

Контроль вимушених коливань круглих в'язкопружних пластинок за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів з урахуванням вібророзігріву

Іван Киричок¹, Тетяна Карнаухова²

¹ д. ф.-м. н., с. н. с., Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, вул. Несторова, 3, Київ, e-mail: Karn@inmech.kiev.ua

² к. ф.-м. н., доцент, Національний технічний університет України «КПІ», пр. Перемоги, 37, Київ, e-mail: Karn@inmech.kiev.ua

(Представлено доктором фіз.-мат. наук В. Кондратом)

Розглядається зв'язана задача про вимушені згинні коливання та дисипативний розігрів круглої в'язкопружної пластинки з п'єзоелектричними актуаторами та сенсорами. Враховується температурна залежність комплексних характеристик пасивного та п'єзоактивного матеріалів. Нелінійна задача розв'язується ітераційним методом у поєднанні з чисельним методом дискретної ортогоналізації. Досліджується вплив температури дисипативного розігріву на показники електричного потенціалу сенсора за дії гармонічного поперечного тиску на пластинку й активне демпфування її резонансних коливань за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів.

Ключові слова: кругла пластинка, дисипативний розігрів, демпфування коливань, сенсори, актуатори.

Вступ. В останні роки у різних галузях сучасної техніки для демпфування стаціонарних і нестаціонарних коливань тонкостінних елементів конструкцій, окрім традиційного застосування покриттів із пасивних (без п'єзо ефекту) дисипативних матеріалів [2, 10], почали широко застосовувати активні способи з включенням у конструктивний елемент компонентів із п'єзоелектричних матеріалів [13, 14]. П'єзоелектричні шари можуть покривати тонкостінний елемент або бути внутрішніми включеннями та служити актуаторами, до яких підводиться різниця електричних потенціалів відповідної фази й амплітуди для компенсації механічного навантаження. Вони можуть бути також сенсорами, які дають інформацію про інтенсивність механічних коливань. Для керування коливаннями до п'єзоактивної системи підключають контури оберненого зв'язку. Варіанти математичного моделювання визначальних співвідношень оберненого зв'язку приведені, зокрема, у працях [5, 14]. Поряд із впливом структурно-конструктивних особливостей і властивостей матеріалу п'єзовключень одним із важливих факторів, що впливають на ефективність керування коливаннями об'єкта та працездатність п'єзоелектричних сенсорів і актуаторів, є температурні ефекти, які зумовлені

віборозігрівом внаслідок дисипативних втрат у матеріалі або теплообміном із зовнішнім середовищем [3, 5-9].

Метою цієї роботи є дослідження впливу температури дисипативного розігріву на ефективність контролю вимушених згинних коливань в'язкопружних круглих пластинок за допомогою п'єзоелектричних сенсорів і актуаторів із врахуванням температурної залежності електромеханічних властивостей пасивного та п'єзоактивного матеріалів.

1. Постановка задачі

Розглядається кругла пластинка товщини h і радіуса R , яка віднесена до циліндричної системи координат r, θ, z . Пластинка виготовлена з ізотропного в'язкопружного матеріалу. Її поверхні $z = \pm h/2$ жорстко скріплені з протилежно поляризованими за товщиною п'єзоелектричними накладками однакової товщини δ та радіуса $r_0 \leq R$. Зовнішні поверхні п'єзонакладок, а також внутрішні поверхні, що межують із пасивним шаром, покриті нескінченно тонкими суцільними електродами. На пластинку діє осесиметричний рівномірно розподілений уздовж радіуса поверхневий тиск $P = P_0 \cos(\omega t)$, який змінюється в часі t з коловою частотою ω , близькою до власної частоти. Окрім того, якщо п'єзонакладки виконують функції актуаторів, то до їх зовнішніх електродів підводиться різниця електричних потенціалів $\psi(h/2 + \delta) - \psi(-h/2 - \delta) = \text{Re}(2V_A e^{i\omega t})$ із частотою механічного навантаження, де $V_A = V'_A + iV''_A$. Потенціал внутрішніх електродів дорівнює нулю. Якщо п'єзонакладки є сенсорами, то на розімкнутих електродах виникає різниця електричних потенціалів $V'_s + iV''_s$, обумовлена механічним навантаженням. В'язкопружні властивості пасивного та п'єзоактивного матеріалів враховуються комплексними модулями, які залежать від температури.

Моделювання електротермомеханічної поведінки пластинки ґрунтується на гіпотезах Кірхгофа-Лява для механічних польових величин. Приймаємо, що в площині пластинки компонентами векторів індукції D_r, D_θ та напруженості E_r, E_θ електричного поля можна знехтувати. При цьому з рівняння електростатики випливає, що компонента вектора індукції D_z у напрямку поляризації не залежить від товщинної координати. Вважаємо, що температура дисипативного розігріву постійна по товщині пластинки.

