УДК 519.6

Степеневий метод розв'язування систем на власні значення

Анастасія Недашковська

К. ф.-м. н., Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: nastia.nedashkovska@gmail.com

У ході розробки обчислювальних методів матричної лінеаризації розв'язування систем поліноміально-нелінійних матричних рівнянь виникла необхідність у знаходженні власних значень, що задані над множиною некомутуючих матриць і матриць перестановки. У роботі розглянуто цей новий клас задач на власні значення, здійснено постановку задачі, введено означення системи задач на власні значення. Запропоновано й обґрунтовано ітераційний метод знаходження одного з розв'язків системи задач на власні значення. Цей метод є узагальнення класичного степеневого методу відшукання «старшої» пари матриці на випадок матриці з блочними елементами. Доведено збіжність методу. Проведено числові експерименти, які підтверджують достовірність одержаних результатів.

Ключові слова: ітераційний метод, система задач на власні значення.

Вступ. Задача визначення власних значень і векторів матриць є важлива для вирішення широкого кола питань обчислювальної математики. До її розв'язування зводиться багато задач фізики ядра, конденсованих середовищ і елементарних часток, деякі задачі механіки, радіофізики та інші.

У роботі [1] розглядалися нові підходи до розв'язування систем поліноміальних матричних рівнянь. На основі методу матричної лінеаризації [2, 3] розроблено алгоритм, за допомогою якого системи поліноміальних рівнянь вигляду

$$\sum_{r,j_1+j_2+\ldots+j_n=0}^{m} \mathbf{C}_{i,j_1\ j_2\ \ldots\ j_n}^{(q_1,q_2,\ldots,q_r)} \mathbf{X}_1^{j_1}\mathbf{X}_2^{j_2}\ldots\mathbf{X}_n^{j_n}=0 \quad \left(i=\overline{1,n}\right),$$

зводяться до систем матричних рівнянь із відокремленими змінними

$$\left(\mathbf{A}^{(i,1)}\times\mathbf{X}_1+\mathbf{A}^{(i,2)}\times\mathbf{X}_2+\ldots+\mathbf{A}^{(i,n)}\times\mathbf{X}_n+\mathbf{A}^{(i,n+1)}\right)\mathbf{\Psi}\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_n\right)=0 \ \left(i=\overline{1,n}\right),$$

де невідомі $\mathbf{X}_i\in\mathbb{R}^{p\times p}\left(i=\overline{1,n}\right)$ і коефіцієнти $\mathbf{C}_{i,j_1,j_2,\ldots j_n}^{(q_1,q_2,\ldots q_r)}\in\mathbb{R}^{p\times p}\left(j_1,j_2,\ldots,j_n=\overline{0,m}\right)$ задані над множиною матриць, $(q_1, q_2, ..., q_r)$ — розміщення з повторенням із n елементів по r (кожен із елементів послідовності $\left\{q_i\right\}_{i=0}^{r}$, $q_i\in\left\{1,2,\ldots,n\right\}$). До того ж вектор

$$\mathbf{\Psi}\equiv\Big(\mathbf{X}_1^{m-1},\mathbf{X}_1^{m-2}\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_1^{m-2}\mathbf{X}_n,\mathbf{X}_1^{m-3}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_1^{m-3}\mathbf{X}_2^2,\ldots,\mathbf{X}_1^{m-3}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_n,\ldots,\mathbf{X}_1\mathbf{X}_n^{m-2},$$
$$\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1^{m-2},\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1^{m-3}\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1^{m-3}\mathbf{X}_n,\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1^{m-4}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1^{m-4}\mathbf{X}_2^2,\ldots\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1^{m-4}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_n,\ldots,$$
$$\mathbf{X}_2\mathbf{X}_n^{m-2},\ldots,\mathbf{X}_n^{m-1},\mathbf{X}_1^{m-2},\mathbf{X}_1^{m-3}\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_1\mathbf{X}_n^{m-3},\ldots,\mathbf{X}_n^{m-2},\ldots,\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_n,\mathbf{E}\Big)^{\mathrm{T}}$$

має розмірність $\deg\mathbf{\Psi} = pk \times p$, де $k = \sum_{r=0}^{m-1} n^r$, а $\deg \mathbf{A}^{(i,j)} = pk \times pk.$ Також у роботах [1, 4, 5] було запропоновано схему зведення отриманих після застосування методу лінеаризації систем до задач на власні значення, що задані над множиною матриць. Таким чином, виникла необхідність у відшуканні розв’язку нового класу задач — систем задач на власні значення.

