УДК 539.3

Про формулювання комплексно-спряжених крайових задач просторової теорії пружності в голоморфних функціях двох комплексних змінних

Віктор Пабирівський[1], Неля Пабирівська[2]

[1] к. ф.-м. н., Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: pabvic@ukr.net
[2] к. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Я. Бураком)

Розроблено методико формулювання комплексно-спряжених крайових задач просторової теорії пружності в голоморфних функціях двох комплексних змінних. У вихідній постановці задачі вектор переміщень подається у формі Папковича-Нейбера через скалярну та векторну гармонічні функції. На цій основі формулюється комплексно-спряжена крайова задача теорії пружності відносно комплекснозначних функцій від трьох комплексних змінних. Шляхом узагальнення умов Коші-Рімана, вектор переміщення та тензор напружень подаються через скалярну та векторну голоморфні функцій двох комплексних змінних. Сформульовано відповідні граничні умови та сконкретизовано додатково інтегральні умови рівності нулеві головного моменту вектора напружень на бічній поверхні тіла.

Ключові слова: напружено-деформований стан, подання Папковича-Нейбера, умови Коші-Рімана, крайові задачі, голоморфна функція.

Вступ. Розвитку підходів і методів дослідження просторових задач теорії пружності присвячено значну кількість наукових праць як вітчизняних, так і зарубіжних вчених [1-3]. Для розв'язування крайових задач плоскої теорії пружності широко використовують методи комплексних потенціалів [4]. Апарат функцій комплексної змінної застосовували також і для дослідження просторових задач теорії пружності. Зокрема, в роботі [5] запропоновано подання розв'язків крайових задач теорії пружності у формі інтегральних операторів від аналітичних функцій комплексної змінної. У монографії [6] апарат p-, (p, q)-аналітичних функцій комплексної змінної застосовано для побудови розв'язків осесиметричних крайових задач теорії пружності. Роботу [7] присвячено постановці крайових задач теорії пружності за допомогою функцій двох комплексних змінних у чотиривимірному просторі.

Метою даної роботи є формулювання комплексно-спряженої крайової задачі теорії пружності в голоморфних функціях двох комплексних змінних.

1. Постановка та формулювання крайової задачі

1.1. Вихідні співвідношення. Розглянемо деформівне пружне тверде тіло $K \bigcup \partial K$, яке в початковому ненавантаженому стані бієктивно відображається на область

$X \bigcup \partial X$ евклідового простору. Тіло перебуває під дією стаціонарного силового навантаження, прикладеного до його бічної поверхні ∂X .

Лінійна задача теорії пружності в статичній постановці зводиться до побудови розв'язку рівнянь рівноваги [1]

$$\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}\otimes\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) = 0, \quad (1)$$

де $\vec{u} = u_i\left(x_1, x_2, x_3\right)\vec{e}_i$ — вектор переміщення $\left(i = \overline{1,3}\right)$; $\{x_i\}$ — декартові координати довільно вибраної матеріальної точки $k \in K$ у природному однорідному стані; $\vec{e}_i$ — базисні орти декартової системи координат; $\vec{r}$ — радіус-вектор довільно вибраної точки тіла в початковій конфігурації; $\vec{\nabla}$ — диференціальний оператор Гамільтона; $\Delta \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ — оператор Лапласа; λ, μ — пружні сталі Ляме.