На основі прийнятих припущень у силу симетричності геометрії пластинки та способу навантаження задача про електротермомеханічну поведінку пластинки зводиться до розв'язування звичайних диференціальних рівнянь гармонічних згинних коливань відносно комплексних амплітудних величин

$$\frac{d}{dr}(rQ_r) + r\hat{\rho}\omega^2 w + rP_0 = 0, \quad \frac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta - rQ_r = 0; \quad (1)$$

визначальних рівнянь для моментів

$$M_r = D_{11}\kappa_r + D_{12}\kappa_\theta + M_E, \quad M_\theta = D_{12}\kappa_r + D_{11}\kappa_\theta + M_E; \quad (2)$$

виразів, що пов'язують амплітуди згинних деформацій і переміщень,

$$\kappa_r = \frac{d\vartheta}{dr}, \quad \kappa_\theta = \frac{\vartheta}{r}, \quad \vartheta = -\frac{dw}{dr}; \quad (3)$$

співвідношень електростатики

$$D_z = -b_{33} \frac{V_A}{\delta} + b_{31} \frac{h+\delta}{2} \kappa, \quad \kappa = \kappa_r + \kappa_\theta, \\ E_z = -\frac{V_A}{\delta} + \frac{b_{31}}{b_{33}} \left(\frac{h+\delta}{2} \pm z \right) \kappa, \quad \left(-\frac{h}{2} - \delta \leq z \leq -\frac{h}{2}; \quad \frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + \delta \right); \quad (4)$$

усередненого за циклом коливань і товщиною пластинки рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2\alpha_s}{\lambda H} (T - T_c) + \frac{1}{\lambda H} \bar{W} \quad (5)$$

з дисипативною функцією

$$\bar{W} = \frac{\omega}{2} \left[D_{11}'' (\kappa_r'^2 + \kappa_r''^2 + \kappa_\theta'^2 + \kappa_\theta''^2) + 2D_{12}'' (\kappa_r' \kappa_\theta' + \kappa_r'' \kappa_\theta'') + \right. \\ \left. + 2(h+\delta)b_{31}'' (\kappa_r' V_A' + \kappa_r'' V_A'') + 2b_{33}'' (V_A'^2 + V_A''^2) / \delta \right]. \quad (6)$$

Граничні механічні умови мають вигляд:
жорстке закріплення

$$w = 0, \quad \vartheta = 0, \quad \text{якщо} \quad r = R; \quad (7)$$

шарнірне опирання

$$w = 0, \quad M_r = 0, \quad \text{якщо} \quad r = R. \quad (8)$$

Теплові граничні та початкові умови приймаємо такими

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\alpha_r}{\lambda} (T - T_c), \quad \text{якщо} \quad r = R; \quad T = T_0, \quad \text{якщо} \quad t = 0. \quad (9)$$

У рівняннях (1)-(9) введено позначення

$$D_{11} = \frac{h^3}{12} c_{11} + \delta_{**}^3 c_{11}^E + \frac{b_{31}^2}{b_{33}} (\delta_*^3 k_{D1} + \delta_{**}^3 k_{D2}); \\ D_{12} = \frac{h^3}{12} c_{12} + \delta_{**}^3 c_{12}^E + \frac{b_{31}^2}{b_{33}} (\delta_*^3 k_{D1} + \delta_{**}^3 k_{D2}); \\ c_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad c_{12} = \frac{1}{s_{11}^E (1-\nu_E^2)}; \quad c_{12} = \nu c_{11}; \quad c_{12}^E = \nu_E c_{11}^E; \\ \nu_E = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}; \quad b_{31} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1-\nu_E)}; \quad k_p^2 = \frac{2d_{31}^2}{\varepsilon_{33}^T s_{11}^E (1-\nu_E)}; \quad \delta_*^3 = \frac{1}{6} \delta^3;$$

$$\begin{aligned}
 b_{33} &= \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2); & M_E &= b_{31}(h + \delta) V_A k_{v1}; & \delta_{**}^3 &= (4\delta^3 + 6\delta^2 h + 3\delta h^2) / 6; \\
 \hat{\rho} &= \rho h + 2\rho_* \delta; & H &= 2\delta + h; & s_{11}^E &= s'_{11}(T) [1 - i\delta_{11}(T)]; \\
 d_{31} &= d'_{31}(T) [1 - i\delta_{31}(T)]; & \varepsilon_{33}^T &= \varepsilon'_{33}(T) = [1 - i\delta_{33}(T)]; & & (10)
 \end{aligned}$$

$w = w' + iw''$ — комплексна амплітуда прогину пластинки; Q_r, M_r, M_θ — комплексні величини перерізуючої сили, радіального та колового моментів; $E = E'(T) + iE''(T)$ — в'язкопружний комплексний модуль; $\nu = const$ — коефіцієнт Пуассона пасивного матеріалу; $s_{11}^E, d_{31}, \varepsilon_{33}^T$ — відповідно комплексні податливість, п'єзомодуль і діелектрична проникливість п'єзокераміки; ρ, ρ_* — густини пасивного та п'єзоактивного матеріалів; α_s, α_r — коефіцієнти теплообміну на зовнішніх поверхнях; λ, a — коефіцієнти тепло- та температуропровідності. У виразах (4), (6) враховано, що в силу прийнятої поляризації п'єзонакладок їхні п'єзомодулі d_{31} мають протилежні знаки. Відзначимо, що в співвідношеннях (10) треба покласти $k_{v1} = 1, k_{D1} = 1, k_{D2} = 0$, якщо п'єзонакладки є актуаторами, і $k_{v1} = 0, k_{D1} = 0, k_{D2} = 1$, якщо п'єзонакладки виконують функцію сенсорів. Тут і далі приймаємо стандартні позначення для комплексних величин і параметрів $b = b' + ib''$, $|b| = (b'^2 + b''^2)^{1/2}$, $i = \sqrt{-1}$.

