

## Ідентифікація межових теплофізичних параметрів циліндра за нестационарних умов теплообміну з довкіллям

Роман Швець<sup>1</sup>, Олесь Яцків<sup>2</sup>, Богдан Бобик<sup>2</sup>

<sup>1</sup> к. ф.-м. н., Інститут прикладних проблеми механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

<sup>2</sup> Інститут прикладних проблеми механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

*Розглянуто єдиний підхід до розв'язування як прямих задач термомпружності для циліндричних тіл із тонкими приповерхневими шарами, так і обернених задач межової параметричної ідентифікації за заданою на поверхні тіла температурою. Шукані зведені теплофізичні параметри циліндра з приповерхневим шаром визначаються з отриманого для температури поверхні інтегро-диференційного рівняння, в яке вони входять у явному вигляді. Досліджено нестійкість ідентифікації залежно від похибок задання вхідних даних. У цьому разі здійснюється уточнення знайдених з інтегро-диференційного рівняння параметрів шляхом перебору їх околу та визначення таких, для яких різниця температури поверхні циліндра, знайденої з прямої задачі, та вхідних даних буде мінімальна. Запропонований метод дає змогу визначати теплофізичні параметри в режимі «реального часу».*

**Ключові слова:** циліндр, приповерхневий шар, термомпружність, нестационарні граничні умови, междова параметрична ідентифікація, аналітично-числовий метод, інтегро-диференційне рівняння.

**Вступ.** Для ефективного керування перебігом технологічних процесів під час виготовлення елементів конструкцій і забезпечення їх надійної та довготривалої експлуатації необхідно розглядати дедалі повніший спектр супутніх фізико-механічних процесів і явищ, зокрема враховувати приповерхневі ефекти [1-3]. Властивості приповерхневих шарів конструктивних елементів переважно відрізняються від властивостей основного матеріалу, що можна пов'язати як з нанесенням спеціальних захисних покриттів, так і зі структурними змінами, які відбуваються в таких шарах за інтенсивної дії різноманітних фізичних факторів. Тому дослідження фізико-механічної поведінки елементів конструкцій вимагає адекватного математичного моделювання взаємодії полів різної природи за урахування реальної структури матеріалів, у тому числі наявності тонких приповерхневих неоднорідностей [1, 3-5]. Якість такого моделювання багато чим визначається інформативністю і точністю даних спостереження за об'єктами та процесами, за перебігу яких вони експлуатуються. Для задання характеристик і структури математичних моделей часто використовують непрямі вимірювання фізико-механічних параметрів і обробку їх результатів із застосуванням методів теорії обернених задач (ОЗ). Окрім того існує зв'язок між задачами оптимального підбору властивостей

елементів конструкцій, а також оптимального керування режимами їх експлуатації та ОЗ [6]. Тому вважають [7], що саме ОЗ повинні бути основою побудови й обґрунтованого використання математичних моделей, а також надання для них достовірної числової інформації. Однак, із математичної точки зору ОЗ є некоректні, зокрема, нестійкі до малих збурень вхідних даних [7-9]. Збільшення ж об'єму вхідної інформації часто лише посилює нестійкість розв'язків [8]. Тому залишається актуальною проблема розробки ефективних методів розв'язання таких задач [7, 10-12]. У зв'язку зі складністю, а часто і неможливістю побудови аналітичних розв'язків ОЗ, значного поширення набули аналітично-числові та числові схеми розв'язування. Особливістю аналітично-числових підходів є поєднання переваг аналітичних методів, які дозволяють глибше проникнути у фізику явищ, здійснювати граничні переходи та розглядати асимптотичні режими, з високою універсальністю і простотою числових методів.

Одним із найпопулярніших методів розв'язування некоректних задач, у тому числі ОЗ, є метод регуляризації Тихонова [9]. Однак він пов'язаний з труднощами відшукування параметра регуляризації [2, 11] і з яроподібною поведінкою регуляризованих функціоналів [11]. Для певних класів ОЗ можна використовувати розв'язки прямих задач [11, 13] із пошуком їх мінімального відхилення від експериментально вимірених вхідних даних на певних часових проміжках [11]. Для ОЗ параметричної ідентифікації такий підхід разом із визначенням параметрів дає змогу знаходити, так звані, інтервали невизначеності, в межах яких неможливо провести ідентифікацію цих параметрів, бо для будь-яких їх значень із такого інтервалу відхилення розв'язків прямої задачі від даних вимірювань не перевищують задану величину, яка є критерієм для підбору параметрів під час їх визначення.

