

Розвиток пластичних смуг в околі вершин окресленого дугами двох кіл симетричного вирізу за умов антиплоскої деформації

Іван Кривень¹, Мирослава Яворська²

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: ikryven@gmail.com

² к. т. н., доцент, Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, вул. Руська, 56, Тернопіль, 46001, e-mail: myavorska@gmail.com

Отримано аналітичний розв'язок задачі про розвиток пластичних смуг в ідеально пружно-пластичному тілі з симетричним вирізом, утвореним дугами двох кіл. Досліджено розвиток смуг для вирізів з довільною величиною кута при його вершинах. Встановлено, що на початковій стадії розвиток пластичних смуг визначається в основному величиною кута біля вершини вирізу, а на стадії розвинутої пластичності ріст пластичних смуг слабо залежить і від форми вирізу, і від величини кута біля його вершини.

Ключові слова: гострокінцевий виріз, пластична смуга, конформне відображення, тріщина.

Вступ. Здебільшого під час аналізу напружено-деформівного стану тріщиноподібний дефект моделюють математичним розрізом, у якому, незважаючи на нульову відстань між протилежними поверхнями, їхня взаємодія до уваги не приймається. Небагато досліджень, а тим паче у пружно-пластичній постановці, стосуються тріщиноподібних вирізів, які у граничному випадку могли б переходити в тріщину, як, наприклад [1, 2], де вивчається розвиток смуг пластичності в околі півбезмежних прямокутної та заокругленої щілин, чи [3], де проведено аналіз пластичних деформацій у тілі з двоперіодичною системою ромбічних вирізів.

Розглядаємо ідеально пружно-пластичне тіло, яке перебуває в умовах активної деформації. Дослідимо розвиток у ньому пластичних смуг в околі вершин симетричного вирізу, утвореного дугами двох кіл однакового радіуса (див. рис. 1). Довжина та ширина вирізу дорівнюють $2l$ і $2h$ відповідно. Центри кіл знаходяться на осі ординат, їхні радіуси $r = (l^2 + h^2)/(2h)$, кут біля вершин вирізу (кут між дотичними до обох дуг у вершині вирізу) $\alpha = 2 \arcsin \left[\frac{2lh}{l^2 - h^2} \right]$, k — зсувна границя текучості матеріалу.

Вважаємо, що деформацію тіла зумовлено діючими на нескінченності однорідними зсувними зусиллями

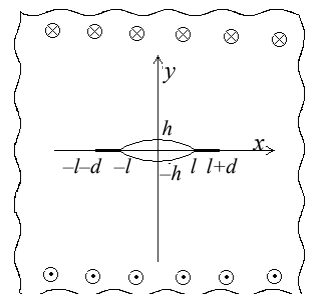


Рис. 1

$\tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = \tau_{\infty}$. Через необмеженість напружень в околі кутової точки навантаженого тіла, незалежно від рівня навантаження, в околі вершин вирізу завжди виникатимуть пластичні деформації. За моделлю Леонова-Панасюка-Дагдейла вважатимемо їх локалізованими у площині симетрії вирізу (див. рис. 1). Визначимо довжину d смуг, як функцію величини діючого навантаження τ_{∞} .

1. Формулювання та розв'язування задачі

За умов антиплоскої деформації в пружній частині тіла компоненти τ_{xz} і τ_{yz} тензора напружень складають аналітичну функцію $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ ($\zeta = x + iy$). З огляду на симетрію задачі достатньо знайти її розв'язок поза вирізом у першому квадранті (надалі область D , рис. 2a).

У нашому випадку антиплоске переміщення $w(x, y)$ є парне відносно осі ординат і непарне відносно абсцис, то

$$\tau_{xz}(0, y) = 0, \quad y > h; \quad \tau_{xz}(x, 0) = 0, \quad x > l + d. \quad (1)$$

Через відсутність напружень на межі вирізу

$$\tau_{nz}(x, y) = 0, \quad x^2 + (y + a)^2 = r^2, \quad 0 < x < l, \quad (2)$$

де \vec{n} — вектор одиничної нормалі до дуги кола, $a = (l^2 - h^2)/(2h)$ — ордината центра кола.

