

Моделирование нестационарных течений взвеси мелких твердых частиц в вязкой несжимаемой жидкости

Владимир Фенченко

К. ф.-м. н. с. н. с., Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАНУ, пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, e-mail: fenchenko@ukr.net

Предложен метод численного решения системы уравнений Навье-Стокса-Власова (Навье-Стокса-Фоккера-Планка), описывающих нестационарное течение взвеси мелких твердых частиц в вязкой несжимаемой жидкости. Используется схема расщепления по физическим факторам на прямоугольной сетке с шахматным расположением узлов и статистическое моделирование. Рассмотрен пример решения задачи о течении жидкости, вносящей мелкие разнородные тяжелые частицы в канал с уступом.

Ключевые слова: вязкая несжимаемая жидкость, твердые мелкие частицы, нестационарные течения, численные методы.

Введение. Нестационарные движения сред с частицами различного рода широко распространены как в природе, так и в технике. Часто именно они играют определяющую роль при реализации различных технологических процессов, в частности, в энергетике и ряде областей (нефтяной, химической, пищевой, фармацевтической, металлургической) промышленного производства [1].

В том случае, когда частицы относительно однородны, их движение может быть описано в рамках, так называемой, «двуфазной модели», в которой частицы характеризуются их локальной плотностью и скоростью. Однако эта модель не применима, когда движущиеся частицы имеют значительный разброс по размерам, так как в этом случае скорости разных частиц будут сильно различаться и для описания движения частиц приходится вводить функцию распределения, характеризующую среднее количество частиц с определенным разбросом по радиусам и скоростям в элементе пространства. Таким образом, в отличие от классической системы уравнений Навье-Стокса, система уравнений, описывающих нестационарное течение взвеси мелких сильно неоднородных твердых частиц в вязкой несжимаемой жидкости, содержит дополнительный интегральный член в уравнении движения, учитывающий влияние частиц на движение жидкости, а также уравнение Власова или Фоккера-Планка (если на частицы действуют дополнительные силы случайного характера) для расчета функции распределения частиц [2, 3]. Вопросы глобальной разрешимости подобных начально-краевых задач рассматривались, в частности, в [4-6].

Для решения системы уравнений движения жидкости с частицами применим схему расщепления по физическим факторам, близкую к описанной в [7] для численного решения классических уравнений Навье-Стокса. Решение же уравнения Власова (Фоккера-Планка) проведем методом статистического моделирования Монте-Карло [8].

1. Уравнения, граничные и начальные условия

Исходная система уравнений, описывающих нестационарное течение взвеси мелких сильно неоднородных твердых частиц в вязкой несжимаемой жидкости, имеет вид

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u}, \nabla_x) \bar{u} - \nu \Delta \bar{u} + 6\pi \nu \int \int_{r \ w} r [\bar{u}(\bar{x}, t) - \bar{w}] f(\bar{x}, \bar{w}, r, t) d\bar{w} dr + \frac{1}{\rho_f} \nabla_x p = \bar{g},$$

$$\operatorname{div} \bar{u} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\bar{w}, \nabla_x) f + \left(\nabla_w, \left\{ \frac{9\rho_f \nu}{2\rho_p r^2} [\bar{u}(\bar{x}, t) - \bar{w}] + \bar{g} \right\} f \right) = D \Delta_w f,$$

где ν — кинематическая вязкость жидкости, ρ_f — плотность жидкости, ρ_p — плотность частиц, \bar{g} — внешняя массовая сила, действующая на единицу объема, $\bar{u} = \bar{u}(\bar{x}, t)$ — поле скоростей жидкости, $p = p(\bar{x}, t)$ — поле давления, D — коэффициент диффузии, а $f = f(\bar{x}, \bar{w}, r, t)$ — функция распределения частиц по координатам \bar{x} , скоростям \bar{w} и радиусам r .

На участке, где жидкость поступает в расчетную область, задаем поле скоростей жидкости, объемную плотность частиц в потоке и функцию их распределения по радиусам (считаем, что скорости частиц на входе соответствуют скорости потока).

На участке, где жидкость покидает расчетную область, ставим условие свободного вытекания $\partial \bar{u} / \partial n = 0$, на твердой стенке — условия непротекания $u_n = 0$ и прилипания $u_\tau = 0$, а на свободной границе — условие непротекания $u_n = 0$ и скольжения $\partial u_\tau / \partial n = 0$.

