

## Задача типу Стефана для циліндричної області

Віктор Ляшенко<sup>1</sup>, Олена Кобильська<sup>2</sup>

<sup>1</sup> к. ф.-м. н., Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, вул. Першотравнева, 20, Кременчук, e-mail: соноп-в@yandex.ru

<sup>2</sup> Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, вул. Першотравнева, 20, Кременчук, e-mail: leca91@yandex.ru

*Процес термічної обробки рухомого стрижня моделюємо нелінійною крайовою задачею теплопровідності для рухомої циліндричної області з внутрішнім джерелом тепла. Один із геометричних розмірів області є змінна величина, значення якої зменшується від деякої сталої до нуля. Запропоновано метод розв'язування сформульованої задачі Стефана, який полягає у застосуванні інтегральних перетворень і числових методів Рунге та Ньютона розв'язування диференціальних рівнянь. Сформульовані та доведені теореми існування єдиного розв'язку різницевої задачі та зроблено оцінку її збіжності до розв'язку крайової задачі. На основі отриманого розв'язку крайової задачі визначені умови, за яких температурне поле в області зі змінними межами буде stále упродовж процесу нагрівання. Проведені розрахунки розподілів температури.*

**Ключові слова:** математична модель, нелінійна крайова задача, задача типу Стефана, методи Рунге й Ньютона, температурний розподіл.

**Вступ.** У порошковій металургії, однією із технологічних операцій виробництва стрижнів і дроту з тугоплавких металів, наприклад вольфраму, є операція ротаційного кування [1]. Перед цією операцією стрижень завдовжки  $L$  спочатку розігрівають електричним струмом до технологічної температури  $T_l$ , а потім подають у машину для кування зі швидкістю  $v(t) \neq 0$ . При цьому до одного кінця стрижня підключають нерухомий провідник струму, а до іншого — рухомий. Із технологічної точки зору необхідно, щоб під час операції кування упродовж часу  $0 < t < t_0$  довжина стрижня змінювалася згідно закону  $\xi(t) = L - v(t)t$ , тоді як температура повинна залишатися сталою і не меншою, ніж  $T_l$ . Суть керування температурним полем полягає у підтриманні у зоні нагрівання стрижня сталого розподілу температури, тоді як довжина у зоні нагрівання зменшується та прямує до нуля. Для підтримування сталого значення температури необхідно керувати потужністю діючого у стрижні джерела тепла, а саме, силою струму  $I(t)$ .

До теперішнього часу як у вітчизняній, так і у зарубіжній науковій літературі, математичні моделі процесу термічної обробки такого типу не розглядали. У математичній моделі, що пропонується, стрижень розглядаємо у вигляді скінченної циліндричної області з ізотропними фізико-механічними характеристиками.

### 1. Мета роботи

Метою роботи є розв'язування оберненої задачі теплопровідності та визначення параметра керування  $I(t)$  температурним полем у циліндричній області

$\Omega \times t: \{0 < z < \xi(t), 0 < r < r_0, 0 < t < t_0\}$  за умови сталого розподілу температури, якщо один із розмірів області  $\xi(t) = L - v(t)t$  є змінна величина, що прямує до нуля упродовж часу  $0 < t < t_0$ .

## 2. Матеріали та результати дослідження

Для визначення температурного поля циліндричної області розглядаємо задачу теплопровідності в області  $\Omega \times t: \{0 < z < \xi(t), 0 < r < r_0, 0 < t < t_0\}$

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - v(t) c \rho_n \frac{\partial T}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -W(t, T), \quad (1)$$

$$T(r, z, 0) = T_l, \quad T(r, 0, t) = T(r, \xi(t), t) = T_l, \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T(r_0, z, t)}{\partial r} = -\alpha(T - T_c) - \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4), \quad \frac{\partial T(0, z, t)}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

де  $W(T, t) = \frac{I(t)^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}$  — густина діючих джерел тепла,  $\lambda, c, \varepsilon$  — тепло-

фізичні параметри циліндра,  $T_c$  — температура навколишнього середовища,  $\sigma$  — стала Стефана-Больцмана. Час  $t_0$  визначаємо з умови  $L - v(t)t = 0$ ,  $v(t)$  — неперервна додатна функція.

