УДК 624.075:539.3

Вільні коливання стрижневих систем із дискретно-неперервним розподілом параметрів

Роман Тацій[1], Тарас Ушак[2]

[1] д. ф.-м. н., професор, «Політехніка Любельська», Люблін, Польща
[2] конструкторське бюро ТзОВ «Ю. Ді. Сі. Холдинг», вул. Героїв УПА, 72, Львів, e-mail: tushak@vashdim.com.ua

Запропоновано новий наближений метод розрахунку частот вільних коливань стрижневих систем із рухомими вузлами та дискретно-неперервним розподілом параметрів. В основу методу покладено апроксимацію коефіцієнтів відповідних диференціальних рівнянь узагальненими функціями. Розроблено алгоритм розв'язку таких систем на базі методу граничних елементів. Застосовано теорію узагальнених квазідиференціальних рівнянь для розрахунку стрижневих систем. Виконано числову реалізацію алгоритму на мові програмування Pascal.

Ключові слова: метод дискретизації, узагальнене квазідиференціальне рівняння 4-го порядку, вільні коливання, стрижнева система з дискретно-неперервним розподілом параметрів.

Вступ. У реальних інженерних розрахунках для визначення частот вільних коливань конструкцій використовують різні математичні моделі. Їхня складність залежить від співвідношення динамічних характеристик конструкції, динамічної дії та характеру шуканих результатів. Для загального підходу до формування матриці жорсткості, наприклад, у методі скінченних елементів (МСЕ) [5, 6], задається форма деформування скінченного елемента. Для цієї цілі часто використовують варіаційний підхід. Однак, розрахункові схеми, які ґрунтуються на варіаційних методах, не застосовні до стрижневих систем, що описуються диференціальними рівняннями з узагальненими функціями в коефіцієнтах (системи з дискретно-неперервним розподілом параметрів). У статті для дослідження вільних коливань стрижневих систем застосовано теорію узагальнених квазідиференціальних рівнянь (КДР) із мірами [7]. Такий підхід природним чином вписується в алгоритм, запропонований у роботі [1]. Ефективність такого підходу проілюстровано в роботах [2, 3, 8, 9] під час дослідження динамічної стійкості стрижнів із дискретно-неперервним розподілом параметрів за дії неконсервативних сил.

У цій роботі застосовано метод апроксимації коефіцієнтів КДР узагальненими функціями (метод дискретизації) [4, 12] для розв'язування задачі про вільні коливання рамної системи змінного перерізу з урахуванням дискретних параметрів.

1. Постановка задачі про знаходження частот вільних поперечних коливань стрижневої системи змінної жорсткості з дискретно розподіленими масами

Розглянемо власні коливання рами, зображеної на рис. 1*а*. Дослідження вільних коливань такої рами з стрижнями сталої жорсткості виконані в роботі [1].

Вузли рами під час вільних коливань мають лінійні та кутові переміщення, тобто конструкція належить до класу вільних систем, динамічний розрахунок яких складний. Під час її руху виникають сили інерції лінійно-рухомих стрижнів 0–1 та 1–2 як приєднаних мас. Ці сили інерції можна врахувати в коефіцієнтах узагальнених КДР, що описують коливання стрижнів 1–3 та 2–4.

Приймаємо, що елементами рами є стрижні складеного та змінного по висоті перерізу довжиною l. Кожний стрижень складається з чотирьох прямолінійних віток (рис. 1*б*), відстань між вітками $h(x)$ дорівнює $h = h_2\, x/b$. Для кожної половини стрижня момент інерції змінюється за квадратичним законом [15]

$$I = I_2\left(\frac{x}{b}\right)^2, \tag{1}$$

координата x відраховується від точки, яка знаходиться від середини стрижня на відстані b, а момент інерції складеного перерізу, коли відстань між вітками становить h_2, дорівнює $I_2 = 4F\left(h_2/2\right)^2$. Також на стрижнях рами розташовані зосереджені інерційні маси.

