УДК 539.3

# Узагальнення теореми взаємності робіт для нелокальної електромагнітної механіки діелектриків

Ольга Грицина

К. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: gryt@cmm.lviv.ua

*Теорему взаємності робіт узагальнено на стаціонарні задачі нелокальної (градієнтної) теорії взаємозв'язаної електромагнітомеханіки поляризовних неферомагнітних ізотропних діелектриків. Нелокальність згаданої теорії зумовлено врахуванням поряд із процесами деформування та поляризації також процесу локального зміщення маси. Цей процес є пов'язаний з упорядкуванням структури фізично-малого елемента тіла.*

**Ключові слова:** теорема взаємності робіт, взаємозв'язані електромагніто-термомеханічні процеси, локальне зміщення маси, поляризовні діелектрики, нелокальність.

**Вступ.** Згідно теореми Бетті-Максвелла, відомої ще як теореми взаємності робіт, у випадку пружного тіла, підпорядкованого закону Гука, робота, виконана силами першого стану, на переміщеннях, спричинених дією сил другого стану, дорівнює роботі, виконаній силами другого стану на переміщеннях, спричинених дією сил першого стану. Майзель [1] узагальнив цю теорему на випадок температурної дії на ізотропні термопружні тіла. Доведення теореми взаємності робіт для анізотропних термопружних тіл міститься у праці [2], для п'єзоелектричних пружних і термопружних тіл — у монографіях [3, 4], а в [5] — для моделі електромагнітомеханіки електропровідних неферомагнітних неполяризовних тіл. У праці [6] доведено теорему взаємності робіт для динамічних задач термопружних діелектричних тіл. Узагальнення теореми Бетті-Максвелла для теорії п'єзоелектриків Тупіна та градієнтної теорії п'єзоелектриків Міндліна наведено у монографії [3].

Метою пропонованої роботи є узагальнення теореми Бетті-Максвелла для нелокальної теорії електромагнітомеханіки поляризовних тіл, в яких поряд із процесами деформування та поляризації враховано також процес локального зміщення маси [7]. Зазначимо, що процес локального зміщення маси пов'язано з упорядкуванням структури фізично-малого елемента тіла. Основні співвідношення такої моделі наведені у працях [8, 9].

## Узагальнення теореми взаємності робіт

Розглядаємо ізотропне деформівне поляризовне неферомагнітне тіло, яке займає область ($V$) евклідового простору й обмежене поверхнею ($\Sigma$). Тіло перебуває під впливом електромагнітного поля, а також зовнішньої механічної дії внаслідок чого у ньому протікають механічні й електромагнітні процеси, які супроводжуються також можливим переупорядкуванням структури у рамках фізично-малого елемента тіла. Таке переупорядкування структури тіла можна спостерігати, зокрема, у приповерхневих областях новоутворених поверхонь. Згадані структурні зміни спричиняють потік маси $\mathbf{J}_{ms}$ неконвективної та недифузійної природи, який у рамках модельного опису, запропонованого у працях [8, 9], пов'язують із вектором локального зміщення маси $\mathbf{\Pi}_m$ співвідношенням $\mathbf{J}_{ms} = \partial\mathbf{\Pi}_m / \partial t$.

Повна лінійна система рівнянь моделі поляризовних неферомагнітних ізотропних діелектриків за врахування процесу локального зміщення маси включає рівняння балансу маси й імпульсу [8, 9]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0\,, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \rho_0\mathbf{F}_* = \rho_0\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\,, \tag{2}$$

електродинаміки

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0\,,\quad \nabla\cdot\mathbf{D} = 0\,,\quad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,,\quad \nabla\times\mathbf{H} = \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\,, \tag{3}$$