Задача полягає у визначенні функції  $T(r, z, t)$  при  $0 < t < t_0$  у замкненій області  $\Omega$ , що задовольняє умовам (2), (3). Оскільки область  $\Omega$  змінюється в часі, а її температурне поле повинно бути стає, то джерела тепла  $W(T, t)$  — змінні. Потрібно визначити початкове значення параметра  $I(t)$ , яке б задовольнило першу з умов (2). Для цього необхідно розв'язати обернену до (1)-(3) задачу за умови, що  $\partial T / \partial t = 0, v(t) = 0$ . Розглянемо відповідну до (1)-(3) стаціонарну задачу і визначимо значення параметра  $I_0$ , за якого нерухомий циліндр нагрівається до температури  $T_l$ . Потім розв'язуємо обернену задачу для  $0 < t < t_0$  і визначаємо значення  $I(t)$ , необхідне для підтримання температури  $T_l$ , якщо висота циліндра прямує до нуля.

Знайдемо температурний розподіл уздовж координати  $z$ . Застосувавши до рівняння (1) оператор усереднення [2]

$$u(z, t) = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} T(r, z, t) r dr,$$

за врахування умов на границі (3) отримаємо таку крайову задачу в області  $\Omega_1 \times t: \{0 < z < \xi(t), 0 < t < t_0\}$

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v(t) c \rho_n \frac{\partial u}{\partial z} + \theta u - \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} u^4 + \chi_1 = c \rho_n \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (4)$$

$$u(z, 0) = T_l, \quad u(0, t) = u(\xi(t), t) = T_l, \quad (5)$$

де  $\theta = \frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4} - \frac{2\alpha}{r_0}$ ,  $\chi_1 = \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2\alpha}{r_0} T_c + \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} T_c^4$ .

Прийемо у рівнянні (4), що  $v(t) = 0$ ,  $\partial u / \partial t = 0$ , і розглянемо нелінійну крайову задачу для звичайного диференціального рівняння

$$\lambda \frac{d^2 u}{dz^2} = F(u), \quad (6)$$

$$u(0) = u(l) = T_l, \quad (7)$$

де  $F(u) = - \left( u\theta + \chi_1 - \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} u^4 \right)$ .

Її розв'язок отримаємо методом Ньютона [3] у вигляді  $F(u) \approx F(u_n(z)) + \frac{dF(u_n(z))}{du} (u - u_n(z))$ .

Шукаємо наближення  $u_{n+1}(z)$  до розв'язку (6) як розв'язок такої крайової задачі

$$\lambda u_{n+1}''(z) - F(u_n(z)) - \frac{dF(u_n(z))}{du} (u_{n+1} - u_n(z)) = 0, \quad (8)$$

$$u_{n+1}(0) - T_l = 0, \quad u_{n+1}(l) - T_l = 0. \quad (9)$$

Розглянемо сіткову апроксимацію задачі (8), (9)

$$\lambda \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} - F(u_k) = 0, \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$u_0 - T_l = 0, \quad u_l - T_l = 0,$$

де  $h = L/N$ ,  $u_k$  — наближення до значень  $u(kh)$ . В околі  $n$ -ого наближення справджуються співвідношення  $F(u_k) = F(u_k^n) + F'(u_k^n)(u_k - u_k^n)$ .

Наступне наближення шукаємо з такої системи рівнянь

$$\lambda \frac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{h^2} - F(u_k^n) + F'(u_k^n)(u_k^{n+1} - u_k^n) = 0, \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$u_0^{n+1} - T_l = 0, \quad u_N^{n+1} - T_l = 0.$$

Початкове наближене значення параметра  $I_0$  отримаємо з розв'язку спрощеної задачі Коші (4), (5), знехтувавши в останній перерозподілом тепла вздовж осі циліндра за рахунок теплопровідності та втратами тепла з поверхні внаслідок випромінювання і поклавши  $v(t) = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ,

$$c\rho_n \frac{\partial u}{\partial t} = \theta u + \chi, \quad 0 < t < t_1, \quad (10)$$

$$u(0) = T_0, \quad (11)$$

де  $\chi = \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2\alpha T_c}{r_0}$ .

Розв'язок задачі Коші (10), (11) має вигляд

$$u(t) = -\frac{\chi}{\theta} + \left(T_0 + \frac{\chi}{\theta}\right) e^{\frac{\theta}{c\rho_n} t}. \quad (12)$$

На основі формули (12) визначаємо початкове значення параметра  $I_0$ . Далі, скориставшись початковим значенням параметра  $I_0$ , для  $0 < t < t_0$  розв'язуємо числовим методом обернену задачу до задачі (4), (5) і визначаємо значення параметра  $I(t)$  (рис. 1), необхідного для підтримання температури  $T_l$  у разі прямування координати  $z$  до нуля.

