

Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових задач процесу фільтрування

Андрій Бомба¹, Юрій Климюк², Андрій Сафоник³, Віктор Сівак⁴

¹ д. т. н., професор, Рівненський державний гуманітарний університет, вул. Остафова, 31, Рівне, 33000, e-mail: abomba@mail.ru

² Рівненський державний гуманітарний університет, вул. Остафова, 31, Рівне, 33000, e-mail: klimyuk@ukr.net

³ Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, e-mail: safonik@ukr.net

⁴ к. т. н., доцент, Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, Рівне, 33000

У роботі запропоновано просторове узагальнення математичної моделі Мінца для «швидкого фільтра» з пористим завантаженням, що має форму криволінійного паралелепіпеда. Отримано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної задачі, що описується системою нелінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь типу «конвекція-дифузія-масообмін» для криволінійного паралелепіпеда, обмеженого чотирма поверхнями течії та двома еквіпотенціальними поверхнями. Знайдені співвідношення є ефективні для проведення оптимізації параметрів процесу фільтрування, зокрема, часу захисної дії завантаження, розмірів фільтра тощо, а також теоретичних досліджень у випадках переважання конвективних і сорбційних складників відповідного процесу над дифузійними та десорбційними, що властиво в переважній більшості фільтрувальних установок. На цій основі проведено відповідний комп'ютерний експеримент, результати якого підтверджують відомий факт, що продуктивність роботи фільтра суттєво залежить від вибору його форми.

Ключові слова: фільтрування, конвекція, дифузія, масообмін, асимптотика, нелінійні просторові сингулярно збурені задачі.

Вступ. Для очистки природних і стічних вод використовують процес фільтрування. Розробкою теоретичних основ фільтрації та подальшим їх удосконаленням займалися чимало вітчизняних і зарубіжних вчених — Д. М. Мінц, Ю. М. Шехтман, В. З. Мельцер, В. Мацкрле, А. М. Фоміних, Е. В. Венеціанов, М. Г. Журба, Е. Д. Бабенков, О. Я. Олійник, А. М. Тугай, В. Л. Поляков, А. А. Жуковицький, Я. Л. Забєжинський, А. Н. Тихонов, А. Д. Смірнов та інші [4, 6, 8-10, 12-17]. У їх працях порізно розглядають дію сил адгезії, процеси захоплення й утримування осаду у фільтруючому шарі, дають оцінки параметрів фільтраційних досліджуваних матеріалів, пропонують методики інженерних розрахунків фільтрувальних пристроїв на основі спрощених напівемпіричних моделей. Найвідомішою та найширше застосовуваною є модель Д. М. Мінца [9].

У цій роботі запропоновано просторове узагальнення математичної моделі Д. М. Мінца для «швидкого фільтра» (приймаємо, що конвективні компоненти переносу й інтенсивність локального масообміну переважають над вкладом дифузійних

процесів) із пористим завантаженням і аналогічно до праць [1-3, 7] побудовано алгоритм розв'язку відповідної нелінійної сингулярно збуреної задачі типу «конвекція-дифузія-масообмін». При цьому суттєвим є перехід від вихідної задачі для складної конфігурації криволінійної області (обмеженої поверхнями течії й еквіпотенціальними поверхнями) до задачі для відповідної канонічної області комплексного потенціалу, що має вигляд прямокутного паралелепіпеда.

1. Постановка задачі

Розглянемо однозв'язний криволінійний паралелепіпед (фільтр) $ABCD A^* B^* C^* D^*$, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках і ребрах, еквіпотенціальними поверхнями $ABB^* A^* = \{z : f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD^* C^* = \{z : f_2(x, y, z) = 0\}$, а також поверхнями течії $ADD^* A^* = \{z : f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC^* B^* = \{z : f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{z : f_5(x, y, z) = 0\}$, $A^* B^* C^* D^* = \{z : f_6(x, y, z) = 0\}$ (рис. 1). Для області $G = G_z \times (0, \infty)$, де $G_z = ABCD A^* B^* C^* D^*$ маємо таку модельну задачу

$$\begin{cases} \sigma \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C = D \Delta C, \\ \frac{\partial U}{\partial t} = \alpha C - \varepsilon \beta U, \end{cases} \quad (1)$$

$$C|_{ABB^* A^*} = c_*(M, t), \quad \frac{\partial C}{\partial \vec{n}}|_{CDD^* C^*} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \vec{n}}|_{ADD^* A^* \cup BCC^* B^* \cup ABCD \cup A^* B^* C^* D^*} = 0,$$

$$C(x, y, z, 0) = c_0^0(x, y, z), \quad U(x, y, z, 0) = u_0^0(x, y, z); \quad (2)$$

$$\vec{v} = \kappa \nabla \varphi, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (3)$$

$$\varphi|_{ABB^* A^*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CDD^* C^*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{ADD^* A^* \cup BCC^* B^* \cup ABCD \cup A^* B^* C^* D^*} = 0, \quad (4)$$