а також лінійні рівняння стану

$$\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 2a_2^\sigma\hat{\mathbf{e}} + \left(a_1^\sigma e + a_{e\rho}\rho_m\right)\hat{\mathbf{I}}\,,\\
&\mu'_\pi = \mu'_{\pi 0} + a_\rho^\mu\rho_m + \rho_0^{-1}a_{e\rho}e\,,\\
&\mathbf{p} = -a_E^p\mathbf{E}_* - a_{E\mu}\nabla\mu'_\pi\,,\\
&\boldsymbol{\pi}_m = a_\mu^\pi\nabla\mu'_\pi + a_{E\mu}\mathbf{E}_*\,.
\end{aligned} \tag{4}$$

Тут $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$ — узагальнений тензор напружень [7, 8]; $\hat{\mathbf{e}} = \left[\nabla\mathbf{u} + \left(\nabla\mathbf{u}\right)^{\mathrm{T}}\right]/2$ — тензор деформації, а $e$ — його кульовий складник; $\mathbf{u}$ — вектор переміщення, а $\mathbf{v}$ — вектор швидкості точок континуума центрів мас тіла; $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — вектори напруженостей електричного та магнітного полів; $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ — вектори індукції електричного та магнітного полів; для неферомагнітного середовища $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$; $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$; $\mathbf{P}$ — вектор локального зміщення електричного заряду (поляризації); $\mathbf{p} = \mathbf{P}/\rho_0$; $\boldsymbol{\pi}_m = \mathbf{\Pi}_m/\rho_0$, $\mathbf{\Pi}_m$ — вектор локального зміщення маси [7]; $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$; $\mu$ — хімічний потенціал, а $\mu_\pi$ — міра зміни внутрішньої енергії системи, зумовленої локальним зміщенням маси; $\rho$ — густина маси; $\rho_m = \rho_{m\pi}/\rho_0$, де $\rho_{m\pi} = -\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_m$ — густина наведеної маси [8, 9]; $\varepsilon_0, \mu_0$ – електрична та магнітна сталі; $a_1^\sigma$, $a_2^\sigma, a_\rho^\mu$, $a_E^p, a_\mu^\pi, a_{e\rho}, a_{E\mu}$ — характеристики матеріалу; «×», «·» — знаки векторного та скалярного добутків;

індекс «T» вказує на операцію транспонування тензора; $\rho_0$ і $\mu'_{\pi 0}$ — значення густини маси та приведеного потенціалу $\mu'_\pi$ у вихідному стані, у якому також $\hat{\mathbf{e}} = 0$, $\rho_m = 0$, $\mathbf{E}_* = 0$, $\nabla \mu'_\pi = 0$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 0$, $\mathbf{p} = 0$, $\boldsymbol{\pi}_m = 0$. Зазначимо також, що систему рівнянь (1)-(4) записано в ізотермічному наближенні.

Розглянемо далі два різних напружено-деформованих стани діелектричного тіла, спричинені двома системами зовнішніх дій: масових сил $\mathbf{F}_*$ й $\mathbf{F}'_*$, поверхневих зусиль $\boldsymbol{\sigma}_*$ та $\boldsymbol{\sigma}'_*$, поверхневих електричних зарядів $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ і $\mathbf{P}' \cdot \mathbf{n}$ за наявності векторів локального зміщення маси $\boldsymbol{\pi}_m$ та $\boldsymbol{\pi}'_m$. Ці зовнішні дії спричиняють два стани тіла, які будемо характеризувати відповідно тензорами напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$ та $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_*$, деформацій $\hat{\mathbf{e}}$ та $\hat{\mathbf{e}}'$, векторами переміщень $\mathbf{u}$ й $\mathbf{u}'$, величинами $\mu'_\pi$ та $(\mu'_\pi)'$ й електричними потенціалами $\varphi$ та $\varphi'$.