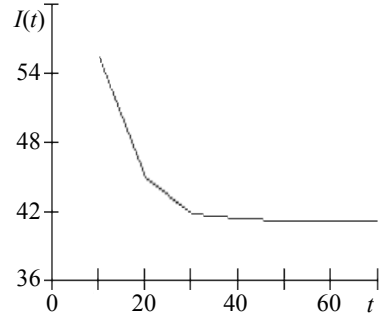


Рис. 1. Залежність величини  $I(t)$  від часу для  $\xi(t) \rightarrow 0$

У задачі (4), (5) замінимо стале значення параметра  $I$  знайденою функцією  $I(t)$ . Отримаємо задачу в області  $\Omega_1 \times t : \{0 < z < \xi(t), 0 < t < t_0\}$

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v(t)c\rho_n \frac{\partial u}{\partial z} + c\rho_n \frac{\partial u}{\partial t} = F(t, u), \quad (13)$$

$$u(z, 0) = T_l, \quad (14)$$

$$u(0, t) = u(\xi(t), t) = T_l, \quad (15)$$

$$\text{де } F(t, u) = -\left[ u \left( \frac{I(t)^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4} - \frac{2\alpha}{r_0} \right) + \frac{I(t)^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2\alpha}{r_0} T_c - \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} (u^4 - T_c^4) \right].$$

Розв'язок задачі (13), (15) шукаємо методом Рунге [4] — дискретизації за часом. Для цього введемо в області  $\Omega_1 \times t : \{0 < z < \xi(t), 0 < t < t_0\}$  рівномірну сітку за часом  $\varpi_{\Delta\tau} = \{\tau_j = j\Delta\tau, j = \overline{0, j_0}\}$ . На кожному часовому кроці підставимо замість  $I(t)$  відповідне значення  $I(t_j)$  та отримаємо напівдискретний аналог задачі (13), (15) у вигляді системи диференціально-різницевих крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\lambda \frac{d^2 u^j}{dz^2} - v(t_j)c\rho_n \frac{du^j}{dz} + \frac{c\rho_n}{\tau} u^j = F_1(u), \quad (16)$$

$$0 < z < \xi(t_j) = L - v(t_j)t_j = \text{const}, \quad u^0(z) = T_l,$$

$$u(0) = u(\xi(t_j)) = T_l, \quad F_1(u) = F_1(u^j) + \frac{1}{\tau} u^{j-1}. \quad (17)$$

Розв'язок задач (16), (17) шукаємо скінченно-різницевим методом [5]. Введемо рівномірну сітку  $\varpi = \omega \cup \partial\omega$ . Поставимо у відповідність задачі (16), (17) квазілінійну різницеву задачу. Розглянемо схему

$$\Delta y = F, \quad z \in \omega, \quad (18)$$

$$y_0 = y_n = T_l, \quad z \in \partial\omega, \quad (19)$$

$$\text{де } \Delta y = -(a_1 y_{\bar{z}})_z + a_2 y_{\bar{z}}.$$

*Теорема 1.* Нехай для задачі (17), (18) справджується умова:  $dF_1(u)/du \leq 0$ , де  $F_1(u)$  — достатньо гладка функція. Тоді задача (17), (18) має єдиний розв’язок.

*Доведення.* Нехай існує два розв’язки  $y_1, y_2$ . Для величини  $v(z) = y_2(z) - y_1(z)$  отримуємо задачу

$$\Delta v(z) = \frac{dF_1(\bar{u})}{du} v(z), \quad v(z) = 0,$$

$$\text{де } \frac{dF_1(\bar{u})}{du} = \int_0^1 \frac{dF_1(u_t)}{du} dt, \quad y_t(z) = ty_2(z) - (1-t)y_1(z).$$

На основі принципу максимуму для сіткової задачі (18), (19) за умови  $dF_1(u)/du \leq 0$  отримаємо  $v(z) = 0, z \in \omega$ . Отже існує єдиний розв’язок різницевої задачі (18), (19).

Для визначення похибки  $Z(z) = y(z) - u(z), z \in \omega$ , різницевої задачі маємо

$$\Delta Z - \frac{dF_1(\bar{y})}{dy} Z = -\psi, \quad z \in \omega, \quad (20)$$

$$Z(0) = Z(\xi(t_j)) = T_l, \quad z \in \partial\omega, \quad (21)$$

$$\text{де } \frac{dF_1(\bar{y})}{dy} = \int_0^1 \frac{dF_1(y_t)}{dy} dt, \quad y_t(z) = ty_2(z) - (1-t)y_1(z), \quad \psi(z) = \Lambda u - F_1(u).$$

для достатньо гладких коефіцієнтів отримаємо оцінку  $\psi(z) = O(|h|^2)$  [5].