1. Постановка задачі

Над деякою множиною матриць розглянемо систему вигляду

$$\mathbf{AX} = \left(\mathbf{E}_n \otimes \mathbf{\Lambda}\right)\mathbf{X}. \tag{1}$$

Тут $\mathbf{A} = \left\{\mathbf{A}_{ij}\right\}_{ij=1}^{n}$ — $n \times n$ матриця з коефіцієнтами $\mathbf{A}_{ij} \in R^{p\times p}\left(i, j = \overline{1,n}\right)$, вектор $\mathbf{X} = \left(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n\right)^{\mathrm{T}}$, причому $\mathbf{X}_i \in R^{p\times p}\left(i = \overline{1,n}\right)$, $\mathbf{E}_n$ — одинична $n \times n$ матриця, а $\mathbf{\Lambda}$ є дійсна $p \times p$ матриця, «$\otimes$» — знак діадного добутку.

Задачу (1) будемо називати системою задач на власні значення або ж задачею на власні значення, що розглядається над множиною матриць.

Нехай

$$\mathrm{Det}\left(\mathbf{M}\right) := \begin{vmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \cdots & \mathbf{M}_{1n} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \cdots & \mathbf{M}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{n1} & \mathbf{M}_{n2} & \cdots & \mathbf{M}_{nn} \end{vmatrix} = \sum \left(-1\right)^{1+j} \mathbf{M}_{1j} \overline{\mathbf{M}_1^j},$$

де $\mathbf{M}_1^j$ — мінори елементів першої стрічки блоків матриці $\mathbf{A}$. Тоді, очевидно, задача (1) є еквівалентна задачі знаходження коренів характеристичного многочлена

$$\mathrm{Det}\left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_n \otimes \mathbf{\Lambda}\right) = 0.$$

У цій роботі буде розглянуто й обґрунтовано ітераційний метод знаходження одного з розв’язків (1).

2. Обчислювальна схема методу

Приймаємо, що систему (1) задано над деякою множиною матриць, а матриця $\mathbf{A}$ — матриця простої структури, тобто вона має n лінійно незалежних власних векторів

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} \\ \mathbf{X}_{12} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{1n} \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{21} \\ \mathbf{X}_{22} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{2n} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{n1} \\ \mathbf{X}_{n2} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Нехай нумерація цих векторів відповідає впорядкуванню відповідних їм власних чисел $\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2, \ldots, \mathbf{\Lambda}_n$ за зростанням норм

$$\left\|\mathbf{\Lambda}_1^{-1}\right\|_2 < \left\|\mathbf{\Lambda}_2^{-1}\right\|_2 \le \ldots \le \left\|\mathbf{\Lambda}_n^{-1}\right\|_2 . \tag{3}$$

Сформулюємо задачу наближеного обчислення власного значення $\mathbf{\Lambda}_1$ (такого, що $\left\|\mathbf{\Lambda}_1^{-1}\right\|_2 = \min\limits_{1 \le i \le n} \left\|\mathbf{\Lambda}_i^{-1}\right\|_2$) та відповідного йому власного вектора $\mathbf{X}_1$ деякої матриці $\mathbf{A}$.