2. Побудова розв'язку задачі

За врахування температурної залежності в'язкопружних властивостей матеріалів пластинки та п'єзонакладок система рівнянь (1)-(6) буде взаємозв'язаною і нелінійною. Для її розв'язування використовують метод покрокового інтегрування за часом [4]. З цією метою рівняння електромеханіки (1)-(3) з граничними умовами (7), (8) записують у формі звичайних диференціальних рівнянь нормального вигляду

$$\frac{d\bar{Y}}{dr} = \mathbf{A}\bar{Y} + \bar{B} \quad (11)$$

з граничними умовами

$$\mathbf{B}_1 \bar{Y} = 0 \quad (r = 0); \quad \mathbf{B}_2 \bar{Y} = 0 \quad (r = R), \quad (12)$$

де $\bar{Y}^T = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \{Q_r, \vartheta, w, M_r\}$ — шукана комплексно-значна вектор-функція; \mathbf{A} — комплекснозначна квадратна матриця, ненульовими елементами якої є

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -1/r; & a_{13} &= -\hat{\rho}\omega^2; & a_{22} &= \nu_D/r; & a_{24} &= J_D; & a_{32} &= -1; & a_{41} &= 1; \\
 a_{42} &= D_{11}(1 - \nu_D^2)/r^2; & a_{44} &= -(1 + \nu_D)/r; & J_D &= 1/D_{11}; & \nu_D &= -J_D D_{11}; & & & & (13)
 \end{aligned}$$

$\mathbf{B}^T = \{-P_0; -J_D M_E; 0; -M_E(1 + \nu)/r\}$ — комплекснозначний вектор-стовпчик; $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ — комплекснозначні прямокутні матриці, ненульові елементи яких визначаються граничними умовами (7), (8). Комплекснозначна система (11), (12) на кожному кроці за часом Δt інтегрується з використанням чисельного методу дискретної

ортогоналізації та типової програми розв'язування звичайних диференціальних рівнянь [1]. При цьому на першому кроці розв'язується задача за ізотермічних електромеханічних характеристик матеріалів. Після обчислення дисипативної функції (6) задача теплопровідності розв'язується методом кінцевих різниць із застосуванням явної схеми. Потім, залежно від розподілу температури, обчислюються жорсткісні характеристики в коефіцієнтах (13) і процес повторюється.

Розглянемо випадок механічного гармонічного навантаження пластинки, якщо скріплені з нею п'єзоелектричні накладки виконують функції актуаторів (зовнішні електроди закорочені). Після розв'язування задачі про вимушені коливання пластинки значення електричного потенціалу V_A , який необхідно підвести до електродів для компенсації механічного навантаження, можна визначити на основі варіаційної постановки задачі за формулою [3, 9]

$$V_A = - \frac{\int_0^R P_0 w r dr}{(h + \delta) \int_0^{r_0} b_{31} (\kappa_r + \kappa_\theta) r dr}, \quad (14)$$

яка справджується на резонансних частотах згинних коливань. Знаком « \leftarrow » у співвідношенні (14) враховано протифазне відносно механічного навантаження підведення потенціалу V_A до електродів актуатора. Цей метод доцільно використовувати, якщо відоме поверхнєве навантаження на пластину.

Нехай тепер п'єзонакладки виконують функції сенсорів, а їхні зовнішні електроди розімкнуті. Для розімкнутих електродів різницю потенціалів, яка обумовлена механічним гармонічним навантаженням P_0 , визначаємо з умови рівності нулю струму $I = i\omega \iint_{(s)} D_z ds = 0$ так, що

$$V_S = - \frac{\delta (h + \delta) \int_0^{r_0} b_{31} (\kappa_r + \kappa_\theta) r dr}{2 \int_0^{r_0} b_{33} r dr}. \quad (15)$$

Окрім згаданого вище методу демпфування коливань за допомогою актуаторів, широко застосовують інший метод активного демпфування коливань пластин з одночасним використанням сенсорів та актуаторів. При цьому до актуатора підводиться різниця потенціалів, яка пропорційна різниці потенціалів сенсора, першій чи другій похідній від цієї різниці. Коефіцієнти пропорційності називають коефіцієнтами оберненого зв'язку. Нехай прогин пластини представлено у вигляді добутку залежної від часу амплітуди коливань і функції координат. Тоді у зв'язку з тим, що різниця потенціалів сенсора пропорційна до амплітуди резонансних коливань, підведена до актуатора різниця потенціалів буде пропорційна амплітуді коливань, першій чи другій похідній по часу від цієї амплітуди. Своєю чергою,

різниця потенціалів актуатора входить у рівняння стану для згинних моментів. Після підстановки цих моментів у рівняння руху та використання варіаційних методів або методу Бубнова-Гальоркіна для розділення змінних, одержуємо звичайне диференціальне рівняння відносно амплітуди згинних коливань із деякими інерційними, дисипативними та жорсткісними характеристиками, якими можна керувати шляхом вибору вказаних вище коефіцієнтів оберненого зв'язку. У результаті змінюються динамічні характеристики пластини та суттєво зменшується амплітуда коливань. Найчастіше для демпфування коливань використовують рівняння оберненого зв'язку, які пов'язують різницю потенціалів актуатора та першу похідну від показника сенсора, завдяки чому можна керувати величиною коефіцієнта загасання. При цьому не потрібно знати величину механічного навантаження.

