 2. — С. 179-187.
[76] *Тацій, Р. М.* Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиференціального рівняння та її застосування / *Р. М. Тацій, О. О. Власій* // Доповіді НАН України. — 2007. — № 9. — С. 17-21.
[77] *Mazurenko, V.* On Boundary Value Problem for the System of Ordinary Differential Equations with Distributions as Coefficients / *V. Mazurenko, M. Stasyuk, R. Tatsiy* // Matematychni Studii. — 2009. — Vol. 31, No 1. — C. 65-74.

Modelling of discrete-continuous systems. Bases of quasiderivative concept

Roman Tatsiy, Marta Stasiuk, Victor Mazurenko

The notion of quasiderivatives as an effective device of researches of applied problems that are reduced to solving the so called quasidifferential equations (QDE) is analyzed. As it is well known, such equations appear during investigation of different physical processes, are derived on the basis of the conservation law and are represented in the divergent form. The main stages of the quasiderivative concept development are presented in the chronological order from the end of 1930s to the recent investigations. A new push to the QDE theory development has been done by the authors. The authors based their researches on the development of linear theory of scalar and vectorial QDE with generalized functions both in coefficients and right parts, which can be reduced to the correct systems in terms of definite quasiderivatives. The above mentioned gave the opportunity to develop such trends of investigation as spectral theory of generalized self-adjoint and not self-adjoint problems, stability theory, approximate approaches etc. The main investigation results are presented in the paper without proofs due to the limited volume of the publication however with the respective sources quoting.

**ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2009, вип. 10, 7-37**

Моделирование дискретно-континуальных систем. Основы концепции квазипроизводных

Роман Таций, Марта Стасюк, Виктор Мазуренко

В работе анализируется целесообразность введения понятия квазипроизводных как эффективного аппарата исследования прикладных задач, приводящих к решению, так называемых, квазидифференциальных уравнений. Такие уравнения возникают при описании реальных физических процессов, выводятся на основании законов сохранения и изображаются в дивиргентной форме. Основные этапы развития концепции квазипроизводных приведены в хронологическом порядке с конца 30-х годов прошлого столетия до настоящего времени. Новый импульс развитию теории квазидифференциальных уравнений дан авторами. Основой их исследований было создание линейной теории скалярных и векторных квазидифференциальных уравнений с обобщенными функциями как в коэффициентах, так и в правых частях, которые с помощью определенных некоторым образом квазипроизводных приводятся к корректным системам дифференциальных уравнений с мерами. Это дало возможность развить такие современные направления исследований, как спектральная теория обобщенных самосопряженных и несамосопряженных задач, теория устойчивости, приближенные методы. Из-за ограниченного объёма публикации основные результаты исследований приводятся без доказательств, но со ссылками на соответствующие источники.

Отримано 22.04.09