Для функции распределения ставим условие поглощения частиц на границе $f(\bar{x}, \bar{w}, r)(\bar{w}, \bar{n}) \geq 0$, где \bar{n} — внешняя нормаль.

В начальный момент задаем распределение скорости $\bar{u} = \bar{u}_0(\bar{x})$, удовлетворяющее уравнению неразрывности и граничным условиям, а также начальное значение функции распределения $f = f_0(\bar{x}, \bar{w}, r)$, удовлетворяющее граничным условиям.

2. Численная реализация, первый этап

На первом этапе предполагаем, что перенос количества движения в жидкости осуществляется за счет конвекции, диффузии и увлечения жидкости движущимися частицами, и определяем промежуточное поле скоростей \tilde{u}

$$\frac{\tilde{u} - \bar{u}^{(n)}}{\Delta t} + (\bar{u}^{(n)}, \nabla_x) \bar{u}^{(n)} - \nu \Delta \bar{u}^{(n)} + 6\pi \nu \int \int_{r \ w} r [\bar{u}(\bar{x}, t) - \bar{w}] f^{(n)}(\bar{x}, \bar{w}, r) d\bar{w} dr = \bar{g},$$

которое, заметим, не удовлетворяет уравнению неразрывности, но сохраняет во внутренних точках вихревые характеристики.

Применим явную схему Эйлера, которая, хотя и накладывает определенные ограничения на шаг по времени [8, 9], оказывается удобной и хорошо согласуется с процессом моделирования движения частиц.

Для дискретизации уравнений используем метод конечных разностей на прямоугольной сетке с шахматным расположением узлов (сетка MAC-типа) — давление вычисляем в центрах ячеек, а составляющие скорости на их гранях. При этом строим разностную сетку так, чтобы граница расчетной области проходила через точки, в которых вычисляется нормальная составляющая скорости, а для задания узловых значений касательной составляющей скорости используем линейную интерполяцию.

На разнесенной сетке поле скоростей и давления аппроксимируется со вторым порядком точности с использованием значений составляющих скорости и значений давления в соседних точках. Такая сетка, как замечено в [10], позволяет связать значения скорости и давления в соседних узлах и избежать появления осцилляций в решении, которые возникают при использовании центральных разностей на неразнесенной сетке.

Очевидно, важно провести дискретизацию так, чтобы разностные операторы наследовали основные свойства исходных дифференциальных операторов.

Для обеспечения свойства транспортности и консервативности при дискретизации конвективных потоков в уравнении изменения количества движения используем схему с разностями против потока, направление которого определяется средними значениями скоростей на границах ячейки [11]. Ограничимся для простоты двумерным случаем, тогда в проекции на ось x имеем (различие формул для \tilde{u}_L, \tilde{u}_R и \tilde{v}_L, \tilde{v}_R вызвано применением разнесенной сетки)

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} = \left(\frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} \right)_{i,j} \approx \frac{\tilde{u}_R u_R - \tilde{u}_L u_L}{h_x} + \frac{\tilde{v}_R u_R - \tilde{v}_L u_L}{h_y},$$

$$\tilde{u}_L = \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2}, \quad \tilde{u}_R = \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2},$$

$$\tilde{v}_L = \frac{v_{i,j+1} + v_{i-1,j+1} + 3v_{i,j} + 3v_{i-1,j}}{8}, \quad \tilde{v}_R = \frac{v_{i,j} + v_{i-1,j} + 3v_{i,j+1} + 3v_{i-1,j+1}}{8},$$

$$u_L = \begin{cases} u_{i-1,j} & \text{при } \tilde{u}_L > 0, \\ u_{i,j-1} & \text{при } \tilde{v}_L > 0, \\ u_{i,j} & \text{при } \tilde{u}_L < 0 \text{ или } \tilde{v}_L < 0, \end{cases}, \quad u_R = \begin{cases} u_{i,j} & \text{при } \tilde{u}_R > 0 \text{ или } \tilde{v}_R > 0, \\ u_{i+1,j} & \text{при } \tilde{u}_R < 0, \\ u_{i,j+1} & \text{при } \tilde{v}_R < 0, \end{cases}$$

где u, v — соответственно x -ая и y -ая составляющие скорости потока жидкости.