Запишемо розклад довільного ненульового вектора $\mathbf{Y}^{(0)}$ за базисом із власних векторів $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, ..., $\mathbf{X}_n$

$$\mathbf{Y}^{(0)} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 + \ldots + c_n \mathbf{X}_n . \tag{4}$$

Нехай $c_1 \ne 0$ (інакше можемо розглянути інший початковий вектор $\mathbf{Y}^{(0)}$). Помножимо рівність (4) зліва на матрицю $\mathbf{A}$

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{Y}^{(0)} = c_1 \mathbf{A}\mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{A}\mathbf{X}_2 + \ldots + c_n \mathbf{A}\mathbf{X}_n . \tag{5}$$

Оскільки $\left\{\mathbf{\Lambda}_i, \mathbf{X}_i\right\}\left(i = \overline{1,n}\right)$ є власні пари матриці $\mathbf{A}$, то з рівностей (1) і (5) отримаємо

$$\mathbf{Y}^{(1)} = c_1 \left(\mathbf{E}_n \otimes \mathbf{\Lambda}_1\right) \mathbf{X}_1 + c_2 \left(\mathbf{E}_n \otimes \mathbf{\Lambda}_2\right) \mathbf{X}_2 + \ldots + c_n \left(\mathbf{E}_n \otimes \mathbf{\Lambda}_n\right) \mathbf{X}_n .$$

Із врахуванням того, що матриця $\mathbf{A}$ належить множині кумутуючих матриць, на другій ітерації за тим же ж принципом отримаємо

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}^{(2)} &= \mathbf{A}\mathbf{Y}^{(1)} = c_1 \left(\mathbf{E}_n \otimes \mathbf{\Lambda}_1\right) \mathbf{A}\mathbf{X}_1 + c_2 \left(\mathbf{E}_n \otimes \mathbf{\Lambda}_2\right) \mathbf{A}\mathbf{X}_2 + \ldots + c_n \left(\mathbf{E}_n \otimes \mathbf{\Lambda}_n\right) \mathbf{A}\mathbf{X}_n = \\ &= c_1 \left(\mathbf{E}_n \otimes \mathbf{\Lambda}_1^2\right) \mathbf{X}_1 + c_2 \left(\mathbf{E}_n \otimes \mathbf{\Lambda}_2^2\right) \mathbf{X}_2 + \ldots + c_n \left(\mathbf{E}_n \otimes \mathbf{\Lambda}_n^2\right) \mathbf{X}_n .\end{aligned}$$

Тоді k-та ітерація дає вектор

$$\mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{Y}^{(k-1)} = \mathbf{A}^k \mathbf{Y}^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\mathbf{E}_n \otimes \mathbf{\Lambda}_i^k\right) \mathbf{X}_i \tag{6}$$

або, з урахуванням зображення $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, ..., $\mathbf{X}_n$ у вихідному базисі,

$$\mathbf{Y}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1^{(k)} \\ \mathbf{Y}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_n^{(k)} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\mathbf{E}_n \otimes \mathbf{\Lambda}_i^k\right) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{i1} \\ \mathbf{X}_{i2} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \mathbf{\Lambda}_i^k \mathbf{X}_{i1} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \mathbf{\Lambda}_i^k \mathbf{X}_{i2} \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \mathbf{\Lambda}_i^k \mathbf{X}_{in} \end{pmatrix} .$$

Бачимо, що

$$\mathbf{Y}^{(k-1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1^{(k-1)} \\ \mathbf{Y}_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_n^{(k-1)} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\mathbf{E}_n \otimes \mathbf{\Lambda}_i^{k-1}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{i1} \\ \mathbf{X}_{i2} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{\Lambda}_i^{k-1} \mathbf{X}_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{\Lambda}_i^{k-1} \mathbf{X}_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{\Lambda}_i^{k-1} \mathbf{X}_{in} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Нехай матриця $\mathbf{A}$ має n лінійно незалежних векторів $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ (2), таких що нумерація цих векторів відповідає впорядкуванню відповідних їм власних чисел $\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2, ..., \mathbf{\Lambda}_n$ за зростанням норм $\left\|\mathbf{\Lambda}_1^{-1}\right\|_2 < \left\|\mathbf{\Lambda}_2^{-1}\right\|_2 \le \ldots \le \left\|\mathbf{\Lambda}_n^{-1}\right\|_2$, а $\mathbf{Y}^{(0)}$ — довільний ненульовий вектор, такий що $\mathbf{Y}^{(0)} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + ... + c_n\mathbf{X}_n$ і $c_1 \neq 0$. Вектор $\mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{Y}^{(k-1)} = \mathbf{A}^k\mathbf{Y}^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\mathbf{E}_n \otimes \mathbf{\Lambda}_i^k\right)\mathbf{X}_i$.