де $C(x, y, z, t)$ — концентрація домішок у рідині, що фільтрується; $U(x, y, z, t)$ — концентрація осаду у внутрішній точці (x, y, z) області завантаження в момент часу t ; $\alpha(x, y, z, t)$ і $\varepsilon \beta(x, y, z, t)$ — функції, які характеризують відповідно інтенсивність сорбції та десорбції домішкових частинок; $\sigma(x, y, z)$ — пористість середовища; $\vec{\nabla}$ — оператор Гамільтона; $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ — оператор Лапласа; $D = d_0 \varepsilon$ — коефіцієнт дифузії домішки у рідині; ε — малий параметр (він характеризує переваги одних складників процесу над іншим, а саме, що дифузійний і десорбційний складники цього процесу є малі порівняно з іншими його складниками); $c_*(M, t)$, $c_0^0(x, y, z)$ —

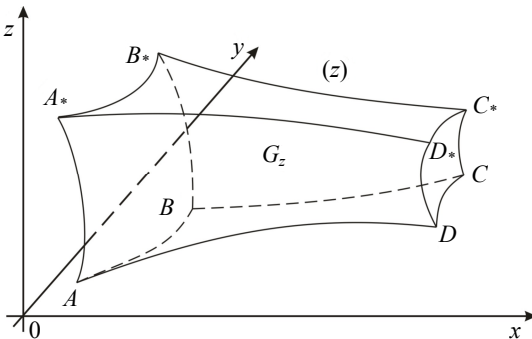


Рис. 1. Просторова фізична область G_z (фільтр)

концентрація домішок у рідині, що фільтрується; $U(x, y, z, t)$ — концентрація осаду у внутрішній точці (x, y, z) області завантаження в момент часу t ; $\alpha(x, y, z, t)$ і $\varepsilon \beta(x, y, z, t)$ — функції, які характеризують відповідно інтенсивність сорбції та десорбції домішкових частинок; $\sigma(x, y, z)$ — пористість середовища; $\vec{\nabla}$ — оператор Гамільтона; $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ — оператор Лапласа; $D = d_0 \varepsilon$ — коефіцієнт дифузії домішки у рідині; ε — малий параметр (він характеризує переваги одних складників процесу над іншим, а саме, що дифузійний і десорбційний складники цього процесу є малі порівняно з іншими його складниками); $c_*(M, t)$, $c_0^0(x, y, z)$ —

достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G ; M — довільна точка відповідної поверхні; φ — фільтраційний потенціал ($0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$); $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ — вектор швидкості фільтрації ($|\vec{v}| > v_* \gg \varepsilon$); κ — коефіцієнт фільтрації середовища; \vec{n} — зовнішня нормаль до відповідної поверхні; d_0, v_* — задані додатні дійсні числа [5].

Прийmemo, що задача (3), (4) на просторове конформне відображення $G_w \mapsto G_z (G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\})$ — відповідна G_z область комплексного потенціалу), є розв'язана [1, 7], зокрема, побудовано динамічну сітку та поле швидкості \vec{v} , обчислено фільтраційну витрату Q . Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta), y = y(\varphi, \psi, \eta), z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у системі (1) та умовах (2), приходимо до відповідної задачі для області G_w

$$\begin{cases} \sigma \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c}{\partial \varphi} = \varepsilon d_0 \left(v^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha c - \varepsilon \beta u, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} c(\varphi_*, \psi, \eta, t) &= c_*(\psi, \eta, t), \quad c_\varphi(\varphi^*, \psi, \eta, t) = 0, \\ c_\psi(\varphi, 0, \eta, t) &= c_\psi(\varphi, Q_*, \eta, t) = c_\eta(\varphi, \psi, 0, t) = c_\eta(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0, \\ c(\varphi, \psi, \eta, 0) &= c_0^0(\varphi, \psi, \eta), \quad u(\varphi, \psi, \eta, 0) = u_0^0(\varphi, \psi, \eta), \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} c &= c(\varphi, \psi, \eta, t) = C(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t), \\ u &= u(\varphi, \psi, \eta, t) = U(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t), \\ b_1 &= b_1(\varphi, \psi, \eta) = (\vec{\nabla} \psi)^2, \quad b_2 = b_2(\varphi, \psi, \eta) = (\vec{\nabla} \eta)^2, \quad d_1 = d_1(\varphi, \psi, \eta) = \Delta \psi, \\ d_2 &= d_2(\varphi, \psi, \eta) = \Delta \eta \quad (\text{див., напр., [1, 7]}). \end{aligned}$$