Для дискретизации диффузных потоков используем обычную схему с центральными разностями [11]. В проекции на ось x

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j}}{h_y^2}.$$

Интегральный член в уравнении движения, учитывающий влияние частиц на жидкость, заменим соответствующей интегральной суммой. Лучшие результаты

получаются, если скорость жидкости брать в точке, соответствующей координатам x_s, y_s модельной частицы, т. е., в проекции на ось x

$$\left(\iint_{r, w} r(u-w) f dw dr \right)_{i,j} \approx \frac{N}{n} \sum_s r_s [u(x_s, y_s) - w_s],$$

где r_s, w_s — радиус и x -ая составляющая скорости модельной частицы, суммирование распространяется на частицы, находящиеся в ячейке $h_x \times h_y$ с центром в точке (i, j) x -ой сетки, а N, n — суммарное число движущихся в жидкости частиц и, соответственно, число модельных частиц (при постановке задачи обычно задают объемную плотность частиц в жидкости, зная которую по выбранному значению n нетрудно рассчитать величину N). Для определения скорости жидкости в точке x_s, y_s выполним линейную интерполяцию по соседним узлам. Так, например, если локальные, отсчитываемые от точки (i, j) , координаты $\Delta x_s, \Delta y_s$ модельной частицы положительны, то

$$u(x_s, y_s) = u_{i,j} + \frac{\Delta x_s}{h_x} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \frac{\Delta y_s}{h_y} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \frac{\Delta x_s}{h_x} \frac{\Delta y_s}{h_y} (u_{i+1,j+1} + u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}).$$

Кроме того, заметим, для улучшения точности суммирование при подсчете интегральной суммы целесообразно проводить с весовыми множителями, учитывающими убывание влияния модельных частиц по мере их удаления от текущего узла сетки.

Важно отметить, что, так как для дискретизации используется сетка с шахматным расположением узлов, в зависимости от того, по какой координате вычисляется значение интегрального члена зависит и то, какие из модельных частиц учитываются в сумме.

3. Численная реализация, второй этап

На втором этапе рассчитываем поле давления. С учетом соленоидальности вектора скорости $\tilde{u}^{(n+1)}$ из уравнения движения для определения давления получим уравнение Пуассона

$$\Delta p^{(n+1)} = \rho_f \frac{\nabla \tilde{u}}{\Delta t}.$$

Для дискретизации первых производных от промежуточного поля скоростей \tilde{u} и вторых производных от давления используем обычные схемы с центральными разностями [11]

$$(\Delta p)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right)_{i,j} \approx \frac{p_{i-1,j} + p_{i+1,j} - 2p_{i,j}}{h_x^2} + \frac{p_{i,j-1} + p_{i,j+1} - 2p_{i,j}}{h_y^2},$$

$$(\nabla \tilde{u})_{i,j} = \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right)_{i,j} \approx \frac{\tilde{u}_{i+1,j} - \tilde{u}_{i,j}}{h_x} + \frac{\tilde{v}_{i,j+1} - \tilde{v}_{i,j}}{h_y}.$$

Решение уравнения Пуассона для давления проведем итерационным методом последовательной верхней релаксации [12]. Однако необходимо задать граничные условия для давления (составляющую давления, отвечающую массовой силе, следует выделить, так как она не меняется в процессе решения задачи). Эти условия отсутствуют в физической постановке задачи, поэтому для их задания нужно использовать уравнение движения в проекции на нормаль к границе расчетной области.

На участке, где жидкость поступает в расчетную область $\partial p / \partial n = 0$, на участке, где жидкость покидает расчетную область $\frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial n} = \frac{1}{\Delta t} |\Gamma| \int_{\Gamma} \tilde{v} d\bar{l}$, на свободной границе $\partial p / \partial n = 0$, на твердой стенке (полагая, например, что нормаль направлена вдоль оси y , т. е. ось x ориентирована вдоль стенки) имеем $\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{i,j} = -v \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j}}{h_x^2}$ [9].