Якщо зовнішнє навантаження невідоме, то можна використати інший метод демпфування резонансних коливань пластин. Пояснимо його суть на прикладі задачі про демпфування круглої пластини, яка перебуває під дією поверхневого тиску постійної амплітуди. З формули (15) бачимо, що у разі використання одномодового наближення показники сенсора будуть пропорційні до амплітуди механічного навантаження. При чисельному розв'язуванні задачі для знаходження тиску за показником сенсора спочатку розв'язуємо задачу механіки за дії механічного навантаження одиничної інтенсивності $P_0 = 1$ Па. Нехай цей показник дорівнює V_S^1 . Тоді за довільної інтенсивності P механічного навантаження показник сенсора буде дорівнювати $V_S = P_0 V_S^1$. Таким чином, інтенсивність механічного навантаження визначається формулою: $P_0 = V_S / V_S^1$. Звідси робимо висновок, що для визначення амплітуди механічного навантаження потрібно знати еталонний показник сенсора за дії одиничного навантаження та показники цього ж сенсора у випадку навантаження поверхневим тиском із невідомою амплітудою. Тоді величину навантаження визначаємо за наведеною вище формулою, а різницю потенціалів, яку потрібно підвести до актуатора, обчислюємо за формулою (14) шляхом підстановки в неї уже відомого механічного навантаження. Вказаний підхід особливо ефективний при аналітичному розв'язуванні задачі варіаційними методами чи методом Бубнова-Гальоркіна. Під час розв'язування задачі з використанням чисельних методів для визначення тієї різниці потенціалів, яку потрібно підвести до актуатора для компенсації відомого механічного навантаження, спочатку потрібно визначити різницю потенціалів V_A^1 для компенсації механічного навантаження одиничної амплітуди $P_0 = 1$ Па. Тоді для компенсації механічного навантаження інтенсивності P до актуатора потрібно підвести різницю потенціалів $V_A = P V_A^1$. Після підстановки в цей вираз визначеного вище механічного навантаження одержимо формулу для розрахунку величини різниці потенціалів, яку необхідно прикласти до актуатора для компенсації невідомого поперечного тиску

$$V_A = -G_s V_s, \quad (16)$$

де

$$G_s(r_0) = |V_A^1(r_0)| / |V_s^1(r_0)|. \quad (17)$$

Знак « \rightarrow » у формулі (16) вибрано тому, що до актуатора потрібно підвести різницю потенціалів зі знаком, протилежним дії механічного навантаження.

Зауважимо, що при чисельному інтегруванні рівнянь електромеханіки та теплопровідності особливу точку $r = 0$ виключали, а в її околі приймали умови регулярності та симетрії [1] $Q_r = 0$, $\vartheta = 0$, $dT/dr = 0$, якщо $r = r_1 = 10^{-5}$ м. При цьому використовували безрозмірні просторову $x = (r - r_1)/L$, $L = R - r_1$ і часову $\tau = at/L^2$ координати та параметри теплообміну $\gamma_s = \alpha_s L/\lambda$, $\gamma_r = \alpha_r L/\lambda$.

3. Числові результати

Результати розрахунків приведені для пластинки з полімера [9], для якого складові комплексного модуля зсуву $G = E/[2(1 + \nu)]$ у діапазоні температур від 20°C до 80°C характеризуються такими лінійними співвідношеннями: $G'(T) = 968 - 8,69T$ (МПа); $G''(T) = 87,1 - 0,7T$ (МПа). Решта параметрів приймали такими: $\rho = 929$ кг/м³, $\nu = \nu' = 0,3636$; ($\nu'' = 0$), $\lambda = 0,47$ Вт/(м·град). П'єзоактивні шари виготовлені з п'єзокераміки ЦТСтБС-2. Згідно експериментальних даних [10] залежність властивостей п'єзокераміки від температури у діапазоні температур від 20°C до 160°C характеризується співвідношеннями