Тензор напружень $\hat{\sigma}$ в межах лінійної теорії пружності подається через вектор переміщень $\vec{u}$ співвідношенням

$$\hat{\sigma} = \lambda\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)\hat{I} + \mu\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{u} + \vec{u}\otimes\vec{\nabla}\right) \quad (2)$$

і задовольняє на бічній поверхні ∂X граничну умову

$$\left(\vec{n}\cdot\hat{\sigma}\right)\Big|_{\partial X} \equiv \vec{\sigma}_n \equiv \vec{n}\cdot\left[\lambda\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)\hat{I} + \mu\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{u} + \vec{u}\otimes\vec{\nabla}\right)\right]\Big|_{\partial X} = \vec{\sigma}_n^+, \quad (3)$$

де $\hat{I}$ — одиничний тензор; $\vec{n}$ — зовнішня нормаль до поверхні ∂X; $\vec{\sigma}_n\left(x_1, x_2, x_3\right)$ — вектор напружень; $\vec{\sigma}_n^+\left(x_1, x_2, x_3\right)$ — заданий вектор поверхневих зусиль, який справджує інтегральні умови самозрівноваженості зовнішнього навантаження на бічній поверхні тіла ∂X

$$\int_{\partial X}\vec{\sigma}_n^+ d\Sigma = 0; \qquad \int_{\partial X}\left(\vec{r}\times\vec{\sigma}_n^+\right)d\Sigma = 0. \quad (4)$$

1.2. Подання розв'язку у формі Папковича-Нейбера. Надалі використаємо подання вектора переміщень $\vec{u} = \vec{u}\left(\vec{r}\right) = u_i\vec{e}_i$ у формі Папковича-Нейбера [2]

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\left(\varphi_0 + \vec{r}\cdot\vec{\varphi}\right) - 4(1-\nu)\vec{\varphi}. \quad (5)$$

Тут $\varphi_0 = \varphi_0\left(\vec{r}\right)$, $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}\left(\vec{r}\right)$ — скалярна та векторна гармонічні функції

$$\Delta\,\varphi_0\left(\vec{r}\right) = 0, \qquad \Delta\,\vec{\varphi}\left(\vec{r}\right) = 0, \quad (6)$$

ν — коефіцієнт Пуассона.

За врахування формули (5) для визначення тензора напружень отримуємо

$$\hat{\sigma}\left(\vec{r}\right) = 2\mu\Big\{\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla}\varphi_0\left(\vec{r}\right) + \left[\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla}\otimes\vec{\varphi}\left(\vec{r}\right)\right]\cdot\vec{r} -$$
$$-(1-2\nu)\left[\vec{\nabla}\otimes\vec{\varphi}\left(\vec{r}\right) + \vec{\varphi}\left(\vec{r}\right)\otimes\vec{\nabla}\right] - 2\nu\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}\left(\vec{r}\right)\right]\hat{I}\Big\}. \quad (7)$$

Таким чином, крайову задачу (1)-(3) зведено до знаходження гармонічних функцій $\varphi_0(\vec{r})$, $\vec{\varphi}(\vec{r})$, які задовольняють такі крайові умови

$$\vec{\sigma}_n \equiv \left(\vec{n}\cdot\hat{\sigma}\right)\Big|_{\partial X} \equiv 2\mu\left\{\vec{n}\cdot\left[\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla}\varphi_0+\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla}\otimes\vec{\varphi}\right)\cdot\vec{r}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(1-2\nu)\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{\varphi}+\vec{\varphi}\otimes\vec{\nabla}\right)-2\nu\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}\right)\hat{I}\right]\Big|_{\partial X}\right\}=\vec{\sigma}_n^{+}. \tag{8}$$

Відзначимо, що подання шуканого розв'язку вихідної крайової задачі через вектор переміщення $\vec{u}$ у формі Папковича-Нейбера (5) забезпечує виконання першої з інтегральних умов (4), а саме, рівності нулеві головного вектора зовнішнього навантаження.