*Теорема 2.* Якщо  $z \in \omega, \omega(z) \geq 0, z \in \partial\omega$ , то за виконання умови  $dF_1(u)/du \leq 0$  у рівномірній нормі для розв’язку лінійної задачі (20), (21) справедлива оцінка  $\|Z(z)\|_{C(\omega)} \leq M \|\psi(z)\|_{C(\omega)}$ , де  $M = \|\omega(z)\|_{C(\omega)} \Lambda \omega \geq 1$ . Вона встановлює збіжність нелінійної різницевої схеми (20), (21) із другим порядком точності.

На рис. 2 зображені температурні розподіли, знайдені на основі розв’язку задачі (18), (19), для  $t = 50$  с. Крива 1 описує розподіл температури, отриманий із використанням параметра  $I(t)$ , і це дозволяє стабільно підтримувати температуру  $T_l = 1000$  К у кінці зони нагрівання, а крива 2 описує розподіл температури для сталого значення параметра  $I_0$ , при цьому температура постійно зростає. Із рис. 2 видно, що змінне значення параметра  $I(t)$  дозволяє підтримувати

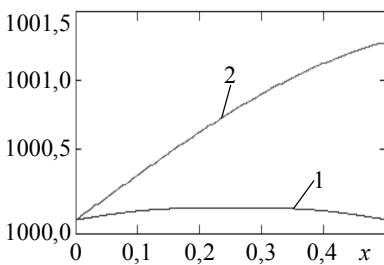


Рис. 2. Розв’язок задачі (13), (14) для змінного  $I(t)$  (крива 1)

і сталого  $I$  (крива 2) значень параметра

нагрівання. Крива 2 описує розподіл температури, отриманий із використанням параметра  $I(t)$ , за якого температура  $T_l = 1000$  К у кінці зони нагрівання є постійною, а крива 2 описує розподіл температури за сталого значення параметра  $I_0$ , при цьому температура постійно зростає. Бачимо (див. рис. 2), що змінне значення параметра  $I(t)$  дозволяє підтримувати стає значення температури за зменшення зони нагрівання.

**Висновки.** Розв'язані пряма й обернена задачі теплопровідності. Побудовано графік зміни у часі значення параметра керування температурним полем (рис. 1). Проведені числові розрахунки температурних розподілів рухомої циліндричної області з діючим у ній джерелом тепла. Результати, отримані у цій роботі, можна використати для проектування систем автоматичного керування та контролю розподілів температури.

### Література

- [1] Крупин, А. В. Пластическая деформация тугоплавких металлов / А. В. Крупин, В. Я. Соловьев. — Москва: Металлургия, 1971. — 352 с.
- [2] Ляшенко, В. П. Моделирование одной обратной задачи Стефана / В. П. Ляшенко, О. Б. Кобильська // Вісник Харківського національного університету. — 2009. — Вип. 11, № 847. — С. 206-212.
- [3] Березовський, А. А. К определению оптимальных параметров устройств электроконтактного нагрева. Методы и средства моделирования физических полей / А. А. Березовський, В. П. Ляшенко. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. — С. 43-48.
- [4] Мартисон, Л. К. Дифференциальные уравнения математической физики / Л. К. Мартисон, Ю. И. Малов. — Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 368 с.
- [5] Самарский, А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. — Москва: Едиториал УССР, 2003. — 784 с.

## Stefan type problem for cylindrical domain

Victor Lyashenko, Elena Kobilskaya

*The process of heat treatment of a mobile shank is modeled the nonlinear regional problem for the equation of heat conductivity in a cylindrical area with the internal source of heat. One of geometrical sizes of area is variable quantity with value diminishes from some constant to zero. The method of solution stated problems is offered. It consists in use of integral transformations and numerical methods of Rote and Newton for solution of differential equations. Theorems of existence of the unique solution difference problems are formulated and proved. The estimated convergence of it's to the solution of boundary problem is made. On basis of the received solution of boundary problem are defined conditions at which the temperature field in an area with trailing boundaries will be constant during the process of heating. The calculations of distributing of temperature are realized.*

## Задача типа Стефана для цилиндрической области

Виктор Ляшенко, Елена Кобыльская

*Процесс термической обработки движущегося стержня моделируем нелинейной краевой задачей для уравнения теплопроводности в цилиндрической области с внутренним источником тепла. Один из геометрических размеров области является переменной величиной, значение которой уменьшается от некоторой постоянной до нуля. Предложен метод решения сформулированной задачи типа Стефана, состоящий в применении интегральных преобразований и численных методов Рунге и Ньютона решения дифференциальных уравнений. Сформулированы и доказаны теоремы существования и единственности решения разностной задачи, сделана оценка ее сходимости к решению краевой задачи. На основе решения краевой задачи определены условия, при которых температурное поле в области с движущимися границами будет постоянным на протяжении процесса нагревания. Проведены расчеты распределений температуры.*

Представлено професором Б. Герою

Отримано 25.03.10