Тоді добуток матриць $\mathbf{Y}_j^{(k)} \cdot \left(\mathbf{Y}_j^{(k-1)}\right)^{-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathbf{\Lambda}_1 \left(j = \overline{1,n}\right)$.

Доведення.

$$\mathbf{Y}_j^{(k)} \left(\mathbf{Y}_j^{(k-1)}\right)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{\Lambda}_i^k \mathbf{X}_{ij}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{\Lambda}_i^{k-1} \mathbf{X}_{ij}\right)^{-1} = \left(c_1\mathbf{\Lambda}_1^k\mathbf{X}_{1j} + c_2\mathbf{\Lambda}_2^k\mathbf{X}_{2j} + \ldots +\right.$$

$$\left.+ c_n\mathbf{\Lambda}_n^k\mathbf{X}_{nj}\right)\left(c_1\mathbf{\Lambda}_1^{k-1}\mathbf{X}_{1j} + c_2\mathbf{\Lambda}_2^{k-1}\mathbf{X}_{2j} + \ldots + c_n\mathbf{\Lambda}_n^{k-1}\mathbf{X}_{nj}\right)^{-1} = c_1\mathbf{\Lambda}_1^k \left[\mathbf{E} +\right.$$

$$\left.+ \frac{c_2}{c_1}\left(\mathbf{\Lambda}_1^k\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}_2^k\mathbf{X}_{2j}\left(\mathbf{X}_{1j}\right)^{-1} + \ldots + \frac{c_n}{c_1}\left(\mathbf{\Lambda}_1^k\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}_n^k\mathbf{X}_{nj}\left(\mathbf{X}_{1j}\right)^{-1}\right]\mathbf{X}_{1j}\left\{c_1\mathbf{\Lambda}_1^{k-1} \times\right.$$

$$\left.\times\left[\mathbf{E} + \frac{c_2}{c_1}\left(\mathbf{\Lambda}_1^{k-1}\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}_2^{k-1}\mathbf{X}_{2j}\left(\mathbf{X}_{1j}\right)^{-1} + \ldots + \frac{c_n}{c_1}\left(\mathbf{\Lambda}_1^{k-1}\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}_n^{k-1}\mathbf{X}_{nj}\left(\mathbf{X}_{1j}\right)^{-1}\right]\mathbf{X}_{1j}\right\}^{-1} =$$

$$= c_1\mathbf{\Lambda}_1^k\left[\mathbf{E} + \frac{c_2}{c_1}\left(\mathbf{\Lambda}_1^k\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}_2^k\mathbf{X}_{2j}\left(\mathbf{X}_{1j}\right)^{-1} + \ldots +\right.$$

$$\left.+ \frac{c_n}{c_1}\left(\mathbf{\Lambda}_1^k\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}_n^k\mathbf{X}_{nj}\left(\mathbf{X}_{1j}\right)^{-1}\right]\mathbf{X}_{1j}\frac{1}{c_1}\left(\mathbf{X}_{1j}\right)^{-1} = \mathbf{\Lambda}_1^k\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}^{-1}\left(\mathbf{\Lambda}_1^{k-1}\right)^{-1},$$