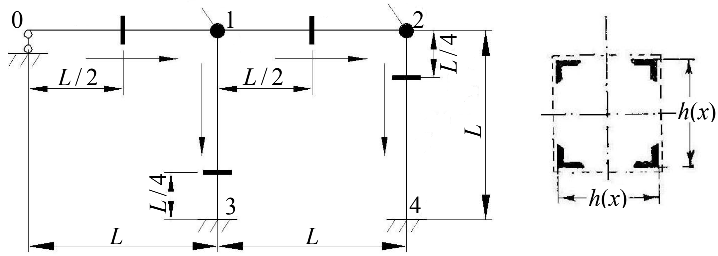
2. Апроксимація коефіцієнтів та елементи лінійної теорії узагальнених квазідиференціальних рівнянь 4-го порядку

Для окремого стрижня рівняння поперечних вільних коливань має вигляд [13]

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \omega^2\left[m^* y - \frac{d}{dx}\left(\mu^*\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0\,, \tag{2}$$

де $m^* = m(x) + \sum M_i\delta\left(x - x_i\right)$; $\mu^* = \mu(x) + \sum I_i\delta\left(x - x_i\right)$ — погонні маса та момент інерції, причому $m(x)$ і $\mu(x)$ — звичайні функції, а M_i, I_i — маса та момент інерції вантажів, зосереджених у перерізах $x = x_i$; $\delta\left(x - x_i\right)$ — дельта-функція Дірака з носієм у точці $x = x_i$.

Для розв'язування рівняння (2) використаємо методи теорії квазідиференціальних рівнянь [7]. Позначимо через



а *б*

Рис. 1

$$y^{[0]}(x) \overset{\text{def}}{\equiv} y(x), \quad y^{[1]}(x) = y'(x), \quad y^{[2]}(x) = EI(x)y''(x),$$
$$y^{[3]}(x) = \omega^2\mu^* y'(x) + \left(EI(x)y''(x)\right)' \tag{3}$$

квазіпохідні, які є відповідно прогином, кутом повороту, моментом і перерізуючою силою в перерізі x.

Введемо також позначення $a_0 = EI(x)$, $a_1 = \omega^2 \left\{ \sum_{j=1}^{t} I_j \delta\left(x - x_j\right) + \mu(x) \right\}$, $a_2 = \omega^2 \left\{ m(x) + \sum_{i=1}^{s} \delta\left(x - x_i\right) M_i \right\}$, де $a_0^{-1}(x)$ — локально обмежена та вимірна на I функція; I — відкритий інтервал дійсної осі; $a_1(x) = b_1'(x), a_2(x) = b_2'(x); b_0(x), b_1(x)$; $b_2(x)$ — функції локально обмеженої на I варіації (клас $BV_{loc}^{+}(I)$ [7]); $b_1'(x), b_2'(x)$ — узагальнені похідні (міри на I) [7].

Вихідне КДР (2) зведемо до системи рівнянь першого порядку

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{C}'(x)\mathbf{Y}(x), \tag{4}$$

де

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1}(x) & 0 \\ 0 & -a_1(x) & 0 & 1 \\ a_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Система (4) коректна [7], оскільки виконується необхідна та достатня умова коректності

$$\left(\Delta\mathbf{C}(x)\right)^2 = 0, \ \forall x \in I, \tag{6}$$

де

$$\Delta\mathbf{C}\left(x\right) = \mathbf{C}\left(x\right) - \mathbf{C}\left(x - 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta b_1(x) & 0 & 0 \\ \Delta b_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

— матриця стрибків цієї системи.

Нехай $\mathbf{B}(x, s)$ — фундаментальна матриця системи (4), структуру якої добре вивчено в [7, 11], із такими властивостями:

1. $\mathbf{B}\left(s, s\right) = \mathbf{E}$, де $\mathbf{E}$ — одинична матриця;
2. $\mathbf{B}\left(x, s\right) = \left(\mathbf{E} + \Delta\mathbf{C}\left(x\right)\right) \cdot \mathbf{B}\left(x - 0, s\right)$;
3. $\forall x_1, x_2, x_3 \in I \ \ \mathbf{B}\left(x_3, x_2\right) \cdot \mathbf{B}\left(x_2, x_1\right) = \mathbf{B}\left(x_3, x_1\right)$. (8)

За допомогою цієї матриці для довільного початкового вектора $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(x_0)$, $x_0 \in I$, розв'язок системи (8) записуємо у вигляді

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{B}(x, x_0)\mathbf{Y}_0 . \tag{9}$$

Апроксимуємо змінні коефіцієнти рівняння (2) так. Розіб'ємо стрижень довжиною l на n рівних ділянок. Нехай початкова точка $x_0 = 0$, кінцева $x_n = l$, крок розбиття $h = x_{k+1} - x_k$, де $k = \overline{0,n}$.