Запишемо умову пластичності на пластичній смузі

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2, \quad l \leq x \leq l + d, \quad y = 0, \quad (3)$$

і те, що вона не досягається в усіх інших точках області D

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 < k^2.$$

У нескінченно віддаленій точці задані такі компоненти напружень

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tau_{xz} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \tau_{yz} = \tau_{\infty}. \quad (4)$$

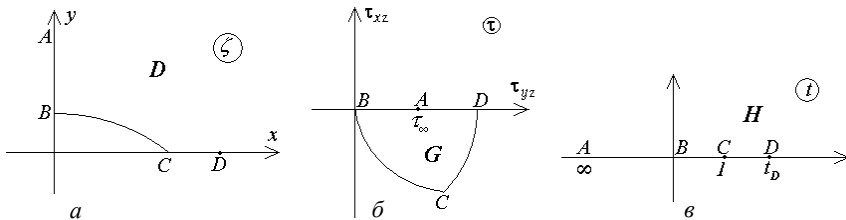


Рис. 2

Сформулюємо (1)-(4) як крайову задачу для знаходження аналітичної функції $\tau(\zeta)$. Подамо умови (1), (2), (4) у вигляді

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tau(\zeta) = 0, \quad \zeta = iy, \quad y > h; \quad \operatorname{Im} \tau(\zeta) = 0, \quad \zeta = x, \quad y > l; \\ |\tau(\zeta)| = k, \quad \zeta = x, \quad l \leq x \leq l + d, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\operatorname{Re}(\tau(\zeta)d\zeta) = 0, \quad (6)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tau(\zeta) = \tau_{\infty}. \quad (7)$$

Застосуємо для розв'язування сформульованої крайової задачі метод конформних відображень [4, 5].

Аналітична й однолисна в області D функція $\tau(\zeta)$ відображає її на деяку область G комплексної площини τ (рис. 2б). Проте умови (5)-(7) безпосередньо не визначають образів усіх ділянок границі області D . Так, невизначеною в площині τ залишається лінія BC , в яку відображається дуга вирізу. Тому звернемося до допоміжної комплексної площини t (рис. 2в) та будемо шукати функцію $\tau(\zeta)$ у параметричній формі

$$\tau = \tau_1(t), \quad \zeta = \zeta_1(t) \quad (t \in H), \quad (8)$$

де H — область $\operatorname{Im} t > 0$ допоміжної комплексної площини t (рис. 2в). Відображення (8) мали б забезпечити спільний прообраз на межі області H для відповідних точок на межі областей D і G .

Області D і H цілком визначені. Конформне відображення H на D можна побудувати композицією елементарних функцій

$$\zeta = l \frac{(\sqrt{t} + 1)^\lambda + (\sqrt{t} - 1)^\lambda}{(\sqrt{t} + 1)^\lambda - (\sqrt{t} - 1)^\lambda}, \quad (9)$$

де $\lambda = (2\pi - \alpha)/(2\pi)$; \sqrt{t} — аналітична в області H функція, значення якої на додатній дійсній півосі є дійсне та додатне.

Оскільки $\arg d\zeta = \arg \zeta'(t)$, то згідно з формулою (9) на відрізьку $1 \leq \operatorname{Re} t \leq t_D$, $\operatorname{Im} t = 0$

$$\arg d\zeta = q(t), \quad (10)$$

$$\text{де } q(t) = -\frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{(1 + \sqrt{t})^\lambda \sin \alpha/2}{(1 + \sqrt{t})^\lambda + (1 - \sqrt{t})^\lambda \cos \alpha/2}.$$

Звернемося до аналітичної функції $\varphi(t) = \ln(\tau_1(t)/k)$ в області H . Її визначення зводиться до крайової задачі Келдиша-Седова