1.3. Формулювання крайової задачі в голоморфних функціях двох комплексних змінних z_1, z_2. Поставимо у взаємнооднозначну відповідність декартовим координатам $\{x_i\}$ $\left(i=\overline{1,3}\right)$ три комплексні змінні

$$z_1 = x_1 + ix_2, \quad z_2 = x_2 + ix_3, \quad z_3 = x_3 + ix_1. \tag{9}$$

Введемо відповідні оператори похідних у просторі змінних (z_1, z_2, z_3)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}=\frac{1+i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}-i\frac{\partial}{\partial x_3}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z_2}=\frac{1+i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{\partial}{\partial x_3}-i\frac{\partial}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z_3}=\frac{1+i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial}{\partial x_1}-i\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

У комплексних змінних (z_1, z_2, z_3) тривимірну задачу теорії пружності (1)-(3) зведено до крайової задачі на гармонічні функції (6)-(8), у якій радіус-вектор подається так

$$\vec{r}(z_1,z_2,z_3)=\frac{(1+i)}{2}\left[(z_1-iz_2-z_3)\vec{e}_1+(z_2-iz_3-z_1)\vec{e}_2+(z_3-iz_1-z_2)\vec{e}_3\right].$$

Для формулювання крайової задачі відносно функцій комплексних змінних (z_1, z_2, z_3) розглянемо додатково іншу крайову задачу теорії пружності, аналогічну до задачі (6)-(8), яка сформульована відносно вектора переміщень $\vec{u}^{*}=\vec{\nabla}\left(\psi_0+\vec{r}\cdot\vec{\psi}\right)-$ $-4(1-\nu)\vec{\psi}$, поданого через гармонічні функції $\psi_0(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{\psi}(x_1,x_2,x_3)$

$$\Delta\psi_0(\vec{r})=0, \quad \Delta\vec{\psi}(\vec{r})=0. \tag{10}$$

Поставимо у відповідність гармонічним функціям $\varphi_0(\vec{r}),\vec{\varphi}(\vec{r})$ вихідної крайової задачі та гармонічним функціям $\psi_0(\vec{r}),\vec{\psi}(\vec{r})$ додаткової задачі функції від комплексних змінних (z_1, z_2, z_3)

$$F_0\left(z_1, z_2, z_3\right) = \varphi_0\left(x_1, x_2, x_3\right) + i\psi_0\left(x_1, x_2, x_3\right), \tag{11}$$

$$\vec{F}\ \left(z_1, z_2, z_3\right) = \vec{\varphi}\ \left(x_1, x_2, x_3\right) + i\ \vec{\psi}\ \left(x_1, x_2, x_3\right). \tag{12}$$

Розглянемо комплексні вектор $\vec{w}$ переміщень і тензор напружень $\hat{P}$

$$\vec{w}\left(z_1, z_2, z_3\right) \equiv \vec{u}\left(z_1, z_2, z_3\right) + i\vec{u}^*\left(z_1, z_2, z_3\right), \tag{13}$$

$$\hat{P}\left(z_1, z_2, z_3\right) \equiv \hat{\sigma} + i\hat{\sigma}^* = \mu\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{w} + \vec{w}\otimes\vec{\nabla}\right) + \lambda\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{w}\right)\hat{I}. \tag{14}$$

Тут

$$\hat{\sigma}^*\left(z_1, z_2, z_3\right) = 2\mu\Big\{\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla}\psi_0\left(\vec{r}\right) + \left[\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla}\otimes\vec{\psi}\left(\vec{r}\right)\right]\cdot\vec{r}\left(z_1, z_2, z_3\right) -$$
$$-\left(1-2\nu\right)\left[\vec{\nabla}\otimes\vec{\varphi}\left(\vec{r}\right) + \vec{\psi}\left(\vec{r}\right)\otimes\vec{\nabla}\right] - 2\nu\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{\psi}\left(\vec{r}\right)\right]\hat{I}\Big\}.$$

Відповідно до співвідношень (11)-(14) сформулюємо граничну задачу на функції $F_0\left(z_1, z_2, z_3\right), \vec{F}\left(z_1, z_2, z_3\right)$

$$\Delta F_0\left(z_1, z_2, z_3\right) = 0, \qquad \Delta\vec{F}\left(z_1, z_2, z_3\right) = 0; \tag{15}$$

$$\left(\vec{n}\cdot\hat{P}\right)\Big|_{\partial X} \equiv 2\mu\,\vec{n}\cdot\Big[\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla}F_0 + \left(\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla}\otimes\vec{F}\right)\cdot\vec{r} - \left(1-2\nu\right)\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{F} + \vec{F}\otimes\vec{\nabla}\right) -$$
$$-2\nu\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)\hat{I}\Big]\Big|_{\partial X} = \vec{P}_n^+, \tag{16}$$