Нужно иметь в виду, что для сходимости итераций градиентные условия должны быть непосредственно подставлены в разностную схему при расчете внутренних точек, смежных с граничными [11]. Таким образом, используя метод последовательной верхней релаксации, во внутренних точках

$$p_{i,j}^{k+1} = p_{i,j}^k (1 - \omega) + \frac{\omega}{2(h_y^2 + h_x^2)} \left[h_y^2 (p_{i+1,j}^k + p_{i-1,j}^{k+1}) + h_x^2 (p_{i,j+1}^k + p_{i,j-1}^{k+1}) - h_x^2 h_y^2 \frac{\rho_f}{\Delta t} (\nabla \tilde{u})_{i,j} \right],$$

где $0 < \omega < 1$ — параметр релаксации, а в точках, смежных с границей (пусть, для определенности, точки $(i, 0)$ принадлежат границе), имеем уравнение

$$p_{i,1}^{k+1} = p_{i,1}^k \frac{1 - \omega}{1 - \frac{h_x^2}{h_y^2 + h_x^2} \frac{\omega}{2}} + \frac{\omega / (h_y^2 + h_x^2)}{2 - \frac{h_x^2}{h_y^2 + h_x^2} \omega} \left[h_y^2 (p_{i+1,1}^k + p_{i-1,1}^{k+1}) + h_x^2 \left(p_{i,2}^k - h_y \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{i,0} \right) - h_x^2 h_y^2 \frac{\rho_f}{\Delta t} (\nabla \tilde{u})_{i,1} \right].$$

После того, как сходимость достигнута окончательные значения давления на границе определим по формуле $p_{i,0}^{k+1} = p_{i,1}^{k+1} - h_y \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{i,0}$.

Аналогично поступим и в случае угловых точек. Пусть, например, угловой является точка $(0, 0)$. Тогда в смежной с ней внутренней точке $(1, 1)$ будем иметь уравнение

$$p_{1,1}^{k+1} = p_{1,1}^k \frac{1 - \omega}{1 - \omega/2} + \frac{\omega / (h_y^2 + h_x^2)}{2 - \omega} \left[h_y^2 \left(p_{2,1}^k - h_x \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{0,1} \right) + h_x^2 \left(p_{1,2}^k - h_y \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{1,0} \right) - h_x^2 h_y^2 \frac{\rho_f}{\Delta t} (\nabla \tilde{u})_{1,1} \right].$$

Разумеется, необходимо согласование градиента давления на границе с источниковым членом в уравнении Пуассона, т. е.

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial n} ds = \int_{\Omega} \Delta p d\omega = \frac{\rho_f}{\Delta t} \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} d\omega,$$

так как невыполнение этого условия (из-за ошибок аппроксимации), обычно, приводит к расходимости или к сильному замедлению сходимости итераций [10].

Итерационный цикл, как обычно, завершается, когда невязка становится меньше заданной [10].

4. Численная реализация, третий этап

На третьем этапе предполагаем, что перенос количества движения осуществляется за счет градиента давления и определяем новое поле скоростей жидкости $\bar{u}^{(n+1)}$

$$\frac{\bar{u}^{(n+1)} - \tilde{u}}{\Delta t} = -\frac{\nabla \tilde{p}}{\rho_f}.$$

Для дискретизации первых производных от давления используем обычную схему с центральными разностями [11]. В проекции на ось x

$$(\nabla p)_{i,j} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{h_x}.$$

На четвертом этапе предполагая, что движение частиц не меняет поле скоростей жидкости, определяем новое положение и новые значения скоростей движущихся в жидкости частиц.

5. Численная реализация, четвертый этап

Уравнение Власова в исходной системе описывает функцию распределения движущихся в жидкости частиц в предположении, что на них действуют силы Стокса со стороны жидкости и внешние массовые силы. Если же на частицы действуют также некоторые случайные силы (белый шум), то функцию распределения находим из уравнения Фоккера-Планка. Объемная плотность частиц в жидкости при этом предполагается незначительной, так что их столкновениями можно пренебречь.

Для решения подобных уравнений могут применяться методы, основанные на конечно-разностной дискретизации уравнения [12], однако они оказываются недостаточно эффективными и предпочтительными являются методы моделирования (см., например, [8, 13-15]). Будем использовать метод, близкий к известному методу частиц в ячейках [16]. Этот метод состоит в приближенном представлении решения уравнения с помощью соответствующей квадратурной формулы, положение узлов которой (или моделирующих частиц), меняется во времени и определяется исходным уравнением. Формируем в соответствии с начальным значением функции распределения ансамбль модельных частиц, имеющих индивидуальные радиусы, координаты и скорости (выбор числа модельных частиц, очевидно, зависит от решаемой задачи и должен

быть достаточным для расчета значений функции распределения с допустимой погрешностью). Как правило, можно полагать, что в начальный момент времени радиусы, координаты и скорости частиц являются независимыми случайными величинами со своими функциями распределения (более того, как правило, скорости частиц в начальный момент времени не являются случайными и, чаще всего просто равны нулю), так что выбор параметров модельных частиц не представляет сложности и может быть проведен, например, известным методом Неймана [8].