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im} \varphi(t) &= 0 \quad (-\infty < \operatorname{Re} t < 0, \quad \operatorname{Im} t = 0); \\
 \operatorname{Im} \varphi(t) &= -\frac{\pi}{2} - q(t) \quad (0 < \operatorname{Re} t < 1, \quad \operatorname{Im} t = 0); \\
 \operatorname{Re} \varphi(t) &= 0 \quad (1 < \operatorname{Re} t < t_D, \quad \operatorname{Im} t = 0); \\
 \operatorname{Im} \varphi(t) &= 0 \quad (t_D < \operatorname{Re} t < +\infty, \quad \operatorname{Im} t = 0),
 \end{aligned} \tag{11}$$

де t_D — точка на дійсній осі t , яка відповідає кінцю пластичної смуги.
 З урахуванням [6] обмежений розв'язок задачі (11) запишемо так

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi i} \sqrt{(t_D - t)(t - 1)} \int_0^1 \frac{\pi/2 + q(\eta)}{\sqrt{(\eta - 1)(\eta - t_D)} \eta - t} d\eta.$$

Оскільки

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\pi/2 + q(\eta)}{\sqrt{(\eta - 1)(\eta - t_D)}} d\eta, \tag{12}$$

то

$$\tau_\infty = k e^{s(t_D)}. \tag{13}$$

Тут через $s(t_D)$ позначено праву частину формули (12) як функцію параметра t_D .

Із співвідношень (9), (13) можна визначити залежність довжини пластичних смуг від величини діючого навантаження

$$\tau_\infty = k e^{s(t_D)}, \quad d = l \left[\frac{(\sqrt{t} + 1)^\lambda + (\sqrt{t} - 1)^\lambda}{(\sqrt{t} + 1)^\lambda - (\sqrt{t} - 1)^\lambda} - 1 \right] \quad (t_D \in (1, +\infty)).$$

2. Приклади і результати

На рис. 3 показані залежності довжин смуг біля вершин криволінійного вирізу від навантаження для трьох значень кутів у вершині (криві 1'-3'), а також крива (ненумерована), що описує розвиток пластичних смуг для тріщини завдовжки $2l$ [7].

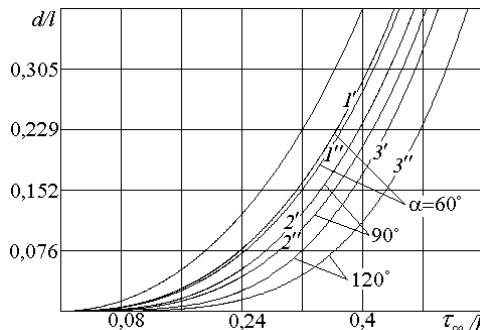


Рис. 3. Залежність довжини смуги біля вершин криволінійного вирізу від навантаження, $d = 2l \tau_\infty^2 / (k^2 - \tau_\infty^2)$

Для порівняння наведено аналогічні результати, одержані в праці [3], у випадку пружно-пластичного деформування необмеженого тіла з ромбічним вирізом (криві 1"-3"). Горизонтальна діагональ вирізу, що з'єднує вершини з кутами α , як і дуговий виріз, має довжину $2l$

$$d = \frac{l}{T} \int_1^q \eta^{2\pi \frac{\alpha}{2} - 1} (1 - \eta)^{-\frac{\alpha}{2\pi}} d\eta,$$

де $T = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \int_0^1 \eta^{2\pi \frac{\alpha}{2} - 1} (1 - \eta)^{-\frac{\alpha}{2\pi}} d\eta$, $q = \left(\frac{1+p}{1-p}\right)^2$, $p = \left(\frac{\tau_{\infty}}{k}\right)^{2\pi/(\pi-\alpha)}$.

Як бачимо на початковій стадії розвитку (поки довжина смуг значно менша, ніж характерний розмір вирізу) ріст смуг визначається величиною кута біля вершини та майже не залежить від форми вирізу.