2. Асимптотика розв'язку

Розв'язок задачі (5), (6) з точністю $O(\varepsilon)$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [1-3, 7]

$$\begin{aligned} c &= c_0 + \varepsilon c_1 + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \Pi_i + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \tilde{\Pi}_i + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \tilde{\tilde{\Pi}}_i + \\ &+ \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_i + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \hat{\Pi}_i + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \hat{\tilde{\Pi}}_i + R_2^1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i P_i + \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \tilde{P}_i + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \tilde{\tilde{P}}_i + \\ &+ \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \tilde{\tilde{\tilde{P}}}_i + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \hat{P}_i + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^{i/2} \hat{\tilde{P}}_i + R_2^2, \end{aligned} \quad (8)$$

де $R_2^1(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon), R_2^2(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ — залишкові члени, $c_i(\varphi, \psi, \eta, t), u_i(\varphi, \psi, \eta, t)$ — члени регулярної частини асимптотики ($i = 0, 1$); $\Pi_i(\xi, \psi, \eta, t), P_i(\xi, \psi, \eta, t)$ — функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході з фільтра) ($i = \overline{0, 2}$), $\tilde{\Pi}_i(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t), \tilde{P}_i(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t)$ — в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на вході у фільтр) ($i = \overline{0, 2}$), а функції $\tilde{\Pi}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \tilde{\tilde{\Pi}}_i(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t), \tilde{\Pi}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \tilde{\tilde{\Pi}}_i(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$ та $\tilde{P}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \tilde{\tilde{P}}_i(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t), \tilde{P}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \tilde{\tilde{P}}_i(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$ ($i = \overline{0, 3}$) — в околах $\psi = 0, \psi = Q^*, \eta = 0, \eta = Q^*$ (поправки на бічних стінках фільтра), відповідно; $\xi = (\varphi^* - \varphi)/\varepsilon, \tilde{\xi} = (\varphi - \varphi^*)/\varepsilon, \tilde{\psi} = \psi/\sqrt{\varepsilon}, \tilde{\tilde{\psi}} = (Q^* - \psi)/\sqrt{\varepsilon}, \tilde{\eta} = \eta/\sqrt{\varepsilon}, \tilde{\tilde{\eta}} = (Q^* - \eta)/\sqrt{\varepsilon}$ — «розтяги» відповідних змінних.

Шляхом підстановки співвідношень (7), (8) у (5), (6) і виконання стандартної процедури «прирівнювання» коефіцієнтів біля однакових степенів ε , одержимо такі задачі для знаходження $c_i(\varphi, \psi, \eta, t), u_i(\varphi, \psi, \eta, t)$ та $\Pi_i(\xi, \psi, \eta, t), P_i(\xi, \psi, \eta, t)$ ($i = 0, 1$)

$$\begin{cases} \sigma \frac{\partial c_0}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_0}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial u_0}{\partial t} = \alpha c_0; \\ c_0(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_0^0, \quad c_0(\varphi^*, \psi, \eta, t) = c_*(\psi, \eta, t), \\ u_0(\varphi, \psi, \eta, 0) = u_0^0; \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_1}{\partial \varphi} = d_0 \left(v^2 \frac{\partial^2 c_0}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_0}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_0}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c_0}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c_0}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} = \alpha c_1 - \beta u_0; \\ c_1(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, \quad c_1(\varphi^*, \psi, \eta, t) = 0, \\ u_1(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0; \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} d_0 \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Pi_i}{\partial \xi} = \tilde{q}_i, \quad \frac{\partial P_i}{\partial t} = \tilde{q}_i, \quad i = \overline{0, 1}; \\ \Pi_i \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad \frac{\partial c_i(\varphi^*, \psi, \eta, t)}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi_i(0, \psi, \eta, t)}{\partial \xi} = 0, \quad P_i(\xi, \psi, \eta, 0) = 0; \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} d_0 \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial \xi} = \tilde{q}_2, \quad \frac{\partial P_2}{\partial t} = \tilde{q}_2; \\ \Pi_2 \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad \frac{\partial \Pi_2(0, \psi, \eta, t)}{\partial \xi} = 0, \quad P_2(\xi, \psi, \eta, 0) = 0; \end{cases} \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i(\xi, \psi, \eta, t) = & v^{-2}(\varphi^*, \psi, \eta) \left[I(i, 1) \sum_{l=0}^{i-1} \sigma_{*l} \frac{\partial \Pi_{(i-l-1)}}{\partial t} + \frac{\partial P_{(i-1)}}{\partial t} + \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^i V_{*l} \left(\frac{\partial \Pi_{(i-l)}}{\partial \xi} - d_0 \frac{\partial^2 \Pi_{(i-l)}}{\partial \xi^2} \right) - \right. \\ & \left. - I(i, 2) \sum_{l=0}^{i-2} \left(B_{1*l} \frac{\partial^2 \Pi_{(i-2-l)}}{\partial \psi^2} + B_{2*l} \frac{\partial^2 \Pi_{(i-2-l)}}{\partial \eta^2} + D_{1*l} \frac{\partial \Pi_{(i-2-l)}}{\partial \psi} + D_{2*l} \frac{\partial \Pi_{(i-2-l)}}{\partial \eta} \right) \right], \\ \tilde{q}_i(\xi, \psi, \eta, t) = & \sum_{l=0}^i \alpha_{*l} \frac{\partial \Pi_{(i-l)}}{\partial t} - I(i, 1) \sum_{l=0}^{i-1} \beta_{*l} \frac{\partial P_{(i-l-1)}}{\partial t} \quad (i = \overline{0, 2}), \end{aligned}$$