де $$\boldsymbol{\alpha} = \left[\mathbf{E} + \frac{c_2}{c_1}\left(\mathbf{\Lambda}_1^k\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}_2^k\mathbf{X}_{2j}\left(\mathbf{X}_{1j}\right)^{-1} + \ldots + \frac{c_n}{c_1}\left(\mathbf{\Lambda}_1^k\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}_n^k\mathbf{X}_{nj}\left(\mathbf{X}_{1j}\right)^{-1}\right],$$

$$\boldsymbol{\beta} = \left[\mathbf{E} + \frac{c_2}{c_1}\left(\mathbf{\Lambda}_1^{k-1}\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}_2^{k-1}\mathbf{X}_{2j}\left(\mathbf{X}_{1j}\right)^{-1} + \ldots + \frac{c_n}{c_1}\left(\mathbf{\Lambda}_1^{k-1}\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}_n^{k-1}\mathbf{X}_{nj}\left(\mathbf{X}_{1j}\right)^{-1}\right].$$

Оцінимо тепер норму виразу $\boldsymbol{\alpha}$

$$\left\|\boldsymbol{\alpha}\right\|_2 = \left\|\mathbf{E} + \frac{c_2}{c_1}\left(\mathbf{\Lambda}_1^k\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}_2^k\mathbf{X}_{2j}\left(\mathbf{X}_{1j}\right)^{-1} + \ldots + \frac{c_n}{c_1}\left(\mathbf{\Lambda}_1^k\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}_n^k\mathbf{X}_{nj}\left(\mathbf{X}_{1j}\right)^{-1}\right\|_2. \quad (7)$$

Оскільки $\left\|\mathbf{\Lambda}_1^{-1}\right\|_2 = \min\limits_{1\le i\le n}\left\|\mathbf{\Lambda}_i^{-1}\right\|_2$, то сума

$$\frac{c_2}{c_1}\left(\mathbf{\Lambda}_1^k\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}_2^k\mathbf{X}_{2j}\left(\mathbf{X}_{1j}\right)^{-1}+\ldots+\frac{c_n}{c_1}\left(\mathbf{\Lambda}_1^k\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}_n^k\mathbf{X}_{nj}\left(\mathbf{X}_{1j}\right)^{-1}$$

у формулі (7) прямуватиме до нуля за $k\to\infty$. Таким чином, $\left\|\boldsymbol{\alpha}\right\|_2\to 1$ для $k\to\infty$.

Аналогічно,

$$\left\|\boldsymbol{\beta}\right\|_2=\left\|\mathbf{E}+\frac{c_2}{c_1}\left(\mathbf{\Lambda}_1^{k-1}\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}_2^{k-1}\mathbf{X}_{2j}\left(\mathbf{X}_{1j}\right)^{-1}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{c_n}{c_1}\left(\mathbf{\Lambda}_1^{k-1}\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}_n^{k-1}\mathbf{X}_{nj}\left(\mathbf{X}_{1j}\right)^{-1}\right\|_2\to 1\qquad\text{для}\quad k\to\infty.$$

Отже, для $k\to\infty$ добуток

$$\mathbf{Y}_j^k\cdot\mathbf{Y}_j^{(k-1)}\to\mathbf{\Lambda}_1^k\cdot\left(\mathbf{\Lambda}_1^{k-1}\right)^{-1}=\mathbf{\Lambda}_1\cdot\mathbf{\Lambda}_1^{k-1}\cdot\left(\mathbf{\Lambda}_1^{k-1}\right)^{-1}=\mathbf{\Lambda}_1\ \left(j=\overline{1,n}\right).$$

Нехай матриця $\mathbf{A}$ — матриця простої структури та має n лінійно незалежних власних векторів (2), $\mathbf{\Lambda}_1$ справджує умову (3). Наслідком *теореми 1* є збіжність наступного методу знаходження матриці $\mathbf{\Lambda}_1$

Крок 1.