де

$$\hat{P}\left(z_1, z_2, z_3\right) = 2\mu\Big\{\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla}F_0\left(z_1, z_2, z_3\right) + \left[\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla}\otimes\vec{F}\left(z_1, z_2, z_3\right)\right]\cdot\vec{r}\left(z_1, z_2, z_3\right) -$$
$$-\left(1-2\nu\right)\left[\vec{\nabla}\otimes\vec{F}\left(z_1, z_2, z_3\right) + \vec{F}\left(z_1, z_2, z_3\right)\otimes\vec{\nabla}\right] - 2\nu\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\left(z_1, z_2, z_3\right)\right]\hat{I}\Big\}.$$

Комплексний вектор поверхневих зусиль $\vec{P}_n^+ \equiv \vec{\sigma}_n^+ + i\vec{\sigma}_n^{+(*)}$ справджує умови самозрівноваженості зовнішнього навантаження на бічній поверхні тіла ∂X

$$\int\limits_{\partial X}\left(\vec{r}\times\vec{P}_n^+\right)d\Sigma = 0. \tag{17}$$

1.4. Основна комплексно-спряжена крайова задача в голоморфних функціях двох комплексних змінних. На множині сформульованих крайових задач (15)-(17) виділимо підмножину відповідних комплексно-спряжених задач, стосовно функцій двох комплексних змінних z_1, z_2.

Для такої підмножини комплексно-спряжених розв'язків виконуються умови

$$\frac{\partial F_0\left(z_1, z_2, z_3\right)}{\partial z_3} = 0, \qquad \frac{\partial\vec{F}\left(z_1, z_2, z_3\right)}{\partial z_3} = 0, \tag{18}$$

які накладають такі в'язі на гармонічні функції $\varphi_0(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{\varphi}(x_1,x_2,x_3)$ та $\psi_0(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{\psi}(x_1,x_2,x_3)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_1} - \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_3} = \dfrac{\partial\psi_0}{\partial x_2}, \\ \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_2} = \dfrac{\partial\psi_0}{\partial x_3} - \dfrac{\partial\psi_0}{\partial x_1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x_3} = \dfrac{\partial\vec{\psi}}{\partial x_2}, \\ \dfrac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x_2} = \dfrac{\partial\vec{\psi}}{\partial x_3} - \dfrac{\partial\vec{\psi}}{\partial x_1}. \end{cases} \tag{19}$$

Співвідношення (19) будемо трактувати надалі, як узагальнення відомих із літератури умов Коші-Рімана [4] на гармонічні функції.

Крайову задачу на гармонічні функції $\psi_0(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{\psi}\ (x_1,x_2,x_3)$ *називатимемо спряженою до вихідної задачі на гармонічні функції* $\varphi_0(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{\varphi}\ (x_1,x_2,x_3)$*, якщо ці функції справджуватимуть умови (19).*

За виконання умов (18) для скалярної $F_0(z_1,z_2,z_3)$ та векторної $\vec{F}(z_1,z_2,z_3)$ функцій розв'язки комплексно-спряженої задачі виражаються через голоморфні функції двох комплексних змінних z_1, z_2

$$F_0(z_1,z_2,z_3) \equiv \Phi_0(z_1,z_2), \qquad \vec{F}(z_1,z_2,z_3) \equiv \vec{\Phi}(z_1,z_2)\ ,$$

які задовольняють рівняння Лапласа

$$\Delta\Phi_0(z_1,z_2) = 0, \qquad \Delta\vec{\Phi}(z_1,z_2) = 0\,.$$

Тут $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2}$.