Обмежимося також стаціонарним наближенням і замість рівняння руху (2) розглядатимемо такі рівняння рівноваги

$$\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \rho_0 \mathbf{F}_* = 0, \tag{5}$$

$$\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_* + \rho_0 \mathbf{F}'_* = 0. \tag{6}$$

Якщо рівняння (5) і (6) скалярно домножити, відповідно, на вектори переміщень $\mathbf{u}'$ та $\mathbf{u}$, отримані рівняння відняти та проінтегрувати по об'єму тіла, то у підсумку одержимо

$$\int_{(V)} \left[ \left( \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* \right) \cdot \mathbf{u}' + \rho_0 \mathbf{F}_* \cdot \mathbf{u}' - \left( \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_* \right) \cdot \mathbf{u} - \rho_0 \mathbf{F}'_* \cdot \mathbf{u} \right] dV = 0. \tag{7}$$

Якщо ж тепер врахувати співвідношення

$$\left( \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* \right) \cdot \mathbf{u}' = \nabla \cdot \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* \cdot \mathbf{u}' \right) - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \nabla \mathbf{u}',$$

$$\left( \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_* \right) \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_* \cdot \mathbf{u} \right) - \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_* : \nabla \mathbf{u}$$

та теорему Остроградського-Гауса [10], то інтегральне рівняння (7) набуде вигляду

$$\int_{(\Sigma)} \left( \boldsymbol{\sigma}_* \cdot \mathbf{u}' - \boldsymbol{\sigma}'_* \cdot \mathbf{u} \right) d\Sigma + \int_{(V)} \rho_0 \left( \mathbf{F}_* \cdot \mathbf{u}' - \mathbf{F}'_* \cdot \mathbf{u} \right) dV = \int_{(V)} \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \hat{\mathbf{e}}' - \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_* : \hat{\mathbf{e}} \right) dV. \tag{8}$$

Тут $\boldsymbol{\sigma}_* = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* \cdot \mathbf{n}$, де $\mathbf{n}$ — зовнішня нормаль до поверхні тіла $(\Sigma)$.

Із другого рівняння системи (3) за врахування співвідношень $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ й $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ [3] маємо

$$-\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi + \nabla \cdot \mathbf{P} = 0, \tag{9}$$

$$-\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi' + \nabla \cdot \mathbf{P}' = 0. \tag{10}$$

Домножимо останні два рівняння відповідно на $\varphi'$ і $\varphi$, а результат віднімання одержаних співвідношень зінтегруємо по об'єму тіла. У підсумку одержуємо

$$-\varepsilon_0 \int\limits_{(V)} \left[ \nabla \cdot (\nabla\varphi)\varphi' - \nabla \cdot (\nabla\varphi')\varphi \right] dV = \int\limits_{(V)} \left[ (\nabla \cdot \mathbf{P})\varphi' - (\nabla \cdot \mathbf{P}')\varphi \right] dV . \tag{11}$$

Враховуючи формули

$$\nabla \cdot (\nabla\varphi)\varphi' = \nabla \cdot \left[ (\nabla\varphi)\varphi' \right] - (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi'),$$
$$\nabla \cdot (\nabla\varphi')\varphi = \nabla \cdot \left[ (\nabla\varphi')\varphi \right] - (\nabla\varphi')\cdot(\nabla\varphi),$$
$$(\nabla \cdot \mathbf{P})\varphi' = \nabla \cdot (\mathbf{P}\varphi') - \mathbf{P} \cdot (\nabla\varphi'),$$
$$(\nabla \cdot \mathbf{P}')\varphi = \nabla \cdot (\mathbf{P}'\varphi) - \mathbf{P}' \cdot (\nabla\varphi)$$

та теорему Остроградського-Гауса, рівняння (11) запишемо так

$$-\varepsilon_0 \int\limits_{(\Sigma)} (\varphi'\nabla\varphi - \varphi\nabla\varphi')\cdot \mathbf{n}\, dV - \int\limits_{(\Sigma)} (\varphi'\mathbf{P} - \varphi\mathbf{P}')\cdot \mathbf{n}\, dV =$$
$$= -\int\limits_{(V)} (\mathbf{P}\cdot\nabla\varphi' - \mathbf{P}'\cdot\nabla\varphi) dV . \tag{12}$$

Звідси маємо

$$\int\limits_{(V)} (\mathbf{P}\cdot\nabla\varphi' - \mathbf{P}'\cdot\nabla\varphi) dV = -\int\limits_{(\Sigma)} (\varphi'\mathbf{D} - \varphi\mathbf{D}')\cdot \mathbf{n}\, d\Sigma . \tag{13}$$