$$\begin{aligned} s'_{11} &= s_{11}^0 \left(1 + 0,3077 \cdot 10^{-3} \bar{T}\right); \quad \delta_{11} = \delta_{11}^0 \left(1 + 0,6155 \cdot 10^{-3} \bar{T} + 0,41575 \cdot 10^{-4} \bar{T}^2\right); \\ d'_{31} &= d_{31}^0 \left(1 + 0,219 \cdot 10^{-2} \bar{T}\right); \quad \delta_{31} = \delta_{31}^0 \left(1 + 1,198 \cdot 10^{-2} \bar{T} + 1,823 \cdot 10^{-4} \bar{T}^2\right); \\ \epsilon'_{33} &= \epsilon_{33}^0 \left(1 + 1,11 \cdot 10^{-4} \bar{T} + 8,4256 \cdot 10^{-5} \bar{T}^2\right); \\ \delta_{33} &= \delta_{33}^0 \left(1 + 1,19 \cdot 10^{-2} \bar{T} + 1,19 \cdot 10^{-4} \bar{T}^2\right); \\ \bar{T} &= T - T_r; \quad T_r = 20^\circ\text{C}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} s_{11}^0 &= 12,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \quad d_{31}^0 = -1,6 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}; \quad \epsilon_{33}^0 = 21 \cdot 10^2 \epsilon_0; \\ \delta_{11}^0 &= 0,16 \cdot 10^{-2}; \quad \delta_{31}^0 = 0,4 \cdot 10^{-2}; \quad \delta_{33}^0 = 0,35 \cdot 10^{-2}; \quad \nu_E = \nu'_E = 0,37; \quad \nu''_E = 0; \\ \epsilon_0 &= 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}; \quad \rho_* = 0,752 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

Розміри пластинки та параметри теплообміну такі: $R = 0,2$ м, $h = 0,04$ м, $T_0 = T_c = 20^\circ\text{C}$, $\delta = 10^{-4}$ м, $\gamma_s = \gamma_r = 0,851$.

Розглянемо вплив розмірів актуатора та сенсора на показники електричних потенціалів V_A та V_s , які обчислені за формулами (14) і (15) відповідно. Криві на рис. 1 ілюструють залежності першої резонансної частоти ω_{pA} й амплітуди показника $|V_A|$ на цій частоті від безрозмірного радіуса $x_0 = x(r_0)$ п'єзонакладок за ізотермічних ($T = T_r$) умов деформування та механічних навантажень з амплітудою $P_0 = 1$ Па. При цьому п'єзонакладки виконують функцію актуатора. Якщо п'єзонакладки виконують функцію сенсора, то залежність від радіуса $x_0 = x(r_0)$ ілюструють криві ω_{ps} і $|V_s|$. Графіки на рис. 1а відповідають граничним умовам жорсткого (7), а на рис. 1б — шарнірного (8) закріплення зовнішнього краю пластинки.

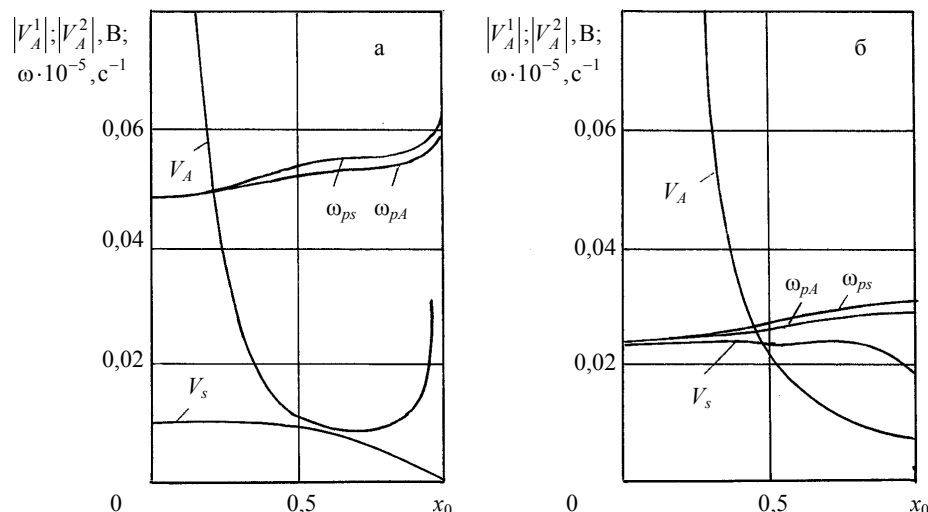


Рис. 1

Проведені розрахунки та результати відомих публікацій [7, 11] свідчать, що найефективнішим є актуатор, який реалізує максимальну амплітуду прогинів пластинки за мінімальних значень підведеного до його електродів електричного потенціалу V_A . Центр такого актуатора співпадає з просторовою координатою $x = 0$, в якій амплітуда прогину круглої пластинки є максимальна. Бачимо, що криві V_A на рис. 1 є нелінійні функції безрозмірного радіуса x_0 актуатора. При цьому розміри оптимального актуатора відповідають $0,6 < x_0 < 0,8$ у випадку жорсткого закріплення (рис. 1а) та $0,8 < x_0 \leq 1$ — у випадку шарнірного опирання (рис. 1б) краю круглої пластинки. Показники сенсора (криві V_s) за розглядуваних умов закріплення краю пластинки монотонно зменшуються зі збільшенням розмірів сенсора.

Залежність величини G_s від безрозмірного радіуса x_0 , визначену на основі формули (17), показано на рис. 2. Тут криві 1 і 2 відповідають жорсткому та шарнірному закріпленню краю пластинки. Ці результати можна використати для визначення в ізотермічному наближенні величини електричного потенціалу V_A актуатора з метою компенсації механічного навантаження на основі показника сенсора.