У статті на прикладі нагрівання довкіллям довгого циліндра з тонким приповерхневим шаром проілюстровано застосування розробленого загального аналітично-числового підходу до розв'язування як прямих неklasичних крайових задач термопружності з нестационарними граничними умовами, якими враховується вплив приповерхневого шару на теплову поведінку циліндра, так і обернених задач визначення межових теплофізичних параметрів [14, 15]. Межова параметрична ідентифікація здійснюється на основі запропонованої структури розв'язку прямої задачі, а також інтегро-диференційного рівняння, до якого зводиться пряма задача, з подальшим використанням сплайн-апроксимацій. Перевагою методів, які використовують сплайн-апроксимації, є їхня стійкість до локальних збурень, хороша збіжність і точність розв'язків, що отримуються, а також простота та зручність реалізації побудованих алгоритмів [16].

## 1. Формулювання та розв'язування прямої задачі

Розглянемо довгий суцільний ізотропний циліндр радіуса  $r_1$ , що нагрівається середовищем сталої температури  $T_c$ . Тонкий приповерхневий шар циліндра має неоднакові з основним матеріалом теплофізичні властивості (див. рис. 1). Поширене моделювання приповерхневих і міжфазних неоднорідностей за допомогою тонких оболонок [3-5]. Запропонований Я. С. Підстригачем підхід [3], який полягає

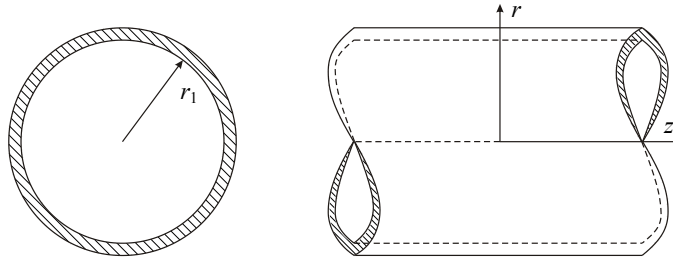


Рис. 1. Схема довгого циліндра з тонким приповерхневим шаром і його поперечний переріз

у спрямуванні товщини оболонки до нуля за одночасного усереднення фізико-механічних характеристик, вилучає з розгляду оболонку як фізичний об'єкт і приводить до задач із узагальненими неklasичними гранично-контактними умовами. Задаватимемо такими умовами осесиметричний теплообмін циліндра з довкіллям через тонкий приповерхневий шар [3].

Запишемо рівняння теплопровідності й узагальнені граничні умови в циліндричній системі координат для безрозмірних величин [14]

$$\Delta T(r, \tau) = \alpha^2 \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau}, \quad 0 \leq r < r_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} + BT(r, \tau) + H \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \quad r = r_1. \quad (2)$$

Тут  $T(r, \tau)$  — температура циліндра,  $\alpha^{-1}$  — коефіцієнт теплопровідності,  $\Delta$  — оператор Лапласа в циліндричній системі координат,  $B, H$  — відповідно зведені коефіцієнти тепловіддачі з поверхні циліндра й об'ємної теплоємності циліндра та приповерхневого шару. Граничні умови (2) нестационарні, вони дозволяють враховувати кінетику процесу теплопровідності на поверхні циліндра.

Задаємо початкову умову, умови обмеженості й осесиметрії

$$T(r, 0) = T^0, \quad \tau = 0, \quad (3)$$

$$T(r, \tau) < \infty, \quad \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} = 0, \quad r = 0. \quad (4)$$

*Розв'язування прямої задачі.* Для розв'язування задачі (1)-(4) використаємо метод розвинення розв'язків неklasичних крайових задач у ряди Фур'є за власними функціями задач із класичними граничними умовами [14, 17]. Розщеплюємо умову (2) за допомогою введення межої зв'язувальної функції  $\Phi(\tau)$  [14]

$$(a) \quad BT(r_1, \tau) = \Phi(\tau), \quad (b) \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_1} + H \left. \frac{\partial T}{\partial \tau} \right|_{r=r_1} = -\Phi(\tau). \quad (5)$$