Для реализации граничных условий, очевидно, необходимо исключать модельные частицы из рассмотрения после того, как они достигли границы расчетной области. При этом, если частицы не вносятся потоком в расчетную область, то, естественно, их количество в расчетной области со временем будет уменьшаться. Однако ситуация меняется, если поток вносит частицы в расчетную область. Для моделирования этого процесса необходимо по мере того, как те или иные модельные частицы покидают соответствующие приграничные ячейки сетки, вводить в рассмотрение новые модельные частицы, начальный выбор параметров которых можно также провести методом Неймана. Количество модельных частиц в расчетной области при этом может со временем недопустимо возрасти. В этом случае из рассмотрения приходится исключать частицы, переместившиеся в потоке на наибольшее расстояние (из-за чего некоторая часть расчетной области может остаться без рассмотрения), либо уменьшать количество модельных частиц, вносимых в единицу времени потоком в расчетную область.

Модельные частицы перемещаются из ячейки в ячейку разностной сетки в соответствии со своими скоростями и действующими на них силами. Таким образом, используя схему Эйлера, получим

$$\frac{\bar{x}_s^{-(n+1)} - \bar{x}_s^{-(n)}}{\Delta t} = \bar{w}_s^{-(n)}, \quad \frac{\bar{w}_s^{-(n+1)} - \bar{w}_s^{-(n)}}{\Delta t} = \frac{9\rho_f \nu}{2\rho_p r_s^2} \left[u^{-(n+1)} \left(\bar{x}_s^{-(n)} \right) - \bar{w}_s^{-(n)} \right] + \bar{g} + \bar{\xi},$$

где r_s — радиус частицы, \bar{x}_s — ее координаты, \bar{w}_s — скорости, а $\bar{\xi}$ — случайный вектор, компоненты которого распределены по нормальному закону с нулевым ожиданием и дисперсией $\sigma = \sqrt{2D \cdot \Delta t}$. Для вычисления сил со стороны жидкости, необходимо знать скорость потока жидкости в соответствующей точке, для нахождения которой используем линейную интерполяцию значений сеточной функции скорости потока жидкости по четырем ближайшим узлам. Для вычисления случайной составляющей силы применим метод статистического моделирования (для вычисления значений случайного вектора $\bar{\xi}$, например, можно использовать тот факт, что сумма n независимых случайных величин, имеющих нулевое математическое ожидание и дисперсию σ/\sqrt{n} , будет асимптотически нормальна и иметь требуемые характеристики).

Для контроля сходимости на каждом временном шаге вычисляется невязка, которую дает уравнение неразрывности для промежуточного поля скоростей [10].

Шаг интегрирования по времени зависит от величины пространственного шага и выбирается на основе оценки конвективных и диффузионных потоков и выполнения ограничений, обеспечивающих устойчивость схемы Эйлера [10].

Однако эти оценки позволяют только ориентировочно установить соотношение временного и пространственного шагов. Практически это соотношение уточняется путем выполнения серии пробных расчетов. Заметим, что при уменьшении пространственного шага, необходимого для достижения требуемой точности расчета, потребуется приблизительно квадратичное уменьшение временного шага и соответствующее увеличение ансамбля модельных частиц.

Для вычисления функции распределения разбиваем фазовое пространство на ячейки. Это не представляет сложности, так как после проведения расчетов диапазон скоростей частиц известен, а дискретизация пространства координат уже задана. Значения сеточной аппроксимации функции распределения определяются как отношение числа модельных частиц, находящихся в соответствующей ячейке фазового пространства, к суммарному числу модельных частиц. Заметим, что в большинстве случаев интерес представляет только плотность частиц, радиусы которых лежат в заданном диапазоне, в той или иной зоне расчетной области. Значения сеточной аппроксимации этой функции распределения определяются просто как отношение числа модельных частиц, находящихся в соответствующей ячейке расчетной области (т. е., в отличие от предыдущего случая, учитываются частицы с любыми скоростями), к суммарному числу модельных частиц. Значительный интерес обычно представляет и функция распределения для частиц, осевших на стенках расчетной области. Вычисление значений сеточной аппроксимации этой функции также не представляет особой сложности.