На рис. 3 показано залежність від частоти амплітуди максимального прогину $w_m = |w(0)| \cdot 10^4$ м жорстко закріпленої пластинки з актуатором радіуса $x_0 = 0,6$ (крива 1) і таких же розмірів сенсором (крива 2) за дії механічного навантаження амплітуди $P_0 = 0,25 \cdot 10^4$ Па. При цьому приймали, що характеристики матеріалу не залежать від температури. Штрихова лінія відповідає частотній залежності модуля $|V_s|$ електричного потенціалу, що виникає на електродах сенсора. Можливість демпфування амплітуди основної моди згинних коливань пластинки за допомогою п'єзоактуатора, до електродів якого протифазно підведено електричний потенціал $|V_A|$, визначений згідно формули (16) і показника $|V_s| = 20,85$ В на частоті $\omega_s = 0,545 \cdot 10^4$ с⁻¹, ілюструють криві 1' ($G_s = 1$) та 1'' ($G_s = 1,09$). При цьому коефіцієнт $G_s = 1,09$ відповідає значенню ординати точки $x_0 = 0,6$ на кривій 1 (рис. 2).

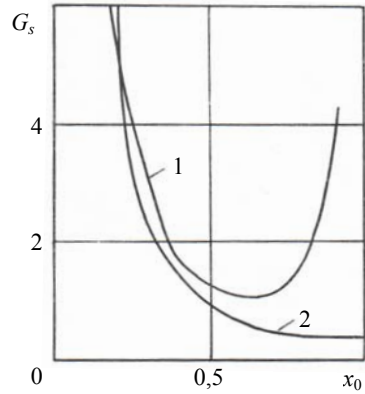


Рис. 2

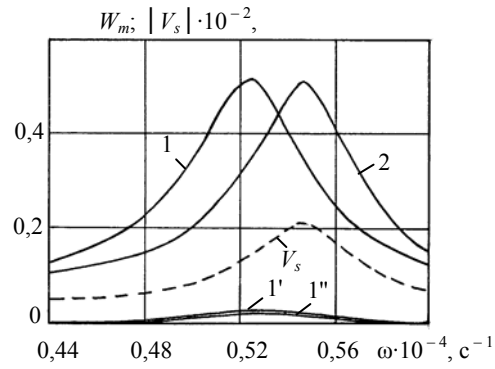


Рис. 3

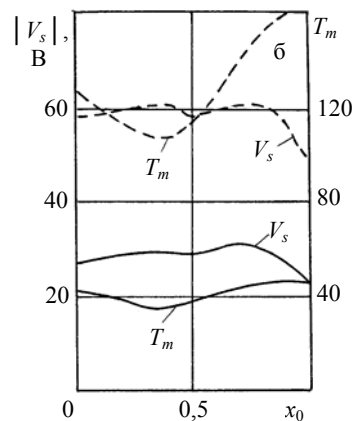
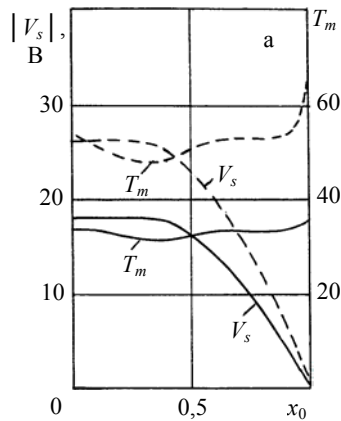


Рис. 4

На рис. 4 показано залежність усталеної максимальної температури дисипативного розігрівання $T_m = T(0)$ °С та показника амплітуди електричного потенціалу $|V_s|$ на електродах кругового сенсора від безрозмірного радіуса x_0 за дії механічного навантаження амплітуди $P_0 = 0,25 \cdot 10^4$ Па у випадках жорсткого (рис. 4а) та шарнірного (рис. 4б) закріплень краю пластинки. Криві обчислені згідно формули (15) за ізотермічного наближення на резонансних частотах ω_s з урахуванням температурної залежності електромеханічних властивостей матеріалів (суцільні лінії) і без такого врахування (штрихові лінії). Бачимо, що під час вимушених механічних коливань пластинки з вказаною амплітудою P_0 і частотами ω_s , величини амплітуди показника електричного потенціалу V_s і максимальної стаціонарної температури T_m саморозігріву є нелінійні функції параметра x_0 , що характеризує площу кругового сенсора. Врахування температурної залежності властивостей матеріалу (суцільні лінії) зумовлює зменшення показників V_s і T_m , що більшою мірою проявляється у разі шарнірного закріплення зовнішнього краю пластинки (рис. 4б).