Крайова задача (1), (3), (4), (5a) є класична. Застосувавши схему методу відокремлення змінних, будемо структуру розв'язку вихідної задачі (1)-(4), що

містить невідому зв'язувальну функцію  $\Phi(\tau)$ . Для її визначення залишається невикористана умова (5б). Ця структура розв'язку містить розвинення в ряд Фур'є за власними функціями класичної задачі з граничною умовою першого роду

$$T(r, \tau) = \frac{r^2}{r_1^2} \frac{\Phi(\tau)}{B} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\tau) \frac{J_0(\alpha \mu_n r)}{\alpha \mu_n r_1 J_1(\alpha \mu_n r_1)}. \quad (6)$$

Тут  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  — функції Бесселя,  $\mu_n$  — нулі функції  $J_0(x)$ , а функція часу  $E_n(\tau)$  залежить від  $\Phi(\tau)$  і має вигляд

$$E_n(\tau) = T^0 e^{-\mu_n^2 \tau} - \frac{\Phi(\tau)}{B} \frac{(\alpha \mu_n r_1)^2 - 4}{(\alpha \mu_n r_1)^2} + \frac{2\mu_n^2}{B} \int_0^{\tau} \Phi(t) e^{-\mu_n^2(\tau-t)} dt.$$

Зв'язувальну функцію  $\Phi(\tau)$ , якою визначається температура поверхні циліндра, знаходимо, підставивши (6) у невикористану умову (5б). У підсумку отримаємо інтегро-диференційне рівняння з інтегральним оператором типу Вольтерра

$$\frac{H}{B} \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \tau} + \left(1 + \frac{2}{r_1 B}\right) \Phi(\tau) = \frac{2}{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\tau). \quad (7)$$

Інтегро-диференційне рівняння (7) розв'язуємо, апроксимуючи функцію  $\Phi(\tau)$  на рівних часових проміжках кубічними сплайнами [16], для визначення коефіцієнтів яких, окрім рівняння (7), використовуємо умови сумісності сплайнів у внутрішніх вузлах розбиття часового інтервалу. Оптимальність розбиття часового інтервалу та вибір кількості членів ряду в (6) і (7) для забезпечення задовільної точності обчислення температури досліджено у праці [14].

За знайденим температурним полем визначаємо напруження в циліндрі. Механічним впливом приповерхневого шару на напружений стан нехтуємо. Поверхню циліндра вважаємо ненавантаженою

$$\sigma_{rr} = 0, \quad r = r_1. \quad (8)$$

Для поперечного перерізу циліндра виконується умова рівноваги

$$\int_0^{r_1} r \sigma_{zz} dr = 0. \quad (9)$$

У випадку осесиметричної задачі колові переміщення дорівнюють нулю. Інші компоненти переміщень подаємо у вигляді Папковича-Нойбера [3]

$$u_r = \Lambda_r + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial r} (\Lambda - r\Lambda_r - z\Lambda_z),$$

$$u_z = \Lambda_z + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} (\Lambda - r\Lambda_r - z\Lambda_z).$$

Для визначення температурних напружень використовуємо співвідношення Дюгамеля-Неймана [3, 4]. У результаті отримуємо вирази для напружень

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2\mu}{4(1-\nu)} \left[ -\frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \right], & \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2\mu}{4(1-\nu)} \left[ -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial r^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \right], \\ \sigma_{zz} &= \frac{2\mu}{4(1-\nu)} \left[ -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \frac{2}{r_1} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут  $\lambda, \mu$  — сталі Ляме,  $\nu$  — коефіцієнт Пуассона,  $\Lambda(r, \tau)$  має вигляд

$$\begin{aligned} \Lambda(r, \tau) &= 4(1+\nu)\alpha_T \left\{ \frac{r^4}{16r_1^2} \frac{\Phi(\tau)}{B} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{\Phi(\tau)}{B} \frac{(\alpha\mu_n r_1)^2 - 4}{(\alpha\mu_n r_1)^2} - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. -T^0 e^{-\mu_n^2 \tau} \right) \frac{1}{(\alpha\mu_n)^3 r_1} - \frac{1}{\alpha^2 \mu_n r_1} \int_0^{\tau} \frac{\Phi(t)}{B} e^{-\mu_n^2(\tau-t)} dt \right] \frac{J_0(\alpha\mu_n r)}{J_1(\alpha\mu_n r_1)} \right\}, \end{aligned}$$

де  $\alpha_T$  — коефіцієнт лінійного температурного розширення циліндра.