6. Вычислительный эксперимент

Для проведения вычислительных экспериментов предложенный алгоритм был реализован в специально разработанной программе, рассчитанной на использование персонального компьютера. При разработке программы особое внимание уделялось вопросам визуализации результатов расчетов — прежде всего непосредственному наблюдению за движением частиц за счет высвечивания их положений на дисплее компьютера в требуемые моменты времени (при этом частицы, радиусы которых лежат в том или ином заданном диапазоне, выделялись соответствующим цветом). Анализ траекторий движения отдельных (выделенных) частиц достигался за счет высвечивания их положения во все последовательные моменты времени, а для сопоставления траекторий движения частиц с линиями тока жидкости, последние, как обычно, характеризовались траекториями частиц-маркеров, скорости которых совпадают со скоростью жидкости в соответствующих точках.

Для иллюстрации работы алгоритма рассмотрим процесс оседания облака разнородных частиц на плоскую поверхность при наличии бокового дрейфа среды. Качественно этот процесс хорошо известен и часто наблюдаем, например, оседание мелкой разнородной песчаной пыли в воздухе при слабом ветре. Очевидно, если есть достаточное расстояние, то облако частиц может существенно деформироваться еще до соприкосновения с землей. Прежде всего оно будет вытягиваться в вертикальном направлении из-за разной скорости оседания мелких и крупных частиц и смещаться в сторону, увлекаемое ветром. Крупные частицы будут

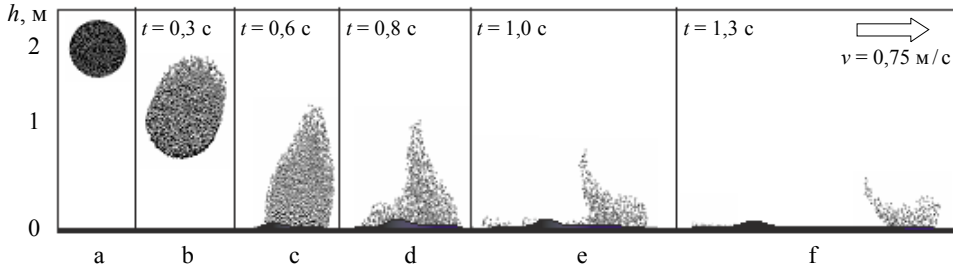


Рис. 1. Фазы (a, b, c, d, e, f) оседания облака разнородных твердых частиц — песчаная пыль в воздухе

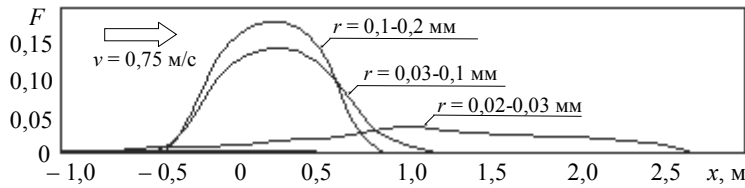


Рис. 2. Характер распределения по поверхности выпавших частиц пыли разных размеров

двигаться почти вертикально и увлекать воздух. В результате мелкие частицы, находящиеся в верхней части облака, вблизи его центра будут затягиваться потоком, увлекаясь к его центру, и оседают быстрее, чем они оседали бы, двигаясь отдельно. В тоже время в нижней части мелкие частицы начнут смещаться в стороны от центра облака. Таким образом, по мере оседания изменяется и форма облака. При контакте облака с землей увлекаемый оседающими частицами поток отклоняется в стороны и уносит с собой более мелкие частицы. Заметим, что так как вблизи земли скорость ветра мала, то мелкие частицы могут двигаться как по ветру, так и против него. Далее поток начинает отклоняться сначала вверх, а затем закручиваться, увлекая наиболее мелкие, не успевшие осесть, частицы, которые будут еще долго держаться в воздухе. Так как по мере увеличения расстояния от земли скорость ветра растет, то эти частицы будут им сноситься. В конечном счете, пятно, на котором осядут крупные частицы, окажется относительно небольшим, а осевшие частицы распределятся по его площади относительно симметрично. Пятно же, на котором осядут мелкие частицы, окажется не только много большим, но будет смещено в наветренную сторону, причем осевшие частицы будут, очевидно, распределены по его площади асимметрично — зона максимальной плотности сместится по ветру. На рис. 1 видны полученные в результате расчетов и описанные выше фазы процесса оседания в воздухе с высоты 2 м облака песчаной пыли с диаметром пылинок $0,02 \div 0,2$ мм при слабом боковом ветре (объемная концентрация пыли в облаке 5 %), а на рис. 2 — характер распределения по поверхности выпавших частиц пыли разных размеров.