Апроксимуємо коефіцієнт $a_0(x)$ таким чином (l-апроксимація [10]). На кожному з проміжків $[x_k; x_{k+1})$ величина $a_0(x)$ є стала:

$$a_0(x) \approx \frac{b_0(x_{k+1}) - b_0(x_k)}{h} = a_k, \quad x \in [x_k, x_{k+1}), \qquad b_0(x) = \int_0^x a_0(t)dt. \tag{10}$$

Апроксимуємо відповідним чином [14] коефіцієнти $a_2(x) = b_2'(x)$ та $a_1(x) = = b_1'(x)$ (d-апроксимація) на проміжку $[x_k ; x_{k+1})$

$$\begin{aligned} a_1(x) &\approx \Delta b_1(x_k)\delta(x - x_k) \overset{\text{def}}{=} c_k\delta(x - x_k), \\ a_2(x) &\approx \Delta b_2(x_k)\delta(x - x_k) \overset{\text{def}}{=} d_k\delta(x - x_k). \end{aligned} \tag{11}$$

Після апроксимації КДР (2) буде мати вигляд

$$\begin{gathered} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \theta_k y_n''\right)'' - \left\{\sum_{k=0}^{n-1} d_k \delta(x - x_k) + \sum_{i=1}^{s} M_i \delta(x - x_i)\right\} y_n + \\ + \left[\left\{\sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta(x - x_k) + \sum_{j=1}^{t} I_j \delta(x - x_j)\right\} y_n'\right]' = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

що є частковим (конкретизованим) випадком КДР (2), де θ_k — характеристична функція проміжку $[x_k ; x_{k+1})$: $\theta_k = \begin{cases} 1, & x \in [x_k, x_{k+1}[, \\ 0, & x \notin [x_k, x_{k+1}[. \end{cases}$

Відомо [10] що, для $n \to \infty$ усі розв'язки рівняння (12) разом зі своїми квазіпохідними $y^{[1]}$, $y^{[2]}$ і $y^{[3]}$ рівномірно прямують до відповідних розв'язків і квазіпохідних рівняння (2)

$$\lim_{n\to\infty} \left| y_n^{[i]}(x) - y(x)^{[i]} \right| = 0, \quad i = \overline{0,3}.$$

Тоді матриця стрибків (7) для $x = x_k$ є така

$$\Delta\mathbf{C}\left(x_k\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_k & 0 & 0 \\ d_k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

За такого визначення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2 фундаментальна матриця $\mathbf{B}(x_{k+1}, x_k)$ квазідиференціального рівняння $\left(a_0 y''\right)''=0$ на проміжку $\left[x_k ; x_{k+1}\right)$ має вигляд [11]

$$\mathbf{B}\left(x_{k+1}, x_k\right)=\begin{pmatrix} 1 & h & \dfrac{h^2}{2!a_k} & \dfrac{h^3}{3!a_k} \\ 0 & 1 & \dfrac{h}{a_k} & \dfrac{h^2}{2!a_k} \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Фундаментальну матрицю диференціальної системи (4), враховуючи властивості (8), можна знайти за формулою [11]

$$\mathbf{B}\left(x_n, x_0\right)=\mathbf{B}(l,0)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathbf{E}+\Delta\mathbf{C}\left(x_k\right)\right)\mathbf{B}\left(x_{k+1}, x_k\right). \tag{15}$$

Матрицю $\mathbf{B}(l, 0)$ можна побудувати й іншим шляхом [10].

3. Алгоритм методу граничних елементів у задачах про вільні коливання стрижневої системи з дискретно-неперервним розподілом параметрів

Для поширення результатів розрахунку стрижнів із дискретно-неперервним розподілом параметрів за допомогою методу дискретизації на стрижневі системи використаємо алгоритм методу граничних елементів (МГЕ), розроблений авторами [1].

Якщо декілька стрижнів з'єднані в єдину конструкцію, то для системи стрижнів можна скласти таке матричне рівняння

$$\mathbf{Y}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{Y}_0. \tag{16}$$

Матриця **A** зводиться до квазідіагонального вигляду, де діагональні блоки — фундаментальні матриці квазідиференціального рівняння (2), які описують стан стрижнів. Вектори **Y** та $\mathbf{Y}_0$ будуть містити параметри напружено-деформованого стану всіх стрижнів у поточній і початковій точках.