Таким чином вирази (6), (10) є розв'язки сформульованої задачі термопружності для довгого суцільного циліндра з тонким приповерхневим шаром, який нагрівається довкіллям. Межова зв'язувальна функція  $\Phi(\tau)$ , що входить у вирази для температури і напружень, визначається з інтегро-диференційного рівняння (7). Отримані розв'язки прямої задачі й інтегро-диференційне рівняння будуть використані під час ідентифікації теплофізичних параметрів  $B$  й  $H$ .

## 2. Формулювання оберненої задачі

Нехай задано температуру поверхні циліндра  $T(r_1, \tau)$ , однак невідомий один із коефіцієнтів  $B$  чи  $H$  нестационарної межової умови (2), яка враховує вплив тонкого приповерхневого шару на нагрівання циліндра. Розподіл температури в циліндрі описується рівнянням (1) за умов (2)-(4). Напружений стан визначається зі співвідношень (10), які вже задовольняють умови (8), (9). Задання температури поверхні  $T(r_1, \tau)$  дає нам умови перевизначення для сформульованої задачі ідентифікації невідомого коефіцієнта межової умови. Такі задачі належать до межових ОЗ.

Для імітації експериментальних вимірювань вхідних даних, необхідних для розв'язування ОЗ, часто використовують комп'ютерну симуляцію, яка полягає у розв'язуванні прямої задачі за відомих тих чи інших значень параметрів і використанні отриманих розв'язків, як даних вимірювань. Однак реальні вимірювання завжди здійснюються з певною похибкою, в межах точності вимірювальних приладів. Така похибка називається неусувною. Тому для моделювання цих похибок вимірювань застосовують малі випадкові збурення отриманих розв'язків прямих задач.

Оскільки ОЗ є нестійкі щодо малих збурень вхідних даних [7-9], то визначені параметри можуть значно відрізнятись від їх точних значень. Тому

необхідно використовувати ефективні методи з регуляризації сформульованих ОЗ [7, 9], або алгоритми покращення їх розв'язків [11]. У цьому дослідженні для покращення точності ідентифікації здійснюватимемо перебір значень параметрів в околі тих, які є розв'язками сформульованої ОЗ, і, розв'язуючи для них пряму задачу, порівнюватимемо знайдену температуру поверхні з вхідними даними. Значення параметрів  $B$  чи  $H$ , для яких розв'язок прямої задачі мінімально відрізнятиметься від вхідних даних, вважатимемо за ідентифіковані межові теплофізичні параметри.

### 3. Ідентифікація межових теплофізичних параметрів

В інтегро-диференціальне рівняння (7) в явному вигляді входять теплофізичні параметри  $B$  й  $H$ , що дає змогу визначати їх за відомою температурою поверхні циліндра. Для симуляції експериментальних вимірювань розв'язуємо пряму задачу (1)-(4), вважаючи теплофізичні параметри відомими. Знайдені значення температури поверхні циліндра у вибраних  $N$  часових точках збурюємо випадковими відхиленнями, які в середньому становлять 2 % — рис. 2а. Отримані збурені дані використовуємо для розв'язування ОЗ межевої параметричної ідентифікації. Згладжуємо ці дані, інтерполюємо кубічними сплайнами [16] і визначаємо з рівняння (7) теплофізичні параметри. Однак задачі ідентифікації чутливі до малих збурень вхідних даних. Тому знайдені параметри можуть значно відрізнятися від їх точних значень. Для покращення точності ідентифікації перебираємо значення параметрів  $B_k, H_k$  в околі тих, що визначили з рівняння (7)

$$B_k = B_p \pm \delta_B, \quad H_k = H_p \pm \delta_H,$$

де  $B_p, H_p$  — визначені з рівняння (7) параметри;  $\delta_B, \delta_H$  — крок перебору значень параметрів.