Тоді комплексні вектор переміщень $\vec{w}$ та тензор напружень $\hat{P}$ подаються так

$$\vec{w}(z_1,z_2,z_3) = \vec{\nabla}^*\Phi_0(z_1,z_2) + \left[\vec{\nabla}^* \otimes \vec{\Phi}(z_1,z_2)\right]\cdot\vec{r}(z_1,z_2,z_3) + (4\nu-3)\vec{\Phi}(z_1,z_2)\,; \tag{20}$$

$$\begin{gathered}\hat{P}(z_1,z_2,z_3) = 2\mu\Big\{\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^*\Phi_0(z_1,z_2) + \left[\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\Phi}(z_1,z_2)\right]\cdot\vec{r}(z_1,z_2,z_3) - \\ -(1-2\nu)\left[\vec{\nabla}^*\otimes\vec{\Phi}(z_1,z_2) + \vec{\Phi}(z_1,z_2)\otimes\vec{\nabla}^*\right] - 2\nu\left(\vec{\nabla}^*\cdot\vec{\Phi}(z_1,z_2)\right)\hat{I}\Big\}.\end{gathered} \tag{21}$$

Тут $\Phi_0(z_1,z_2), \vec{\Phi}(z_1,z_2)$ — голоморфні функції комплексних змінних z_1, z_2; $\vec{\nabla}^* \equiv \vec{e}_i\nabla_i^* = \vec{e}_1\dfrac{\partial}{\partial z_1} + \vec{e}_2\left(i\dfrac{\partial}{\partial z_1} + \dfrac{\partial}{\partial z_2}\right) + \vec{e}_3\left(i\dfrac{\partial}{\partial z_2}\right)$ — оператор Гамільтона.

Для комплексного тензора напружень $\hat{P}$ на бічній поверхні тіла ∂X введемо комплексний вектор напружень

$$\left(\vec{n}\cdot\hat{P}\right)\Big|_{\partial X} \equiv \left(n_j P_{jk}\vec{e}_k\right)\Big|_{\partial X} \equiv \left(P_{n(k)}\vec{e}_k\right)\Big|_{\partial X} \equiv \vec{P}_n\,. \tag{22}$$

Граничними умовами для комплексно-спряженої задачі на бічній поверхні тіла ∂X є умова рівності комплексного вектора зовнішнього навантаження $\vec{P}_n^{(+)}$ і вектора напружень $\vec{P}_n$

$$\vec{P}_n^{(+)} = \vec{P}_n \equiv \left(\vec{n} \cdot \hat{P}\right)\Big|_{\partial X} \tag{23}$$

та виконання інтегральної умови статичної рівноваги пружного тіла, а саме, рівності нулеві головного моменту зовнішнього навантаження

$$\int_{\partial X} \left(\vec{r} \times \vec{P}_n\right) d\Sigma = 0 . \tag{24}$$

Таким чином, задачу про побудову комплексного вектора переміщень $\vec{w}$ (20) і тензора напружень $\hat{P}$ (21), які подаються через скалярну $\Phi_0\left(z_1, z_2\right)$ та векторну $\vec{\Phi}\left(z_1, z_2\right)$ голоморфні функції, задовольняють граничні умови

$$\left(\vec{n} \cdot \hat{P}\right)\Big|_{\partial X} \equiv 2\mu\Big\{n \cdot \Big[\vec{\nabla}^* \otimes \vec{\nabla}^* \Phi_0 + \left(\vec{\nabla}^* \otimes \vec{\nabla}^* \otimes \vec{\Phi}\right) \cdot \vec{r} -$$
$$-\left(1 - 2\nu\right)\left(\vec{\nabla}^* \otimes \vec{\Phi} + \vec{\Phi} \otimes \vec{\nabla}^*\right) - 2\nu\left(\vec{\nabla}^* \cdot \vec{\Phi}\right)\hat{I}\Big]\Big\}\Big|_{\partial X} = \vec{P}_n^{+} \tag{25}$$

й умови (24), будемо трактувати як *основну комплексно-спряжену крайову* задачу просторової теорії пружності.