За розглядуваної зовнішньої дії на жорстко закріплену пластинку з сенсором безрозмірного радіуса $x_0 = 0,6$ частотні залежності максимальних значень амплітуди прогину $w_m = |w(0)| \cdot 10^4$ м та стаціонарної температури $T_m = T(0)$ °С дисипативного розігріву та показника сенсора $|V_s|$ приведені на рис. 5. Для порівняння штриховими лініями показано характеристики для лінійної системи за нехтування температурною залежністю властивостей матеріалу ($T = T_r$). Бачимо, що врахування температурної залежності характеристик матеріалу приводить до ефектів, які типові для в'язкопружних матеріалів із нелінійністю м'якого типу, коли частотні характеристики амплітуд прогину та температури розігріву при цьому зміщуються вліво від резонансу лінійної системи та трансформуються в нелінійні, з появою нижньої ab та верхньої cd віток, яким можуть відповідати свої режими коливань і дисипативного розігріву. Аналогічна залежність від частоти властива амплітуді V_s показників сенсора. Зауважимо, що термомеханічний процес, який відповідає вітці cd , реалізується за зменшення частоти вимушених коливань пластинки в температурному режимі, який відповідає точці c на рисунку. При цьому в розрахунках використовуємо методику продовження за параметром навантаження [13].

Аналіз кривих на рис. 4 і 5 показує, що врахування температурної залежності характеристик пасивного та п'єзоактивного матеріалів пластинки може суттєво впливати на величину електричного потенціалу (15), що виникає на електродах сенсора під час вимушених коливань пластинки. Водночас на величину потенціалу (14) актуатора, який потрібно підвести до його електродів для компенсації дії механічного навантаження під час коливань пластинки, температурна залежність пасивного матеріалу не впливає. Це випливає з формули (14) і обґрунтовано в низці наукових праць, зокрема в [5, 7]. Вплив температурної залежності властивостей п'єзоактивного матеріалу актуатора незначний через малу товщину п'єзонакладок [5]. Проте розрахунки температурного поля під час вимушених коливань в'язкопружних

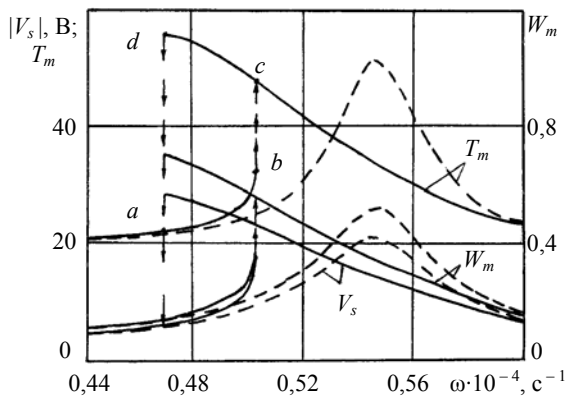


Рис. 5

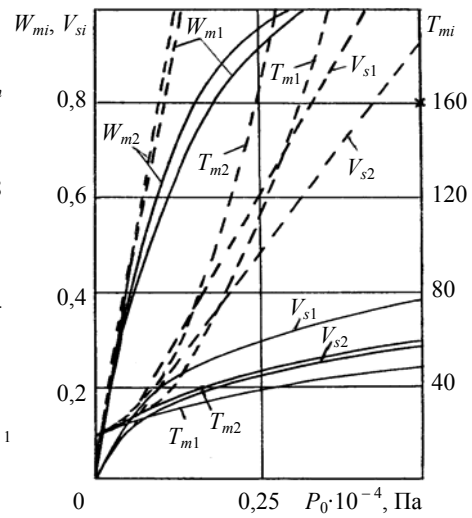


Рис. 6

пластинок за наявності сенсорів і актуаторів необхідні навіть при слабкій температурній залежності властивостей її матеріалу. Це зумовлено тим, що температура вібророзігрівання може досягти точки Кюрі, коли п'єзоматеріал деполяризується та сенсор (актуатор) втрачає працездатність.

Вплив амплітуди поверхневого тиску P_0 на максимальні значення амплітуд прогину $w_{mi} = |w(0)| \cdot 10^4$ м шарнірно закріпленої пластинки, показник сенсора $V_{si} = |V_s| \cdot 10^2$ В і максимальну стаціонарну температуру дисипативного розігріву $T_{mi} = T(0)^\circ$ С показано на рис. 6. Розрахунки проведено для сенсора з радіусами $x_0 = 0,4$ на ізотермічній резонансній частоті $\omega_s = 0,262 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ($i = 1$) та $x_0 = 1,0$ і $\omega_s = 0,316 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ($i = 2$). Суцільні лінії відповідають випадку врахування залежності від температури електромеханічних характеристик матеріалів пластинки, а штрихові — ізотермічному деформуванню. Зірочкою позначено значення температури $T^* = 160^\circ$ С, вище якої для розглядуваної п'єзокераміки [10] спостерігається різке падіння до нуля значення п'єзомодуля d_{31} , що характеризує деполяризацію п'єзоматеріалу. Бачимо також, що ізотермічне наближення розрахунку термомеханічних параметрів і показника сенсора за вимушених резонансних коливань розглядуваної в'язкопружної пластинки можна використовувати лише у випадку порівняно малих амплітуд механічного навантаження ($P_0 \leq 0,1 \cdot 10^4$ Па). Ізотермічне наближення приводить до занижених значень амплітуди механічного навантаження, коли досягається температура Кюрі або величина потенціалу електричного пробою п'єзонакладок.