Розв'язуючи для кожного з  $B_k$  чи  $H_k$  пряму задачу, порівнюємо температуру поверхні циліндра з вхідними даними. Значення параметрів  $B_{\min}$  чи  $H_{\min}$ ,

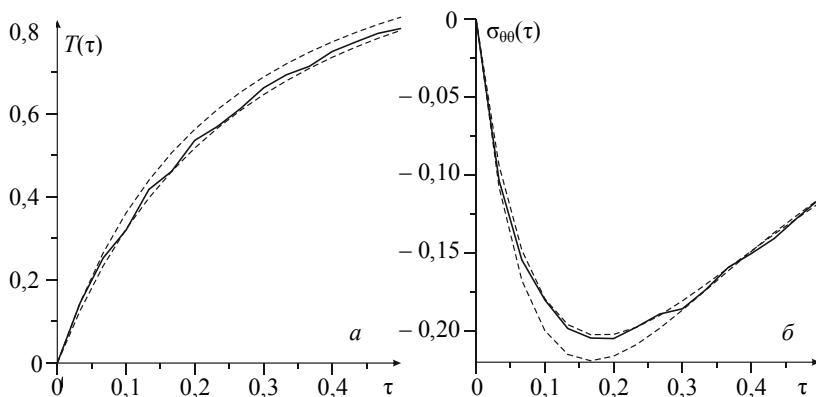


Рис. 2. (а) Вхідні дані для задачі ідентифікації у вигляді збуреної температури поверхні циліндра; (б) поверхневі колові напруження, які відповідають збуреній температурі поверхні циліндра

для яких середнє квадратичне відхилення розв'язку прямої задачі від згладжених вхідних даних буде мінімальне, вважаємо розв'язками ОЗ межевої параметричної ідентифікації. Деякі результати визначення межових теплофізичних параметрів оформлено у вигляді табл. 1, 2.

Таблиця 1

Визначення межового параметра  $B$  з інтегро-диференційного рівняння за відомим параметром  $H$  та уточнення його значення за допомогою знаходження найменшого середнього відхилення температури від її згладжених заданих збурених значень

Значення відомого параметра $H$	Точні значення параметра $B_m$	Знайдені з рівняння (7) значення параметра $B_p$	Розв'язки ОЗ: $B_{\min}$ з мінімальним відхиленням температури	Похибка $B_p$ відносно точного значення $B_m$	Похибка $B_{\min}$ відносно точного значення $B_m$
0,5	0,5	0,45	0,510	9,0 %	2,00 %
	1,0	0,95	1,010	5,0 %	1,00 %
	2,0	1,53	2,027	23,0 %	1,35 %
2,5	0,5	0,11	0,610	77,0 %	22,00 %
	1,0	0,81	1,070	19,0 %	7,00 %
	2,0	2,08	2,034	4,3 %	1,70 %

Таблиця 2

Визначення межового параметра  $H$  з інтегро-диференційного рівняння за відомим параметром  $B$  й уточнення його значення за допомогою знаходження найменшого середнього відхилення температури від її згладжених заданих збурених значень

Значення відомого параметра $B$	Точні значення параметра $H_m$	Знайдені з рівняння (7) значення параметра $H_p$	Розв'язки ОЗ: $H_{\min}$ з мінімальним відхиленням температури	Похибка $H_p$ відносно точного значення $H$	Похибка $H_{\min}$ відносно точного значення $H$
0,5	0,5	0,22	0,470	56,0%	6,0 %
	1,0	0,95	0,960	5,0 %	4,0 %
	2,0	1,73	1,900	13,0 %	5,0 %
2,0	0,5	0,53	0,499	5,9%	0,2 %
	1,0	1,51	0,985	51,0 %	1,5 %
	2,0	1,89	1,970	5,2 %	1,5 %

Водночас фіксуємо ті значення параметрів, для яких температура поверхні циліндра в кожен із моментів часу відрізнятиметься від згладжених вхідних даних не більше, ніж на деяку наперед задану величину. Сукупність таких значень параметрів утворює інтервали, для яких будь-які значення параметрів даватимуть температуру поверхні в межах цієї заданої величини, тобто можуть забезпечувати режими нагрівання циліндра в певному, наперед заданому діапазоні — рис. 3-4. Найменші, темніші інтервали відповідають випадку відхилення обчисленої для знайдених параметрів температури поверхні не більше, ніж на 2 % від згладжених вхідних даних, середні, світліші інтервали — не більше, ніж на 5 %, а найдовші, штриховані — не більше, ніж на 10 %. Для прикладу на рис. 2