Висновки. На основі подання вектора переміщень у формі Папковича-Нейбера через скалярну φ_0 і векторну $\vec{\varphi}$ гармонічні функції крайову задачу тривимірної теорії пружності зведено до відповідної крайової задачі на скалярну $\Phi_0\left(z_1, z_2\right)$ та векторну $\vec{\Phi}\left(z_1, z_2\right)$ голоморфні функції двох комплексних змінних z_1, z_2. Шляхом конкретизації постановки комплексно-спряженої задачі до вихідної, отримано узагальнення умов Коші-Рімана на гармонічні функції.

Література

[1] *Лурье, А. И.* Пространственные задачи теории упругости / *А. И. Лурье*. — Москва: Гостехиздат, 1955. — 492 с.

[2] *Тимошенко, С. П.* Теория упругости / *С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер*. — Москва: Наука, 1975. — 575 с.

[3] *Szellagowski, F.* Solution of three-dimensional problem of the theory of elasticity in functions of complex variables / *F. Szellagowski* // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Thechn. — 1962. — Vol. 10, № 7. — P. 253-260.

[4] *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / *Н. И. Мусхелишвили.* — Москва: Наука, 1966. — 708 с.

[5] *Соловьев, Ю. И.* О приведении пространственных осесимметричных задач теории упругости к граничным задачам для аналитических функций комплексного переменного / *Ю. И. Соловьев* // Прикл. математика и механика. — 1971. — Т. 35, № 5. — С. 918-925.

[6] *Положий, Г. Н.* Теория и применение *p*-аналитических и *(p, q)*-аналитических функций / *Г. Н. Положий*. — Киев: Наук. думка, 1973. — 424 с.

[7] *Александрович, А. И.* Применение теории функций двух комплексных переменных в теории упругости / *А. И. Александрович* // Доклады АН СССР. — 1977. — Т. 232, № 3. — С. 542-544.

On formulation of the complex conjugated-value boundary problems of the space elastic theory by the method of holomorphic functions of two complex variables

Viktor Pabyrivskyi, Nelia Pabyrivska

The method of statement and formulation of the complex conjugated boundary problems of the space elastic theory by the method of holomorphic functions of two complex variables is developed. In the initial statement of the problem the displacement vector in the form of Papkovich-Neuber is represented in terms of scalar and vector harmonious functions. On this basis the complex conjugated boundary problem of the elastic theory with respect to the complex functions of three complex variables is formulated. The conditions of Cauchy-Riemann were generalized for scalar and vector harmonic functions. The above results are used for representation of the displacement vector and stress tensor via scalar and vector holomorphic functions of two complex variables. The basic complex conjugated problem on corresponding holomorphic functions is formulated and additional integral conditions of stress tensor principal moment equality to zero on the solid side surface are determined.

О формулировании комплексно-сопряженных граничных задач пространственной теории упругости при помощи голоморфных функций двух комплексных переменных

Виктор Пабыривский, Неля Пабыривска

Разработана методика формулирования комплексно-сопряженных краевых задач пространственной теории упругости с использованием метода голоморфных функций двух комплексных переменных. В исходной постановке задачи вектор перемещений представляется в форме Папковича-Нейбера через скалярную и векторную гармонические функции. На этом основании формулируется комплексно-сопряженная краевая задача теории упругости относительно комплекснозначных функций трех комплексных переменных. Получено обобщение условий Коши-Римана на скалярную и векторную гармонические функции. Изложенные результаты использованы для представления комплексных вектора перемещений и тензора напряжений через скалярную и векторную голоморфные функции двух комплексных переменных. Сформулирована основная комплексно-сопряженная задача на соответствующие голоморфные функции.

Отримано 18.05.09.