Така схема формування матричного рівняння потребує дискретизації стрижневої системи в вузлах, оскільки вузли є точками розриву кінематичних і статичних параметрів стрижнів, а рівняння (16) справедливе в точках неперервності параметрів напружено-деформованого стану.

Будь-яку стрижневу систему можна описати рівнянням (16), яке є математичною моделлю деформівної лінійної системи [1].

Для розв'язування задачі знаходження частот вільних коливань стрижневої системи згідно алгоритму МГЕ [1] сформуємо одне рівняння на взірець (16) для граничного значення змінної $x = l$ кожного стрижня. У цьому випадку можна виконати перетворення матриць рівняння (16) за схемою

$$\mathbf{Y}(l) = \mathbf{A}(l,0)\mathbf{Y}_0(0) \to \mathbf{A}(l,0)\mathbf{Y}_0(0) - \mathbf{Y}(l) = 0 \to \mathbf{A}^*(l,0)\mathbf{Y}^*(l,0) = 0\,, \qquad (17)$$

де вектори $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}_0$ містять параметри стрижнів у граничних точках $x = l$, $x = 0$. Матриця $\mathbf{A}$ містить діагональні блоки $\mathbf{B}_i(l, 0)$ і має квазідіагональну структуру. $\mathbf{B}_i(l, 0)$ — фундаментальні матриці КДР (2) на проміжку $[0, l_i]$ для кожного стрижня стрижневої системи відповідно. Суть схеми перетворення матриць полягає в перенесенні кінцевих параметрів вектора $\mathbf{Y}(l)$ на місце нульових параметрів вектора $\mathbf{Y}_0(0)$. При цьому, вектор $\mathbf{Y}(l)$ стає нульовим і виключається з розгляду. Матрицю $\mathbf{A}^*(l, 0)$ занулюємо в окремих стовпчиках і в неї вводимо елементи, компенсуючи перенесення параметрів. Вектор $\mathbf{Y}^*(l, 0)$ містить вже початкові та кінцеві граничні параметри всіх стрижнів системи, як це є в МГЕ [1]. Таким чином, розв'язок задачі про вільні коливання стрижневих систем із дискретно-неперервним розподілом параметрів за допомогою методу дискретизації зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих початкових і кінцевих параметрів стрижнів.

4. Приклад реалізації методу дискретизації для розв'язування задач про вільні коливання стрижневих систем із нерухомими вузлами

Здійснимо розрахунок частот вільних коливань рами, зображеної на рис. 1*а*. Знайдемо п'ять перших частот рами, стрижні якої мають змінну жорсткість (рис. 1*б*). Вихідні дані задачі: вітки стрижнів приймаємо з кутника L75х6 з площею перерізу $F = 8{,}78$ см^2; густина сталі $\rho = 7850$ кг / м^3; $l = 10$ м; $h_1 = 2{,}0$ м; $h_2 = 1$ м; $b = 10$ м. На кожному стрижні рами розміщені квадратні плити розміру $h_1 \times h_1$ (див. рис. 1); маси $M_i^{s-j} = M = 500\,\text{кг}$ та моменту інерції відносно осі x $I_i^{s-j} = I = mh_1^2 / 6$.

Матричне рівняння (16) системи в нашому випадку буде мати вигляд

$$\mathbf{Y}(l) = \mathbf{A}(l,0)\mathbf{Y}_0(0)\,,$$

де $\mathbf{A}(l,0) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{0-1} & & & \\ & \mathbf{B}^{1-2} & & \\ & & \mathbf{B}^{2-4} & \\ & & & \mathbf{B}^{1-3} \end{pmatrix}$ — квазідіагональна матриця.

Діагональні блоки $\mathbf{B}^{i-j}(l, 0)$ — фундаментальні матриці квазідиференціальних рівнянь (2), які описують стан стрижнів, а вектори $\mathbf{Y}(l)$, $\mathbf{Y}_0(0)$ містять параметри деформованого стану всіх стрижнів у кінцевій і початковій точках. Здійснимо перетворення матричного рівняння за схемою (17).

Записуємо алгоритм розв’язування задачі.