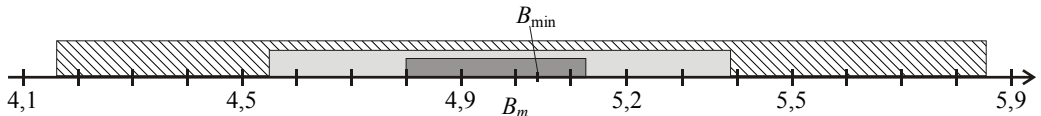


Рис. 3. Інтервали значень параметра  $B$ , для яких середнє відхилення температури поверхні від відповідних згладжених збурених вхідних даних не перевищуватиме 2, 5 та 10 % відповідно

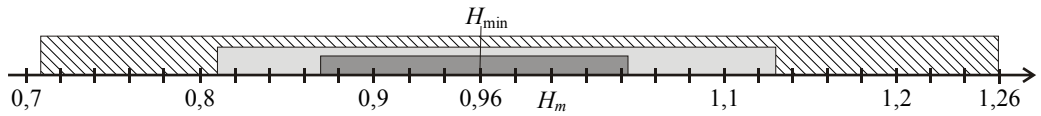


Рис. 4. Інтервали значень параметра  $H$ , для яких середнє відхилення температури поверхні від відповідних згладжених збурених вхідних даних не перевищуватиме 2, 5 та 10 % відповідно

пунктирними лініями наведено графіки зміни з часом температури поверхні циліндра та поверхневих колових напружень для значень параметра  $H$ , які є кінцями темнішого інтервалу, тобто для яких відхилення відповідних розв'язків прямих задач від згладжених вхідних даних становить 2 %. Значення температури та напружень, обчислені для решти значень параметрів  $H$  із зазначеного темнішого інтервалу на рис. 4, лежатимуть між наведеними пунктирними кривими. У табл. 3 наведено результати зміни відношення довжин інтервалів  $l_B$  й  $l_H$  для параметрів  $B$  і  $H$  до середніх значень цих інтервалів  $B_{сер}$  та  $H_{сер}$  (див. рис. 3, 4) ( $K_B = l_B B_{сер}^{-1}$ ,  $K_H = l_H H_{сер}^{-1}$ ) залежно від середнього відхилення  $\delta_{зб}$  температури поверхні від відповідних згладжених вхідних даних.

Таблиця 3

Довжини  $l_b$  й  $l_h$  інтервалів  $d_b$  та  $d_h$  значень параметрів  $B$  й  $H$  та відношення  $K_b$  та  $K_h$  значень середини цих інтервалів до їх довжини залежно від середнього відхилення температури поверхні від відповідних згладжених вхідних даних

$\delta_{зб}, \%$	Параметри	$d_b$	$l_b$	$K_b, \%$	Параметри	$d_h$	$l_h$	$K_h, \%$
2	Відоме $H = 1$	[4,8; 5,12]	0,32	6,45	Відоме $B = 5$	[0,87; 1,04]	0,17	17,8
5	Невідоме $B = 5$	[4,7; 5,46]	0,76	15	Невідоме $H = 1$	[0,88; 1,09]	0,21	21,0
10		[4,4; 6,01]	1,62	31		[0,77; 1,19]	0,42	43,0

Аналізуючи похибку ідентифікації залежно від проміжків часу, на яких вона проводилася, з'ясовуємо, як і очікувалося, що вона є менша на середніх стадіях нагрівання циліндра, для яких є визначальним вплив саме граничних умов. Із збільшенням значень параметра  $B$  точність його визначення зростає, а зі збільшенням  $H$  — точність визначення цього параметра навпаки зменшується.

**Висновки.** За заданою температурою поверхні циліндра з тонким приповерхневим шаром із застосуванням запропонованої методики, основаної на спеціальній структурі розв'язку прямої задачі і на отриманому для температури поверхні інтегро-диференційному рівнянні, знайдено зведені теплофізичні параметри



такої шаруватої конструкції. Досліджено, що точність ідентифікації найкраща на середній стадії процесу нагрівання циліндра. У випадку точного задання вхідних даних, як результат розв'язування оберненої задачі отримуємо точні значення параметрів. У разі неточної інформації про вхідне поле температури похибка ідентифікації залежить від величини його випадкових збурень і від величини самих параметрів. Для більших значень параметра  $B$  точність його ідентифікації краща, а для більших значень  $H$  — гірша. Також знайдено інтервали значень параметрів, для яких температура поверхні, як розв'язок прямої задачі, не виходитиме за межі наперед заданого діапазону зміни значень (рис. 3, 4), що можна використати на стадії проектування елементів конструкцій.