Із ростом навантаження (якщо відповідна йому довжина пластичних смуг досягає близько 20 % довжини вирізу) на швидкість росту смуг впливає не стільки величина кута біля вершини, як довжина самого вирізу. Внаслідок подальшого зростання навантаження швидкість росту смуг, в основному, визначається його рівнем, ріст довжини пластичних смуг практично не залежить від величини кута біля вершини вирізу і є приблизно однаковий для тріщини, ромбічного та криволінійного вирізів.

Висновки. Форма вирізу найпомітніше впливає на розвиток смуг, якщо їхня довжина співвимірна з довжиною вирізу. Із наближенням форми вирізу до тріщини (зменшенні кута при вершинах вирізу) залежність довжини смуг від навантаження поступово наближається до відповідного закону росту смуг в околі вершин тріщини.

Література

- [1] *Кривень, В. А.* Пластичні зони при зсуві біля прямокутного і закругленого вирізів сталої ширини / *В. А. Кривень, М. І. Яворська* // Математичні методи і фіз.-мех. поля. — 2004. — Т. 47, № 2. — С. 138-144.
- [2] *Кривень, В. А.* Розвиток пластичних смуг під час зсуву біля вершин прямокутної щілини / *В. А. Кривень, М. І. Яворська* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2003. — № 4. — С. 17-21.
- [3] *Кривень, В. А.* Розвиток пластичних смуг у середовищі з двоперіодичною системою ромбічних вирізів за поздовжнього зсуву / *В. А. Кривень, Г. Т. Сулим, Л. С. Мандзій* // Машинознавство. — 2003. — № 9. — С. 13-16.
- [4] *Иванов В.И.* Конформные отображения и их приложения / *В. И. Иванов, В. Ю. Попов.* — Москва: Едиториал УРСС, 2002. — 324 с.
- [5] *Crowdy, D. G.* Conformal Mappings between Canonical Multiply Connected Domains / *D. G. Crowdy, J. S. Marshall* // Computational Methods and Function Theory. — 2006. — Vol. 6, No 1. — P. 59-76.
- [6] *Мухелишвили, Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения / *Н. И. Мухелишвили.* — Москва: Физматгиз, 1968. — Т. 47, № 2. — 512 с.
- [7] *Костров, Б. В.* Трещина продольного сдвига с бесконечно узкой пластической зоной / *Б. В. Костров, Л. В. Никитин* // Прикл. матем. и механика. — 1967. — Т. 31, № 2. — С. 334-336.

Іван Кривень, Мирослава Яворська

Розвиток пластичних смуг в околі вершин окресленого дугами двох кіл симетричного вирізу ...

Plastic layers development in the neighbourhood of tips of symmetric cut formed by arcs of two circles under uniplane deformation

Ivan Kryven, Myroslava Javorska

The analytical solution of the problem about the plastic bands development in an ideally plastic-elastic body with a symmetric cut formed by arcs of two circles has been obtained. Bands development at the cut tip under load increasing for different values of angels is studied. It is found that at the initial stage the development of plastic bands is determined mainly by the value of the angle at the cut tip, thus at the stage of developed plasticity, the plastic strips growth depends slightly on the cut shape and the angle value at its tip.

Развитие пластических слоев в окрестности вершин образованного дугами двух окружностей симметричного выреза в условиях антиплоской деформации

Иван Крывень, Мирослава Яворская

Получено аналитическое решение задачи развития пластических полос в идеально упруго-пластическом теле с симметричным вырезом, образованным дугами двух окружностей. Исследовано развитие полос для вырезов с произвольной величиной угла в вершинах. Установлено, что в начальной стадии развитие пластических полос определяется в основном величиной угла при вершине выреза, в стадии развитой пластичности рост полос почти не зависит от формы выреза и величины угла при его вершинах.

Представлено членом-кореспондентом НАН України Я. Бураком

Отримано 30.04.10