Формуємо матрицю $\mathbf{A}^*$. Матриці $\mathbf{Y}^*(l, 0)$, $\mathbf{Y}(l)$ з урахуванням рівнянь рівноваги, сумісності переміщень вузлів 1 і 2, за нульових граничних умов будуть мати вигляд

	$\mathbf{Y}^*(l, 0) =$		$;\mathbf{Y}(l) =$
1	$EI(x)V^{0-1}(0) = 0,\ M^{2-4}(l)$	1	$EI(x)V^{0-1}(0) = 0$
2	$EI(x)\varphi^{0-1}(0)$	2	$EI(x)\varphi^{0-1}(0) = EI(x)\varphi^{1-3}(0)$
3	$M^{0-1}(0) = 0,\ Q^{2-4}(l)$	3	$M^{0-1}(l) = M^{1-2}(0) + M^{1-3}(0)$
4	$Q^{0-1}(0)$	4	$Q^{0-1}(l) = Q^{1-2}(0) + N^{1-3}(0)$
5	$N^{0-1}(0) = 0,\ N^{2-4}(l)$	5	$N^{0-1}(l) = N^{1-2}(0) - Q^{1-3}(0)$
6	$EI(x)V^{1-2}(0) = 0,\ M^{1-3}(l)$	6	$EI(x)V^{1-2}(l) = 0$
7	$EI(x)\varphi^{1-2}(0) = EI(x)\varphi^{1-3}(0),\ Q^{1-3}(l)$	7	$EI(x)\varphi^{1-2}(l) = EI(x)\varphi^{2-4}(0)$
8	$M^{1-2}(0)$	8	$M^{1-2}(l) = M^{2-4}(0)$
9	$Q^{1-2}(0)$	9	$Q^{1-2}(l) = N^{2-4}(0)$
10	$N^{1-2}(0)$	10	$N^{1-2}(l) = -Q^{2-4}(0)$
11	$EI(x)V^{2-4}(0) = EI(x)V^{1-3}(0),\ N^{1-3}(l)$	11	$EI(x)V^{2-4}(l) = 0$
12	$EI(x)\varphi^{2-4}(0)$	12	$EI(x)\varphi^{2-4}(l) = 0$
13	$M^{2-4}(0)$	13	$M^{2-4}(l)$
14	$Q^{2-4}(0)$	14	$Q^{2-4}(l)$
15	$N^{2-4}(0)$	15	$N^{2-4}(l)$
16	$EI(x)V^{1-3}(0)$	16	$EI(x)V^{1-3}(l) = 0$
17	$EI(x)\varphi^{1-3}(0)$	17	$EI(x)\varphi^{1-3}(l) = 0$
18	$M^{1-3}(0)$	18	$M^{1-3}(l)$
19	$Q^{1-3}(0)$	19	$Q^{1-3}(l)$
20	$N^{1-3}(0)$	20	$N^{1-3}(l)$

Враховуючи вигляд першої, третьої, п’ятої, шостої, сьомої та одинадцятої компонент вектора $\mathbf{Y}^*(l, 0)$, в матриці $\mathbf{A}^*(0, l)$ потрібно занулити 1, 3, 5, 6, 7 і 11 стовпчики. Занулюємо стовпчики та накладаємо компенсуючі елементи [1]. Використаємо фундаментальні матриці КДР (2) з додаванням динамічних нормальних сил. У цьому прикладі не враховуємо повздовжніх переміщень стрижнів і приймаємо, що $\mathbf{EA} \to \infty$.

Для обчислення визначника матриці $\mathbf{A}^*$ використаємо метод виключення Гауса. Задаючи значення ω^2 з визначеним кроком, будуємо графік залежності визначника $\left|\mathbf{A}^*\left(\omega^2\right)\right|$.