Шляхом додавання співвідношень (8) і (13) отримуємо

$$\int\limits_{(\Sigma)} \left[ \boldsymbol{\sigma}_* \cdot \mathbf{u}' - \boldsymbol{\sigma}'_* \cdot \mathbf{u} + (\varphi'\mathbf{D} - \varphi\mathbf{D}')\cdot\mathbf{n} \right] d\Sigma + \int\limits_{(V)} \rho_0 (\mathbf{F}_* \cdot \mathbf{u}' - \mathbf{F}'_* \cdot \mathbf{u}) dV =$$
$$= \int\limits_{(V)} (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \hat{\mathbf{e}}' - \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_* : \hat{\mathbf{e}} + \mathbf{P}\cdot\nabla\varphi' - \mathbf{P}'\cdot\nabla\varphi) dV . \tag{14}$$

Розглянемо підінтегральний вираз у правій частині рівняння (14). Насамперед перетворимо різницю $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \hat{\mathbf{e}}' - \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_* : \hat{\mathbf{e}}$. Якщо врахувати перші два рівняння стану із системи (4), то можна показати, що

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \hat{\mathbf{e}}' - \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_* : \hat{\mathbf{e}} = \rho_0 \left[ \rho_m (\tilde{\mu}'_\pi)' - \rho'_m \tilde{\mu}'_\pi \right].$$

Тут $\tilde{\mu}'_\pi = \mu'_\pi - \mu'_{\pi 0}$.

Із використанням двох останніх рівнянь стану системи (4) можна також показати, що

$$\mathbf{P}\cdot\nabla\varphi' - \mathbf{P}'\cdot\nabla\varphi = \rho_0 \left[ \nabla\mu'_\pi \cdot \boldsymbol{\pi}'_m - \nabla(\mu'_\pi)' \cdot \boldsymbol{\pi}_m \right].$$

Відтак маємо

$$\hat{\sigma}_* : \hat{\mathbf{e}}' - \hat{\sigma}'_* : \hat{\mathbf{e}} + \mathbf{P}\cdot\nabla\varphi' - \mathbf{P}'\cdot\nabla\varphi = \rho_0\left[\rho_m\left(\tilde{\mu}'_\pi\right)' - \rho'_m\tilde{\mu}'_\pi\right] +$$
$$+\rho_0\left[\nabla\mu'_\pi\cdot\pi'_m - \nabla\left(\mu'_\pi\right)'\cdot\pi_m\right]. \qquad (15)$$

Якщо врахувати, що $\rho_m = -\nabla\cdot\pi_m$, а $\rho'_m = -\nabla\cdot\pi'_m$, то співвідношення (15) набуде вигляду

$$\hat{\sigma}_* : \hat{\mathbf{e}}' - \hat{\sigma}'_* : \hat{\mathbf{e}} + \mathbf{P}\cdot\nabla\varphi' - \mathbf{P}'\cdot\nabla\varphi = -\rho_0\nabla\cdot\left[\pi_m\left(\tilde{\mu}'_\pi\right)' - \pi'_m\tilde{\mu}'_\pi\right]. \qquad (16)$$

Таким чином, шляхом підстановки формули (16) у (14) і врахування теореми Остроградського-Гауса для нелокальної моделі стаціонарної взаємозв'язаної електромагнітомеханіки поляризовних неферомагнітних діелектричних тіл одержуємо теорему взаємності робіт у такій формі .

$$\int\limits_{(\Sigma)}\sigma_*\cdot\mathbf{u}'\,d\Sigma + \rho_0\int\limits_{(V)}\mathbf{F}_*\cdot\mathbf{u}'dV + \int\limits_{(\Sigma)}\varphi'\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma - \rho_0\int\limits_{(\Sigma)}\tilde{\mu}'_\pi\pi'_m\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma =$$
$$= \int\limits_{(\Sigma)}\sigma'_*\cdot\mathbf{u}\,d\Sigma + \rho_0\int\limits_{(V)}\mathbf{F}'_*\cdot\mathbf{u}dV + \int\limits_{(\Sigma)}\varphi\mathbf{D}'\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma - \rho_0\int\limits_{(\Sigma)}\left(\tilde{\mu}'_\pi\right)'\pi_m\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma. \qquad (17)$$