Задача о течении в канале с уступом, как известно, относится к классическим [17] (для чистой жидкости). Рассмотрим аналогичную задачу в случае, когда жидкость вносит в канал множество разнородных частиц, оседающих под действием силы тяжести. Из опыта хорошо известно, что наличие уступа может существенно изменить распределение выпавших на дно примесей по длине канала — за уступом возникает «тень», где на дне осевших частиц, особенно крупных, будет

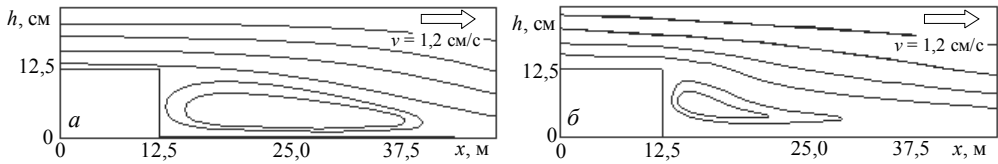


Рис. 3. Линии тока чистой жидкости (а) и жидкости, несущей частицы (б)

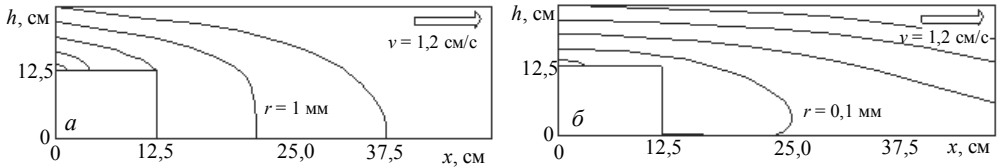


Рис. 4. Траектория оседания крупных (а) и мелких (б) частиц

относительно мало. Однако, с другой стороны, вихревое движение жидкости за уступом приведет к тому, что легкие частицы будут увлекаться противотоком и могут перемещаться к краю уступа, а более крупные из-за противотока в определенной мере теряют горизонтальную составляющую скорости и оседают почти вертикально. Кроме того, оседающие частицы увлекают жидкость, что, в определенной мере, искажает картину линий тока жидкости — они «прижимаются» ко дну канала и зона вихревого движения уменьшается. Это также сказывается на траекториях движения мелких и крупных частиц. На рис. 3 показаны описанные выше типичные линии тока чистой жидкости в канале с уступом ($Re \approx 1$) и жидкости, несущей множество разнородных частиц (объемная концентрация частиц на входе в канал 10 %) — металлические пылинки с диаметром пылинок $0,1 \div 1$ мм в вязком масле, а на рис. 4 — соответствующие траектории движения мелких и крупных частиц.

Заметим, что приведенные выше описания моделируемых процессов носят чисто качественный, иллюстративный характер — их реальное протекание, конечно, существенно зависит от диаметров частиц, их масс, концентрации в потоке, скорости и вязкости среды и т. п.

Заключение. Предложен метод численного решения системы уравнений Навье-Стокса-Фоккера-Планка, описывающей нестационарное течение взвеси мелких твердых частиц в вязкой несжимаемой жидкости. Метод основан на схеме расщепления по физическим факторам и использовании конечных разностей на прямоугольной сетке с шахматным расположением узлов для дискретизации уравнений Навье-Стокса и моделировании процесса движения частиц методом Монте-Карло. Выполнено моделирование процесса оседания облака сильно разнородных частиц при наличии бокового дрейфа среды, а также моделирование процесса течения вязкой жидкости, вносящей в канал с обратным уступом разнородные тяжелые частицы. Полученные результаты позволяют количественно описать известные, наблюдаемые в экспериментах, эффекты. Предложенный метод эффективен и достаточно универсален, так как при соответствующем обобщении позволяет исследовать и значительно более сложные ситуации, например, учесть влияние теплового воздействия на среду или рассмотреть ситуацию с частицами, несущими электростатический заряд и т. п.