$$
\mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{c|ccccc|ccccc|ccccc|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\
\hline
1 & & B_{12}^{0-1} & & B_{14}^{0-1} & & & & & & & & & & & & & & & & \\
2 & & B_{22}^{0-1} & & B_{24}^{0-1} & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
3 & & B_{32}^{0-1} & & B_{34}^{0-1} & & & & -1 & & & & & & & & & & -1 & & \\
4 & -1 & B_{42}^{0-1} & & B_{44}^{0-1} & & & & & -1 & & & & & & & & & & & -1 \\
5 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & & & & 1 & \\
\hline
6 & & & & & & & & B_{13}^{1-2} & B_{14}^{1-2} & & & & & & & & B_{12}^{1-2} & & & \\
7 & & & & & & & & B_{23}^{1-2} & B_{24}^{1-2} & & & -1 & & & & & B_{22}^{1-2} & & & \\
8 & & & -1 & & & & & B_{33}^{1-2} & B_{34}^{1-2} & & & & -1 & & & & B_{32}^{1-2} & & & \\
9 & & & & & & & & B_{43}^{1-2} & B_{44}^{1-2} & & & & & & -1 & & B_{42}^{1-2} & & & \\
10 & & & & & & & & & & 1 & & & & 1 & & & & & & \\
\hline
11 & & & & & & & & & & & & B_{12}^{2-4} & B_{13}^{2-4} & B_{14}^{2-4} & & B_{11}^{2-4} & & & & \\
12 & & & & & & & & & & & & B_{22}^{2-4} & B_{23}^{2-4} & B_{24}^{2-4} & & B_{21}^{2-4} & & & & \\
13 & -1 & & & & & & & & & & & B_{32}^{2-4} & B_{33}^{2-4} & B_{34}^{2-4} & & B_{31}^{2-4} & & & & \\
14 & & & -1 & & & & & & & & & B_{42}^{2-4} & B_{43}^{2-4} & B_{44}^{2-4} & & B_{41}^{2-4} & & & & \\
15 & & & & & -1 & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
\hline
16 & & & & & & & & & & & & & & & & B_{11}^{1-3} & B_{12}^{1-3} & B_{13}^{1-3} & B_{14}^{1-3} & \\
17 & & & & & & & & & & & & & & & & B_{21}^{1-3} & B_{22}^{1-3} & B_{23}^{1-3} & B_{24}^{1-3} & \\
18 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & B_{31}^{1-3} & B_{32}^{1-3} & B_{33}^{1-3} & B_{34}^{1-3} & \\
19 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & B_{41}^{1-3} & B_{42}^{1-3} & B_{43}^{1-3} & B_{44}^{1-3} & \\
20 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
$$

У таблиці в колонці 3 подані перші п'ять частот коливань для стрижневої системи сталої жорсткості, обчислених МГЕ і методом дискретизації при одиничних значеннях параметрів стрижневої системи. У колонці 4 подані частоти для стрижневої системи сталої жорсткості (рис. 1*б*) для $h = h_2 = const.$ У колонці 5 обчислені перші п'ять частот коливань стрижневої системи (див. рис. 1) змінної жорсткості з розміщеними на ній інерційними масами (системи з дискретно-неперервним розподілом параметрів) методом дискретизації.

Таблиця

Метод	ω_i	$E = 1$, $m = 1$, $I = 1$	$E = 2{,}1 \cdot 10^{10}$ кг/м^2, $m = 27{,}56$ кг/м, $I = I_2 = F\,h_2^2$	$E = 2{,}1 \cdot 10^{10}$ кг/м^2, $m = 27{,}56$ кг/м, $I = I_2 (x/b)^2$
Метод граничних елементів [1]	ω_1	2,946045	24,096651	–
	ω_2	9,431095	77,139963	–
	ω_3	13,959385	114,178305	–
	ω_4	15,259475	124,812160	–
	ω_5	19,489495	159,410855	–
Авторський метод	ω_1	2,576285	21,078852	15,347834
	ω_2	11,514513	94,182153	36,127413
	ω_3	15,524497	126,990157	45,125913
	ω_4	21,095023	172,793981	67,693220
	ω_5	22,371857	182,998279	107,735403

Висновки. Запропоновано метод обчислення частот вільних коливань стрижневих систем із рухомими вузлами та дискретно-неперервним розподілом параметрів, в основу якого закладено апроксимацію коефіцієнтів відповідних диференціальних рівнянь узагальненими функціями. Алгоритм методу розроблено на базі МГЕ. Він характеризується простотою, універсальністю та швидкістю збіжності, а також дозволяє знаходити та зображати графічно форми коливань стрижневої системи. Отримані при цьому числові результати для відповідних значень параметрів співпадають із відомими.

Література

[1] Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов / *В. А. Баженов, А. Ф. Дащенко, Л. В. Коломиец, В. Ф. Оробей.* — Одеса: «Астропринт», 2001. — 240 с.