$\sigma_{*l}, V_{*l}, B_{1*l}, B_{2*l}, D_{1*l}, D_{2*l}, \alpha_{*l}, \beta_{*l}$ — відповідно коефіцієнти біля l -их степенів ε у розкладі функцій $\sigma(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \eta), v^2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \eta), b_1(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \eta), b_2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \eta), d_1(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \eta), d_2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \eta), \alpha(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \eta, t), \beta(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \eta, t)$ у ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$, $I(a, b) = \theta_+(a - b) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a \geq b, \\ 0, & \text{якщо } a < b. \end{cases}$

Внаслідок послідовного розв'язування задач (9)-(12) матимемо [1-3]

$$c_0 = \begin{cases} c_*(\psi, \eta, t - f) \exp \left[- \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{\alpha(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f(\varphi, \psi, \eta))}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} d\tilde{\varphi} \right], & t \geq f, \\ c_0^0(f^{-1}(f - t, \psi, \eta), \psi, \eta) \exp \left[- \int_0^t \frac{\alpha(f^{-1}(\tilde{t} + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{t})}{\sigma(f^{-1}(\tilde{t} + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\tilde{t} \right], & t < f, \end{cases}$$

$$u_0 = \int_0^t \alpha(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) c_0(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) d\tilde{t} + u_0^0;$$

$$c_1 = \begin{cases} e^{-\lambda_1} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{g_1(s, \psi, \eta, f(s, \psi, \eta) - f + t)}{v^2(s, \psi, \eta)} e^{\lambda_1(s, \psi, \eta, t)} ds, & t \geq f, \\ e^{-\lambda_2} \int_0^t \frac{g_2(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta, s)}{\sigma(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} e^{\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, s)} ds, & t < f, \end{cases}$$

$$u_1 = \int_0^t [\alpha c_1(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) - \beta u_0(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t})] d\tilde{t};$$

$$\Pi_0 = d_0 \frac{\partial c_0}{\partial \varphi}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \exp\left(-\frac{\xi}{d_0}\right),$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 &= \int_0^{\xi} \exp\left(-\frac{s}{d_0}\right) \left[\int_0^s \tilde{q}_1(\tilde{s}, \psi, \eta, t) \exp\left(-\frac{\tilde{s}}{d_0}\right) d\tilde{s} - \frac{\partial c_1}{\partial \varphi}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \right] ds, \\
 \Pi_2 &= \int_0^{\xi} \exp\left(-\frac{s}{d_0}\right) \left[\int_0^s \tilde{q}_2(\tilde{s}, \psi, \eta, t) \exp\left(-\frac{\tilde{s}}{d_0}\right) d\tilde{s} \right] ds, \quad P_i = \int_0^t \tilde{q}_i(\xi, \psi, \eta, \tilde{t}) d\tilde{t} \quad (i = \overline{0, 2}),
 \end{aligned}$$

де
$$g_1(\varphi, \psi, \eta, t) = d_0 \left(v^2 \frac{\partial^2 c_0}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_0}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_0}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c_0}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c_0}{\partial \eta} \right),$$

$$\lambda_1(\varphi, \psi, \eta, t) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{\alpha(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f)}{v^2(s, \psi, \eta)} ds, \quad g_2(\varphi, \psi, \eta, t) = g_1 - \beta u_0,$$

$$\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, t) = \int_0^t \frac{\alpha(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s})}{\sigma(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\tilde{s},$$

$$f(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{\sigma(s, \bar{\psi}, \bar{\eta})}{v^2(s, \bar{\psi}, \bar{\eta})} ds \quad \text{— час проходження відповідною частинкою шляху}$$

від точки $(x(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in ABB_*A_*$ до точки $(x(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in G_z$ уздовж відповідної лінії течії (як перетину деяких двох поверхонь $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}$, $0 \leq \bar{\psi} \leq Q_*$, $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}$, $0 \leq \bar{\eta} \leq Q^*$), f^{-1} — функція, обернена до f відносно змінної φ (відзначимо, що така функція існує, оскільки $v^{-2}(\varphi, \psi, \eta)$ — неперервно диференційовна, обмежена, додатно визначена функція).