Слід зауважити, що треті доданки у правій і лівій частинах співвідношення (17) узагальнюють теорему взаємності робіт на поляризовні тіла, а наявність останніх поверхневих інтегралів зумовлено врахуванням у модельному описі процесу локального зміщення маси.

**Висновки.** Теорему взаємності робіт узагальнено на випадок теорії взаємозв'язаної електромагнітомеханіки, у якій поряд із процесами деформування й електромагнітними процесами враховано також локальне зміщення маси. Згадану теорему можна використати для розробки аналітичних методів розрахунку напружено-деформованого стану неферомагнітних діелектричних поляризовних тіл за врахування їх можливого структурного переупорядкування.

## Література

[1] *Майзель, В. М.* Температурная задача теории упругости / *В. М. Майзель*. — Киев: Изд-во АН УССР, 1951. — 152 с.
[2] *Ищенко, В. А.* Термическое напряженное состояние анизотропных тел / *В. А. Ищенко* // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. — 2008. — Вип. 9. — С. 104-114.
[3] *Новацкий, В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах / *В. Новацкий*. — Москва: Мир, 1984. — 159 с.
[4] Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Введение в теорию термопьезоэлектричества / *Д. И. Бардзокас, А. И. Зобнин, Н. А. Сеник, М. Л. Фильштинский*. — 2005. — Т. 1. — 312 с.
[5] *Бурак, Я. Й.* Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах / *Я. Й. Бурак, Б. П. Галапац, Б. М. Гнідець*. — Київ: Наук. думка, 1978. — 232 с.

[6] *Nowacki, J. P.* Some Dynamical Problems of Thermoelastic Dielectrics / *J. P. Nowacki, P. G. Glockner* // Int. J. Solid and Struct. — 1979. — Vol. 15, Issue 3. — P. 183-191.
[7] Математичне моделювання термомеханічних процесів у пружних тілах із врахуванням локального зміщення маси / *Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина* // Доп. НАН України. — 2007. — № 6. — С. 45-49.
[8] *Бурак, Я. Й.* Приповерхневі механоелектромагнетні явища у термопружних поляризовних тілах за локального зміщення маси / *Я. Й. Бурак, В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2007. — № 4. — С. 5-17.
[9] *Кондрат, В.* Рівняння електромагнітотермомеханіки поляризовних неферомагнітних тіл за врахування локального зміщення маси / *В. Кондрат, О. Грицина* // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2008. — Вип. 8. — С. 69-83.
[10] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. — Москва: Наука, 1974. — 831 с.

## Generalization of theorem of reciprocity of works for nonlocal electromagnetic mechanics of dielectrics

Olha Hrytsyna

*The theorem of reciprocity of works is generalised for stationary problems of nonlocal (gradient) theories of coupled electromagnetic mechanics of polarized nonferromagnetic isotropic dielectrics. The nonlocality of the mentioned theory is caused by the account of the process of local displacement of mass alongside with deformation and polarisation processes. This process is related with structure ordering of a physically-small element of a body.*

## Обобщение теоремы взаимности работ для нелокальной электромагнитной механики диэлектриков

Ольга Грицина

*Теорему взаимности работ обобщено на стационарные задачи нелокальной (градиентной) теории взаимосвязанной электромагнитомеханики поляризирующихся неферромагнитных изотропных диэлектриков. Нелокальность упомянутой теории обусловлена учетом наряду с процессами деформирования и поляризации также процесса локального смещения массы. Этот процесс обусловлен упорядочением структуры физически-малого элемента тела.*

**Представлено доктором фізико-математичних наук В. Кондратом**

Отримано 21.03.08