Литература

- [1] *Низматулин, Р. И.* Основы механики гетерогенных сред / *Р. И. Низматулин.* — Москва: Наука, 1978. — 336 с.
- [2] *Caglisch, R.* Dynamic theory of suspensions with Brownian effects / *R. Caglisch, G. C. Papanicolaou* // *SIAM J. Appl. Math.* — 1983. — Т. 43(4). — P. 885-906.
- [3] *Williams, F. A.* Combustion theory / *F. A. Williams.* — Sec. edd. — Benjamin Cummings, 1985. — 615 p.
- [4] *Hamdache, K.* Global Existence and Large Time Behaviour for the Vlasov-Stokes Equations / *K. Hamdache* // *Japan J. Indust. Appl. Math.* — 1998. — № 15. — P. 51-74.
- [5] *Анощенко, О.* Существование глобального решения системы уравнений движения суспензии. Комплексный анализ динамических систем. — Київ: Наукова думка, 1992. — С. 112-119.
- [6] *Anoschenko, O.* Global weak solutions of the Navier-Stokes-Vlasov-Poisson system / *O. Anoschenko, E. Khruslov, H. Stephan* — Berlin: WIAS, 2008. — 44 p. (Preprint; 1335).
- [7] *Белоцерковский, О. М.* Численное моделирование в механике сплошных сред / *О. М. Белоцерковский.* — Москва: Физматлит, 1994. — 385 с.
- [8] *Соболь, И. М.* Численные методы Монте-Карло / *И. М. Соболь.* — Москва: Наука, 1973. — 311 с.
- [9] *Пейре, Р.* Вычислительные методы в задачах механики жидкости / *Р. Пейре, Т. Д. Тейлор.* Ленинград: Гидрометеониздат, 1986. — 352 с.
- [10] *Волков, К. Н.* Реализация схемы расщепления на разнесенной сетке для расчета нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости / *К. Н. Волков* // *Вычислительные методы и программирование.* — 2005. — Т. 6. — С. 269-281.
- [11] *Роуч, А.* Вычислительная гидродинамика / *А. Роуч.* — Москва: Мир, 1980. — 616 с.
- [12] *Андерсон, Д.* Вычислительная гидродинамика и теплообмен. Т. 2 / *Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер.* — Москва: Мир, 1990. — 392 с.
- [13] *Флетчер, К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей / *К. Флетчер.* — Москва: Мир, 1991. — 323 с.
- [14] *Ананич, С. Э.* Об одном классе разностных схем для уравнения Фоккера-Планка / *С. Э. Ананич* // *Мат. моделирование.* — 1998. — Т. 10, № 5. — С. 58-70.
- [15] *Богомолов, С. В.* Метод частиц для системы уравнений газовой динамики / *С. В. Богомолов, К. В. Кузнецов* // *Мат. моделирование.* — 1998. — Т. 10, № 7. — С. 93-100.
- [16] *Харлоу, Ф. Х.* Численные методы частиц в ячейках для задач гидродинамики / *Ф. Х. Харлоу* // *Вычислительные методы в гидродинамике.* — Москва: Мир, 1967. — 332 с.
- [17] *Лаврентьев, М. А.* Проблемы гидродинамики и их математические модели / *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат.* — Москва: Наука, 1977. — 407 с.

Simulation of non-stationary flow of small solid particles in viscous incondensable liquid

Vladimir Fenchenko

The quantitative solution method of the Navier-Stokes-Vlasov (Fokker-Plank) equations system describing non-stationary flow of small solid particles in viscous incondensable liquid is proposed. The splitting scheme by physical factors on a rectangular grid with a checkerboard arrangement of nodes and statistical modeling are used. An example of solution of the problem on fluid flow that brings small heterogeneous heavy particles in a channel with a step is considered.

Моделювання нестационарних течій суспензії дрібних твердих часток у в'язкій нестисливій рідині

Володимир Фенченко

Запропоновано метод числового розв'язування системи рівнянь Нав'є-Стокса-Власова (Нав'є-Стокса-Фоккера-Планка), що описує нестационарні течії суспензії дрібних твердих часток у в'язкій нестисливій рідині. Використовується схема розщеплення за фізичними факторами на прямокутній сітці з шаховим розташуванням вузлів і статистичне моделювання. Розглянуто приклад вирішення задачі про плин рідини, що вносить дрібні різномірні важкі частки в канал з уступом.

Представлено професором Я. Савулою

Отримано 26.06.09