Функції $\tilde{\Pi}_i(\xi, \psi, \eta, t)$, $\tilde{P}_i(\xi, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, 2}$) знаходяться шляхом розв'язування таких задач [1, 7]

$$\begin{cases}
 d_0 \frac{\partial^2 \tilde{\Pi}_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \tilde{\Pi}_i}{\partial \xi} = \tilde{q}_i, & \frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial t} = \tilde{q}_i, \quad i = \overline{0, 1}; \\
 \frac{\partial c_i(\varphi^*, \psi, \eta, t)}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi_i(\varphi_*, \psi, \eta, t)}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{\Pi}_i(\xi, \psi, \eta, t)}{\partial \xi} = 0, \\
 \tilde{\Pi}_i(\xi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, & \tilde{P}_i(\xi, \psi, \eta, 0) = 0; \\
 d_0 \frac{\partial^2 \tilde{\Pi}_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \tilde{\Pi}_2}{\partial \xi} = \tilde{q}_2, & \frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial t} = \tilde{q}_2; \\
 \tilde{\Pi}_2(\xi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, & \tilde{\Pi}_{2\xi}(0, \psi, \eta, t) = 0, \quad \tilde{P}_2(\xi, \psi, \eta, 0) = 0;
 \end{cases}$$

$$\text{де } \tilde{q}_i(\xi, \psi, \eta, t) = v^{-2}(\varphi^*, \psi, \eta) \left[I(i, 1) \sum_{l=0}^{i-1} \tilde{\sigma}_{*l} \frac{\partial \tilde{\Pi}_{(i-l-1)}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{P}_{(i-1)}}{\partial t} + \sum_{l=1}^i \tilde{V}_{*l} \left(\frac{\partial \tilde{\Pi}_{(i-l)}}{\partial \xi} - d_0 \frac{\partial^2 \tilde{\Pi}_{(i-l)}}{\partial \xi^2} \right) - I(i, 2) \sum_{l=0}^{i-2} \left(\tilde{B}_{1*l} \frac{\partial^2 \tilde{\Pi}_{(i-2-l)}}{\partial \psi^2} + \tilde{B}_{2*l} \frac{\partial^2 \tilde{\Pi}_{(i-2-l)}}{\partial \eta^2} + \tilde{D}_{1*l} \frac{\partial \tilde{\Pi}_{(i-2-l)}}{\partial \psi} + \tilde{D}_{2*l} \frac{\partial \tilde{\Pi}_{(i-2-l)}}{\partial \eta} \right) \right],$$

$$\tilde{q}_i(\xi, \psi, \eta, t) = \sum_{l=0}^i \tilde{\alpha}_{*l} \frac{\partial \tilde{\Pi}_{(i-l)}}{\partial t} - I(i, 1) \sum_{l=0}^{i-1} \tilde{\beta}_{*l} \frac{\partial \tilde{P}_{(i-l-1)}}{\partial t} \quad (i = \overline{0, 2}),$$

$\tilde{\sigma}_{*l}, \tilde{V}_{*l}, \tilde{B}_{1*l}, \tilde{B}_{2*l}, \tilde{D}_{1*l}, \tilde{D}_{2*l}, \tilde{\alpha}_{*l}, \tilde{\beta}_{*l}$ — відповідно коефіцієнти біля l -их степенів ε у розкладі функцій $\sigma(\varphi_* + \varepsilon \xi, \psi, \eta), v^2(\varphi_* + \varepsilon \xi, \psi, \eta), b_1(\varphi_* + \varepsilon \xi, \psi, \eta), b_2(\varphi_* + \varepsilon \xi, \psi, \eta), d_1(\varphi_* + \varepsilon \xi, \psi, \eta), d_2(\varphi_* + \varepsilon \xi, \psi, \eta), \alpha(\varphi_* + \varepsilon \xi, \psi, \eta, t), \beta(\varphi_* + \varepsilon \xi, \psi, \eta, t)$ у ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$.