[2] *Давидчак, О. Р.* Розв'язок задач динаміки дискретно-неперервних стрижневих систем методом граничних елементів з апроксимацією коефіцієнтів диференціальних рівнянь / *О. Р. Давидчак, Р. М. Тацій, Т. І. Ушак* // Вісник НУ «Львівська політехніка». Теорія та практика будівництва. — 2004. — № 495. — С. 62-64.

[3] *Давидчак, О. Р.* Розв'язок задач динаміки і стійкості стержневих систем з дискретно-неперервним розподілом параметрів / *О. Р. Давидчак, Р. М. Тацій* // ZESZYTY NAUKOWE Politechniki Rzeshowskiej. Budownictwo i inzynieria srodowiska. — Rzezow, 2004. — Z. 37. — C. 57-60.

[4] *Тацій, Р.* Метод дискретизації в задачах про втрату стійкості однопрольотних стрижнів зі змінними параметрами / *Р. Тацій, Т. Ушак* // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. — 2009. — Вип. 9. — С. 107-117.

[5] *Масленников, А. М.* Расчет строительных конструкций численными методами / *А. М. Масленников.* — Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. — 225 с.

[6] Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений; под ред. *А. Ф. Смирнова*. — Москва: Стройиздат, 1984. — 415 с.
[7] *Тацій, Р. М.* Узагальнені квазідиференціальні рівняння / *Р. М. Тацій.* — Науково-учбовий Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача АН України, Львів, 1994. — 54 с.
[8] *Тацій, Р. М.* Розрахунок дискретно-неперервних стрижневих систем / *Р. М. Тацій, О. Р. Давидчак* // Вісник НУ «Львівська політехніка». Теорія та практика будівництва. — 2002. — № 462. — С. 145-149.
[9] *Тацій, Р. М.* До дослідження стійкості стрижнів під дією неконсервативних сил / *Р. М. Тацій, О. Р. Давидчак* // Вісник НУ «Львівська політехніка». Теорія та практика будівництва. — 2000. — № 409. — С. 164-167.
[10] *Тацій, Р. М.* Про апроксимацію розв'язків диференціальних рівнянь з мірами / *Р. М. Тацій, В. В. Іщук, В. В. Кісілевич* // Вісн. Київ. ун-ту. Математика і механіка. — Київ: Либідь, 1990. — № 32. — С. 128-131.
[11] *Тацій, Р. М.* Про структуру фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння / *Р. М. Тацій, Б. Б. Пахолок* // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1989. — № 4. — С. 27-30.
[12] *Тацій, Р. М.* Метод дискретизації в задачах стійкості стрижневих систем змінної жорсткості / *Р. М. Тацій, Т. І. Ушак* // Вісник НУ «Львівська політехніка». Фізико-математичні науки. — 2009. — № 643. — С. 57-63.
[13] *Образцов, И. Ф.* Строительная механика скошенных систем / *И. Ф. Образцов, Г. Г. Онанов*. — Москва: Машиностроения, 1973. — 654 с.
[14] *Аткинсон, Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи; пер. с англ. / *Ф. Аткинсон.* — Москва, 1968. — 749 с.
[15] *Вольмир, А. С.* Устойчивость деформируемых систем; из-д. 2-е / *А. С. Вольмир.* — Москва, Наука, 1967. — 984 с.

Bar system free vibration with discretely-persistent parameters distribution

Roman Tatsii, Taras Ushak

A new approximate method of calculation of the calculation of the of the frequency of bar systems free vibration with mobile units and discretely — persistent characteristics distribution is proposed. The method is based on the approximation of coefficients of the corresponding differential equations with generalized functions. The algorithm of such a system solution is developed on the base of boundary elements. The theory of generalized quasi — differential equations for the calculation of bar systems is used. Numeric realization of the algorithm is carried out with the programming language Pascal.

Свободные колебания стержневых систем с дискретно-непрерывным распределением параметров

Роман Таций, Тарас Ушак

Предложен новый приближенный метод расчета частот свободных колебаний стержневых систем с подвижными узлами и дискретно-непрерывным распределением параметров. В основе метода лежит аппроксимация коэффициентов соответствующих дифференциальных уравнений обобщенными функциями. Разработан алгоритм решения таких систем на базе метода граничных элементов. Для расчета стержневых систем используется теория обобщенных квазидифференциальных уравнений. Выполнена численная реализация алгоритма на языке программирования Pascal.

Представлено професором М. Сухорольським Отримано 15.02.10