Висновки. Запропоновано метод активного демпфування вимушених згинних коливань круглій пластини за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при невідомому зовнішньому навантаженні з урахуванням впливу температури дисипативного розігріву. Для розв'язування нелінійної крайової задачі використовується ітераційний метод у поєднанні з чисельними методами дискретної ортогоналізації та кінцевих різниць. На основі чисельних розрахунків показано ефективність запропонованого методу та досліджено вплив температури дисипативного розігріву на активне демпфування вимушених резонансних коливань круглій пластини.

Література

- [1] Григоренко, Я. М. Розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ / Я. М. Григоренко, А. П. Мукоїд. — Київ: Либідь, 1992. — 150 с.
- [2] Дубенец, В. Г. Колебания демпфируемых композитных конструкций. Т. 1 / В. Г. Дубенец, В. В. Хильчевский. — Київ: Вища школа, 1995. — 226 с.
- [3] Карнаухов, В. Г. Вплив температури дисипативного розігріву на активне демпфування вимушених осесиметричних коливань круглій пластини за допомогою п'єзоелектричного актуатора / В. Г. Карнаухов, Т. В. Карнаухова, О. В. П'ятецька // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. — 2004. — Вип. 3. — С. 107-114.
- [4] Карнаухов, В. Г. Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-ти т. Т. 4. Электро-термовязкоупругость / В. Г. Карнаухов, И. Ф. Киричок. — Київ: Наук. думка, 1988. — 320 с.
- [5] Карнаухов, В. Г. Влияние температуры дисипативного разогрева на активное демпфирование вынужденных изгибных колебаний неупругих тонких пластин при помощи пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов: в книге «Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. Акустика і хвилі» / В. Г. Карнаухов, И. Ф. Киричок, В. И. Козлов. — Київ: Наук. думка, 2007. — С. 127-152.

- [6] Карнаухов, В. Г. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении / В. Г. Карнаухов, В. В. Михайленко. — Житомир: 2005. — 426 с.
- [7] Киричок, И. Ф. Изгибные колебания и разогрев круглой биморфной пьезопластины при подводе электрического возбуждения к неоднородно электродированным плоскостям / И. Ф. Киричок // Прикл. механика. — 2005. — Т. 41, № 9. — С. 94-100.
- [8] Киричок, И. Ф. Об изгибных колебаниях и виброразогреве кольцевой пластинки с пьезокерамическими тонкими накладками при одночастотном электрическом и механическом нагружении / И. Ф. Киричок // Прикл. механика. — 2007. — Т. 44, № 2. — С. 99-108.
- [9] Киричок, И. Ф. Одночастотные колебания и виброразогрев трехслойной пьезоактивной круглой пластины при электромеханическом моногармоническом нагружении / И. Ф. Киричок, М. В. Карнаухов // Прикл. механика. — 2008. — Т. 44, № 1. — С. 79-89.
- [10] Нашиф, А. Демпфирование колебаний / А. Нашиф, Д. Джонс, Дж. Хендерсон. — Москва: Мир, 1988. — 448 с.
- [11] Нестеренко, М. П. Моделирование ультразвукового разогрева структурных элементов полимерных волокнистых композитов / М. П. Нестеренко, О. П. Червинко, И. К. Сенченков // Вест. Национального технического ун-та «ХПИ». — 2002. — № 9. — С. 3-8.
- [12] Шульга, Н. А. Колебания пьезоэлектрических тел / Н. А. Шульга, А. М. Болкисев. — Київ: Наук. думка, 1990. — 228 с.
- [13] Tzou, H. S. Intelligent structural Systems / H. S. Tzou, G. L. Anderson (Eds.). — Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1992. — 453 p.
- [14] Tzou, H. S. Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua) / H. S. Tzou. — Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1993. — 400 p.

Control of forced vibrations of circular viscoelastic plates by piezoelectric sensors and actuators with account of vibroheating

Ivan Kyrychok, Tetiana Karnaukhova

A coupled problem on the forced vibrations and dissipative heating of circular viscoelastic plate with piezoelectric sensors and actuators is considered. Complex characteristics of passive and piezoactive materials depend on the temperature. Nonlinear problem is solved by the iterative method, using of the numerical method of a discrete orthogonalization. The influence of dissipative heating temperature on the potential difference of the sensor under action of transverse harmonic pressure on the plate and active damping of its resonance vibrations by piezoelectric sensors and actuators is investigated.

Контроль вынужденных колебаний круглых вязкоупругих пластинок при помощи пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов при учете виброразогрева

Іван Киричок, Тетяна Карнаухова

Рассматривается связанная задача о вынужденных изгибных колебаниях и диссипативном разогреве круглой вязкоупругой пластины с пьезоэлектрическими актуаторами и сенсорами. Учитывается температурная зависимость комплексных характеристик пассивного и пьезоактивного материалов. Нелинейная задача решается итерационным по времени методом с использованием численного метода дискретной ортогонализации. Исследуется влияние температуры виброразогрева на показатели электрического потенциала сенсора при действии поперечного гармонического давления на пластину и на активное демпфирование ее резонансных колебаний с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов.

Отримано 13.05.08