Примежові функції $\tilde{\Pi}_i(\varphi, \tilde{\mu}, \eta, t), \tilde{P}_i(\varphi, \tilde{\mu}, \eta, t) (i = \overline{0, 3})$ знайдемо з таких задач [1, 7]

$$\sum_{l=0}^i \tilde{\sigma}_{*l} \frac{\partial \tilde{\Pi}_{(i-l)}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + \sum_{l=0}^i \tilde{V}_{*l} \frac{\partial \tilde{\Pi}_{(i-l)}}{\partial \varphi} = d_0 \left(\sum_{l=0}^i \tilde{B}_{1*l} \frac{\partial^2 \tilde{\Pi}_{(i-l)}}{\partial \tilde{\psi}^2} - I(i, 1) \sum_{l=0}^{i-1} \tilde{D}_{1*l} \frac{\partial \tilde{\Pi}_{(i-l-1)}}{\partial \tilde{\psi}} + I(i, 2) \sum_{l=0}^{i-2} \tilde{V}_{*l} \frac{\partial^2 \tilde{\Pi}_{(i-l-2)}}{\partial \varphi^2} + I(i, 2) \sum_{l=0}^{i-2} \tilde{B}_{2*l} \frac{\partial^2 \tilde{\Pi}_{(i-l-2)}}{\partial \eta^2} + I(i, 2) \sum_{l=0}^{i-2} \tilde{D}_{2*l} \frac{\partial \tilde{\Pi}_{(i-l-2)}}{\partial \eta} \right),$$

$$\tilde{\Pi}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\psi} \rightarrow \infty} 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Pi}_i(\varphi, 0, \eta, t)}{\partial \tilde{\psi}} = \begin{cases} -M_{i/2}(\varphi, 0, \eta, t), & \text{якщо } i \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial t} = \sum_{l=0}^i \tilde{\alpha}_{*l} \tilde{\Pi}_{(i-l)} - I(i, 2) \sum_{l=0}^{i-2} \tilde{\alpha}_{*l} \tilde{\Pi}_{(i-l-2)}, \quad \tilde{P}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, 0) = 0 \quad (i = \overline{0, 3}),$$

$$\text{де } M_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t) = \frac{\partial c_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)}{\partial \tilde{\psi}} + \frac{\partial \Pi_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)}{\partial \tilde{\psi}} + \frac{\partial \tilde{\Pi}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)}{\partial \tilde{\psi}} \quad (i = \overline{0, 1}),$$

$\tilde{\sigma}_{*l}, \tilde{V}_{*l}, \tilde{B}_{1*l}, \tilde{B}_{2*l}, \tilde{D}_{1*l}, \tilde{D}_{2*l}, \tilde{\alpha}_{*l}, \tilde{\beta}_{*l}$ — відповідно коефіцієнти біля l -их степенів $\sqrt{\varepsilon}$ у розкладі функцій $\sigma(\varphi, \sqrt{\varepsilon} \tilde{\psi}, \eta), v^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon} \tilde{\psi}, \eta), b_1(\varphi, \sqrt{\varepsilon} \tilde{\psi}, \eta), b_2(\varphi, \sqrt{\varepsilon} \tilde{\psi}, \eta), d_1(\varphi, \sqrt{\varepsilon} \tilde{\psi}, \eta), d_2(\varphi, \sqrt{\varepsilon} \tilde{\psi}, \eta), \alpha(\varphi, \sqrt{\varepsilon} \tilde{\psi}, \eta, t), \beta(\varphi, \sqrt{\varepsilon} \tilde{\psi}, \eta, t)$ у ряд Тейлора в околі $\psi = 0$.

Задачі для знаходження функцій $\tilde{\Pi}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \hat{\Pi}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \hat{\tilde{\Pi}}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ та $\tilde{P}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \hat{P}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \hat{\tilde{P}}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t) (i = \overline{0, 3})$ будуються аналогічно. Залишкові члени знаходимо згідно з [1].

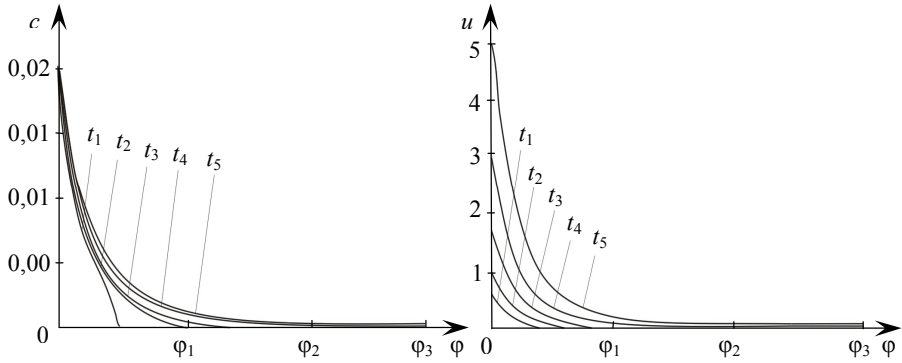


Рис. 2. Розподіл концентрації розчинної речовини й осаду вздовж ліній течії
 $\{(\varphi, \psi_5, \eta_5) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*\}$ у моменти часу $t_i \in \{0,21; 0,38; 0,52; 0,65; 0,87\}$ ($i = \overline{1,5}$)