- Ввести матрицю

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \ldots & \mathbf{A}_{1n}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \ldots & \mathbf{A}_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \ldots & \mathbf{A}_{nn}\end{pmatrix},$$

де $\mathbf{A}_{ij}\left(i,j=\overline{1,n}\right)$ — квадратні матриці розмірності $\deg\mathbf{A}_{ij}=p\times p$;

- задати n-вимірний вектор

$$\mathbf{Y}^{(0)}=\left(\mathbf{Y}_1^{(0)},\mathbf{Y}_2^{(0)},\ldots,\mathbf{Y}_n^{(0)}\right)^{\mathrm{T}},\quad \deg\mathbf{Y}_i^{(0)}=p\times p\ \left(i=\overline{1,n}\right);$$

- обчислити вектор $\mathbf{X}^{(0)}=\dfrac{1}{\left\|\mathbf{Y}^{(0)}\right\|_2}\mathbf{Y}^{(0)}$;
- прийняти $k=1$.

Крок 2. Обчислити

$$\mathbf{Y}^{(k)}=\mathbf{A}\mathbf{X}^{(k-1)}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}\mathbf{X}_1^{(k-1)}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{X}_2^{(k-1)}\ldots+\mathbf{A}_{1n}\mathbf{X}_n^{(k-1)}\\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{X}_1^{(k-1)}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{X}_2^{(k-1)}\ldots+\mathbf{A}_{2n}\mathbf{X}_n^{(k-1)}\\ \vdots\\ \mathbf{A}_{n1}\mathbf{X}_1^{(k-1)}+\mathbf{A}_{n2}\mathbf{X}_2^{(k-1)}\ldots+\mathbf{A}_{nn}\mathbf{X}_n^{(k-1)}\end{pmatrix}.$$

Крок 3.

- Обчислити $\left\| \mathbf{Y}^{(k)} \right\|_2 = \sqrt{\sum_{g=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{p} \left(y_{g,ij}^{(k)} \right)^2}$;
- обчислити $\mathbf{X}^{(k)} = \dfrac{1}{\left\| \mathbf{Y}^{(k)} \right\|_2} \mathbf{Y}^{(k)}$.

Крок 4. Обчислити матриці $\mathbf{\Lambda}_i^{(k)} = \mathbf{Y}_i^{(k)} \left(\mathbf{X}_i^{(k-1)} \right)^{-1}$ для $i = \overline{1, n}$.

Крок 5. Випробувати матрицю $\mathbf{\Lambda}_i^{(k)}$ тестом на збіжність. Якщо виявиться збіг необхідної кількості знаків коефіцієнтів $\mathbf{\Lambda}_i^{(k)}$ та $\mathbf{\Lambda}_i^{(k-1)}$ ($\mathbf{\Lambda}^{(0)}$ задаємо довільно), то роботу алгоритму припинити та за знайдене власне значення $\mathbf{\Lambda}$ прийняти значення

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Lambda}_i^{(k)} ,$$

а за нормований власний вектор $\mathbf{X}$ — вектор $\mathbf{X}^{(k)}$.

Інакше повернутися на *Крок 2*.

Цей метод, фактично, є узагальнення степеневого методу знаходження «старшої» власної пари матриці [6].

3. Обчислювальні експерименти

Приклад 1. Розглянемо матричне рівняння вигляду

$$\mathbf{X}^2 + \mathbf{CX} + \mathbf{D} = 0 . \tag{8}$$

Тут $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, а $\mathbf{X}$ належить множині матриць із $R^{2\times2}$.

До рівняння (8) застосуємо метод матричної лінеаризації [1]. В результаті переходимо до розв'язування відповідного (8) еквівалентного матричного рівняння

$$\left(\mathbf{A} \otimes \mathbf{X} + \mathbf{B} \right) \left(\mathbf{X}, \mathbf{E}_2 \right)^{\mathrm{T}} = 0 , \tag{9}$$

де матриця $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а матриця $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Легко бачити, що узагальнена задача на власні значення (9) еквівалентна задачі вигляду

$$\left(\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{X} \right) \left(\mathbf{X}, \mathbf{E}_2 \right)^{\mathrm{T}} = 0 , \tag{10}$$

де $\tilde{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Оскільки вектор $\left(\mathbf{X},\mathbf{E}_2\right)^{\mathrm{T}}$ не дорівнює нулю тотожно, то рівність (10) буде виконуватися тоді та лише тоді, якщо

$$\mathrm{Det}\left(\tilde{\mathbf{A}}-\mathbf{E}_2\otimes\mathbf{X}\right)=0\,, \tag{11}$$

до того ж

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}4 & 1 & -4 & -2\\ 1 & 4 & -2 & -4\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Застосуємо для знаходження одного з розв'язків задачі (11) описаний вище алгоритм (схему методу було реалізовано за допомогою пакету Matlab 7.4.0).