3. Результати числових розрахунків

Наведемо результати числового експерименту для фільтра, обмеженого поверхнями:

$$f_1(x, y, z) = x - 1,25; f_2(x, y, z) = (x - 2,5466434)^2 + y^2 + z^2 - 0,1187841, f_3(x, y, z) = \\ = (x - 1,25)^2 + (y - 3,8471044)^2 + z^2 - 16,3627124; f_4(x, y, z) = (x - 1,25)^2 + z^2 + \\ + (y + 3,8471044)^2 + z^2 - 16,3627124; f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = [x(x - 2,5) + y^2 + z^2]^2 + \\ + 6,25y^2 - 36,4276695z^2.$$

Для такого фільтра характерна значна просторовість за-
 сипки, «монотонність звуження» в напрямку від входу до виходу фільтра (вибір
 саме такої форми «підказує» практика) та взаємна ортогональність граней уздовж
 ребер і в кутових точках (це суттєве для спрощення процедури побудови просторо-
 вого конформного відображення). На основі [7] побудовано розрахункову динамічну
 сітку в G_z : $\varphi(x, y, z) = \overline{\varphi}_i = \varphi_* + [(\varphi^* - \varphi_*)i]/n, i = \overline{0, n}, \psi(x, y, z) = \overline{\psi}_j = (Q_*j)/m,$
 $j = \overline{0, m}, \eta(x, y, z) = \overline{\eta}_k = (Q_*k)/l, k = \overline{0, l}$ для $\varphi_* = 0, \varphi^* = 8000, \kappa = 1, n = 30, m = 16,$
 $l = 16$ (параметри n, m і l вибирали з умови найбільшої подібності побудованої
 сітки до кубічної), знайдено фільтраційну витрату $Q = 0,651$, обчислено величини
 швидкості фільтрації $|v|$ та функцій $b_i(\varphi, \psi, \eta), d_i(\varphi, \psi, \eta)$ ($i = 1, 2$). При цьому
 нев'язки розрахованих конструкцій не перевищують 0,001.

На рис. 2 показано розподіл концентрації $c(\varphi, \psi_5, \eta_5, t)$ і $u(\varphi, \psi_5, \eta_5, t)$ вздовж лі-
 ній течії для $\varepsilon = 0,001; k = 1; \sigma(x, y, z) = \sigma_{ef} = 0,3; \alpha(\varphi, \psi, \eta, t) = \beta(\varphi, \psi, \eta, t) =$

$$= \frac{60}{t + 4,8} \exp\left(-\frac{\varphi^* + \varphi}{\varphi^*}\right); c_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 0,017 \exp(-\varphi^2); c_*(\psi, \eta, t) = 0,017; u_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 0.$$

Висновки. Запропоновано просторову математичну модель, що описує основні
 закономірності фільтрування забрудненої води та накопичення осаду у фільтрі й
 алгоритм розв'язання відповідної сингулярно збуреної задачі. Одержані формули

та графічні залежності між величинами за умов переваги конвективних і сорбційних складників відповідного процесу над дифузійними та десорбційними (що властиво переважній більшості фільтрувальних установок) є ефективні для проведення теоретичних досліджень, спрямованих на оптимізацію параметрів процесу фільтрування (часу захисної дії завантаження, розмірів фільтра тощо). Так, згідно результатів числового експерименту (див. рис. 2), для гранично допустимої концентрації на виході фільтра $c = c_{кр} = 0,0015$ г/л час його захисної дії дорівнює 7 год, що на 11 % більше, порівняно з відповідним часом для стандартного фільтра (наприклад, що має форму прямокутного паралелепіпеда або циліндра) таких же ж довжини й об'єму [11]. Таким чином задання форми фільтра відіграє суттєву роль у процесі фільтрування позаяк це може призвести як до збільшення (зменшення) параметрів фільтрування, так і до збільшення продуктивності його роботи загалом.