Отримані для $\mathbf{Y}^{(0)}=\left(\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}}$ результати подамо у таблиці.

Наведені у табл. 1 результати демонструють збіжність ітераційного процесу до розв'язку рівнянь (8), (9), а отже й задач (10), (11), $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}2,5 & 0,5\\ 0,5 & 2,5\end{pmatrix}$ зі зменшенням ε

Таблиця 1

Результати обчислень для прикладу 1

ε	Кількість ітерацій	Розв'язок
0,1	5	$\begin{pmatrix}2,5995 & 0,5606\\ 0,5606 & 2,5995\end{pmatrix}$
0,01	9	$\begin{pmatrix}2,5152 & 0,5129\\ 0,5129 & 2,5152\end{pmatrix}$
0,001	14	$\begin{pmatrix}2,5018 & 0,5018\\ 0,5018 & 2,5018\end{pmatrix}$
0,0001	20	$\begin{pmatrix}2,5002 & 0,5002\\ 0,5002 & 2,5002\end{pmatrix}$

Приклад 2. Застосовуючи метод матричної лінеаризації [1] до рівняння

$$\mathbf{X}^2+\begin{pmatrix}-5 & -1 & -1\\ -1 & -4 & -1\\ -1 & -1 & -3\end{pmatrix}\mathbf{X}+\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=0\,, \tag{12}$$

де **X** належить множині матриць із $R^{3\times3}$, отримаємо еквівалентне (12) матричне рівняння

$$\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{X}+\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{X},\mathbf{E}_3\right)^{\mathrm{T}}=0 \tag{13}$$

з $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0\\0&0&1&-1&-1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ та $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-5&-1&-1&4&1&1\\0&-4&-1&1&3&1\\0&0&-3&1&1&2\\-1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\end{pmatrix}$.

Узагальнена задача на власні значення (13) еквівалентна такій задачі

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}-\mathbf{E}_3\otimes\mathbf{X}\right)\left(\mathbf{X},\mathbf{E}_3\right)^{\mathrm{T}}=0\,. \tag{14}$$

Тут

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}5&1&1&-4&-1&-1\\1&4&1&-1&-3&-1\\1&1&3&-1&-1&-2\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Вектор $\left(\mathbf{X},\mathbf{E}_3\right)^{\mathrm{T}}$ не дорівнює нулю тотожно, а отже рівність (14) буде виконуватися тоді та тільки тоді, якщо

$$\operatorname{Det}\left(\tilde{\mathbf{A}}-\mathbf{E}_3\otimes\mathbf{X}\right)=0\,. \tag{15}$$

Розв'язок задачі (15) будемо шукати за допомогою описаного вище степеневого методу.

За початкового наближення

$$\mathbf{Y}^{(0)}=\left(\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}}$$

отримаємо такі результати:

Таблиця 2

Результати обчислень для прикладу 2

ε	Кількість ітерацій	Розв'язок
0,1	4	$\begin{pmatrix} 4,0290 & 0,9929 & 0,9667 \\ 0,9929 & 3,0622 & 0,9406 \\ 0,9967 & 0,9406 & 2,1478 \end{pmatrix}$
0,01	9	$\begin{pmatrix} 4,0012 & 1,0021 & 0,9667 \\ 0,9929 & 3,0061 & 0,9881 \\ 0,9951 & 0,9881 & 2,0250 \end{pmatrix}$
0,004	12	$\begin{pmatrix} 4,0002 & 1,0012 & 0,9980 \\ 1,0007 & 3,0022 & 0,9946 \\ 0,9967 & 0,9954 & 2,0098 \end{pmatrix}$
0,001	37	—

Одним із розв'язків рівняння (12) є матриця

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Як видно з табл. 2, зі зменшенням ε числовий розв'язок теж прямуватиме до матриці $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$. Однак для ε = 0,001 розв'язок не знайдено. Спробуємо проаналізувати цю ситуацію.