Література

- [1] Бомба, А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. — Київ: Наукова думка, 2007. — 308 с.
- [2] Бомба, А. Я. Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі / А. Я. Бомба // Укр. мат. журн. — 1982. — Т. 4, № 4. — С. 493-496.
- [3] Бомба, А. Я. Просторові нелінійні сингулярно збудені крайові задачі типу «конвекція-дифузія» / А. Я. Бомба, Ю. С. Климюк, В. В. Скопецький // Доп. НАН України. — 2007. — № 8. — С. 37-44.
- [4] Венецианов, Е. В. Динамика сорбции из жидких сред / Е. В. Венецианов, Р. Н. Рубинштейн. — Москва: Наука, 1983. — 237 с.
- [5] Веригин, Н. Н. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах / Н. Н. Веригин, Б. С. Шершук // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). — Москва: Наука, 1967. — С. 237-313.
- [6] Жуковицкий, А. А. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала / А. А. Жуковицкий, Я. Л. Забежинский, А. Н. Тихонов // Журн. физ. химии. — 1945. — Т. 19, вып. 6. — С. 253-261.
- [7] Климюк, Ю. С. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні / Ю. С. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. — 2008. — Вип. 5 (14). — С. 104-143.
- [8] Мельцер, В. З. Фильтровальные сооружения в коммунальном водоснабжении / В. З. Мельцер. — Москва: Стройиздат, 1995. — 176 с.
- [9] Минц, Д. М. Теоретические основы технологии очистки воды / Д. М. Минц. — Москва: Стройиздат, 1964. — 156 с.
- [10] Олійник, О. Я. Деякі результати теоретичних досліджень процесів масообміну в пористих середовищах / О. Я. Олійник, Ю. І. Калугін // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідраліки. — 2005. — Вип. 5 — С. 100-112.
- [11] Орлов, В. О. Водоочисні фільтри із зернистою засипкою / В. О. Орлов. — Рівне: НУВГП, 2005. — 163 с.
- [12] Поляков, В. Л. О фильтровании суспензий при заданном напоре / В. Л. Поляков // Докл. НАН Украины. — 2005. — № 4. — С. 48-54.
- [13] Смирнов, А. Д. Сорбционная очистка воды / А. Д. Смирнов. — Ленинград: Химия, 1982. — 166 с.
- [14] Шехтман, Ю. М. Фильтрация малоконцентрированных суспензий / Ю. М. Шехтман. — Москва: Изд-во АН СССР, 1961. — 212 с.
- [15] Duarte, A. V. C. The CSD domain decomposition method applied to convection-diffusion problems / A. V. C. Duarte // National Laboratory for Scientific Computation. — Rua Getulio Vargas 333, Quitandinha, Petropolis, RJ, CEP, 25651-070, Brazil, 2001. — P. 301-312.

- [16] Mackrle, V. The theory of rapid Filtration / V. Mackrle // International Water Supply Congress. — Barselona, 1966. — 32 p.
- [17] Shi, Yin-Tzen Modified streamline diffusion schemes for convection-diffusion problems / Yin-Tzen Shi, Howard C. Elman // Interdisciplinary Applied Mathematics Program. — University of Maryland, USE, 1999. — P. 16.

Numeral asymptotic approach of the solution of spatial modelling problems of filtration process

Andrii Bomba, Juryi Klymiuk, Andrii Safonyk, Victor Sivak

The special generalization of Minc mathematical model for a «rapid filter» with porous loading, having a form of curvilinear parallelepiped is proposed. The algorithm of the numeral-asymptotic approximate solution of the corresponding model problem, which is described by a system of non-linear singular perturbed differential equalizations of the type «convection-diffusion-mass exchange» for a curvilinear parallelepiped, bounded by four surfaces of flow and two equipotential surfaces is obtained. These correlations are effective in implementation of the parameters of the filtration process, namely — time of protective action of load, sizes of filter etc. and also for theoretical researches in the cases of prevailing convection and sorption components of the corresponding process to compare with diffusion and adsorption processes, that take place in a majority of filtration devices. On this basis the corresponding computer experiment, the results of which are confirmed by the known fact that the effectiveness of filter work depends substantially on the choice of its form, was carried out.

Численно-асимптотическое приближение решения пространственных модельных задач процесса фильтрации

Андрей Бомба, Юрий Климюк, Андрей Сафоник, Виктор Сивак

В работе предложено пространственное обобщение математической модели Минца для «быстрого фильтра» с пористой загрузкой, имеющего форму криволинейного параллелепипеда. Получен алгоритм численно-асимптотического приближения решения соответствующей модельной задачи, которая описывается системой нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений типа «конвекция-диффузия-массообмен» для криволинейного параллелепипеда, ограниченного четырьмя поверхностями течения и двумя эквипотенциальными поверхностями. Полученные соотношения являются эффективными для проведения оптимизации параметров процесса фильтрации, в частности, времени защитного действия загрузки, размеров фильтра и т. п., а также теоретических исследований в случаях преобладания конвективных и сорбционных составных соответствующего процесса над диффузными и десорбционными, что имеет место в подавляющем большинстве фильтрующих установок. На этом основании проведен соответствующий компьютерный эксперимент, результаты которого подтверждают существенную зависимость производительности работы фильтра от выбора его формы.

Представлено профессором С. Чаплею

Отримано 6.05.09