У третьому та четвертому кроках на кожній ітерації алгоритму збільшується степінь блоків вектора **X**. Норма $\left\| \left(\tilde{\Lambda} \right)^{-1} \right\|_2 \approx 0,7548$. А отже, зі зростанням кількості ітерацій шукати обернену матрицю для частини коефіцієнтів вектора **X** стає все складніше. Очевидно, що за певного k деякі коефіцієнти матриці **X** будуть виродженими матрицями, а отже матриці, обернені до них, не існують. Це ще раз підтверджує справедливість викладених у пункті 2 міркувань.

Висновки. У наведеній статті розглянуто новий клас задач — розв'язування систем задач на власні значення. Запропоновано обчислювальний метод знаходження одного з розв'язків. Ця схема є узагальнення класичного степеневого методу відшукання «старшої» пари матриці, але вже на випадок матриці з блочними елементами. Доведено збіжність методу, розглянуто приклади його застосування.

Література

[1] *Недашковська, А. М.* Методи лінеаризації для нелінійних матричних рівнянь: автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.01.07 / Львівський національний університет імені Івана Франка. — Львів, 2007. — 16 с.

[2] *Семерджиев, Х. И.* Разделение неизвестных в системе полиномиально-нелинейных алгебраических уравнений методом матричной линеаризации / *Х. И. Семерджиев, Р. М. Ямалеев* // СЕРДИКА, Българско математическо списание. — 1987. — Т. 13. — С. 272-280.

[3] *Ямалеев, Р. М.* Решение системы полиномиально-нелинейных алгебраических уравнений // Сообщения объединенного института ядерных исследований Дубна. — 1985. — Р11-85 — С. 1-14.

[4] *Недашковська, А. М.* Аналіз стійкості алгоритму матричної лінеаризації для систем поліноміально-нелінійних матричних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2007. — № 12. — С. 36-51.

[5] *Недашковская, А. Н.* Решение полиномиально-нелинейных матричных уравнений методом линеаризации // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 3. — С. 60-69.

[6] *Фаддеев, Д. К.* Вычислительные методы линейной алгебры / *Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева.* — Москва: Физматгиз, 1963. — 734 с.

Power method solving systems of eigenvalues

Anastasiya Nedashkoska

The necessity of solving eigenvalue problems defined on a set of commutated and noncommutated matrices, that arose in the course of development of linearization methods for solving polynomial nonlinear matrix equations is noticed. The paper represents new class of solving eigenvalue problems, defined on a set of matrices, states the problem, introduces the system of eigenvalue problems. An iteration method to find one of solutions of the system is proposed and proved. This scheme is the generalization of the classic power method for finding the highest pair of matrix in case of matrix with block cells. Convergence of the method is proved. Experimental results are presented. The results justify the truth of theoretical computations.

Степенной метод решения систем на собственные значения

Анастасия Недашковская

В ходе разработки вычислительных методов матричной линеаризации решения систем полиномиально-нелинейных матричных уравнений возникла необходимость нахождения собственных значений, заданных над множеством некоммутирующих и перестановочных матриц. В работе рассмотрен этот новый класс задач на собственные значения, сформулирована постановка задачи, введено определение системы задач на собственные значения. Предложен и обоснован итерационный метод нахождения одного из решений системы задач на собственные значения. Метод является обобщением классического степенного метода отыскания «старшей» пары матрицы на случай матрицы с блочными элементами. Доказана сходимость метода. Проведены численные эксперименты, подтверждающие достоверность полученных результатов.

Представлено професором Я. Савулою

Отримано 03.05.09