Особливістю запропонованого методу є визначення теплофізичних параметрів у режимі «реального часу». Він дає змогу здійснювати багатопараметричну ідентифікацію [12, 15] та може застосовуватись у разі задання вхідних даних у вигляді значень поверхневих деформацій чи переміщень циліндра [10]. За використання отриманих структур розв'язків задач зв'язаної механотермодифузії для багат шарових тіл [17], розроблений метод можна розвинути для ідентифікації параметрів багат шарових елементів конструкцій [12], з урахуванням взаємозв'язку фізико-механічних процесів [3, 18].

## Література

- [1] Бурак, Я. Й. Про термодинамічні аспекти приповерхневих явищ у термопружних системах / Я. Й. Бурак, С. Я. Чапля // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2006. — Т. 42, № 1. — С. 39-44.
- [2] Веселовский, В. Б. Методы расчета и исследования теплофизических процессов в промышленных аппаратах и технологиях / В. Б. Веселовский. — Днепропетровск: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2002. — 436 с.
- [3] Підстригач, Я. С. Вибрані праці / Я. С. Підстригач. — Київ: Наук. думка, 1995. — 460 с.
- [4] Коляно, Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — Київ: Наук. думка, 1992. — 285 с.
- [5] Турій, О. Нелінійна контактнo-крайова задача термомеханіки для опромінованої двошарової пластини, з'єднаної проміжковим шаром / О. Турій // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2009. — Вип. 9. — С. 118-132.
- [6] Вигак, В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями / В. М. Вигак. — Киев: Наук. думка, 1988. — 316 с.
- [7] Алифанов, О. М. Обратные задачи как методологическая основа идентификации тепловых математических моделей / О. М. Алифанов // 4-й Минский междунар. форум по тепло- и массообмену, Минск 22-26 мая 2000. — Минск, 2000. — Т. 3. — С. 3-13.
- [8] Блакуэлл, Бек Дж. Некорректные обратные задачи теплопроводности / Бек Дж. Блакуэлл, Б. Ч. Сент-Клэр мл. — Москва: Мир, 1989. — 312 с.
- [9] Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач. Изд. 2-е / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
- [10] Кушнір Р. М. Ідентифікація температурних поля і напружень термочутливого циліндра за поверхневими деформаціями / Р. М. Кушнір, А. В. Ясінський // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2007. — 43, № 6. — С. 55-61.
- [11] Литовченко О. В. Идентификация распределенных параметров внешнего теплообмена для нелинейных граничных условий / О. В. Литовченко // Труды ИПММ НАН Украины. — 2008. — Т. 17. — С. 109-118.
- [12] Model, R. Thermal Transport Properties of Layered Materials: Identification by a new Numerical Algorithm for Transient Measurements / R. Model // Int. J. Thermophys. — 2005. — Vol. 26, No 1. — P. 165-178.

- [13] Чекурін, В. До ідентифікації параметрів багатошарових тіл із використанням теплового зондування / В. Чекурін // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2008. — Вип. 7. — С. 9-20.
- [14] Швець, Р. М. Деякі підходи до розв'язання задачі нагріву суцільного пружного циліндра за нестационарної граничної умови / Р. М. Швець, О. І. Яцків, Б. Я. Бобик // Прикладні проблеми механіки і математики. — 2007. — Вип. 5. — С. 186-194.
- [15] Швець, Р. М. Вплив тонких межових неоднорідностей на напружений стан циліндричних тіл за дії термодифузійних процесів / Р. М. Швець, О. І. Яцків, Б. Я. Бобик // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій; під заг. ред. В. В. Панасюка. — Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України. — 2009. — С. 427-432.
- [16] Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — Киев: Наук. думка, 1986. — 544 с.
- [17] Швець Р. М. Взаємозв'язана задача механотермодифузії для шаруватих тіл канонічної форми з тонкими прошарками / Р. М. Швець, О. І. Яцків // Доп. НАН України. — 1993. — № 11. — С. 65-76.
- [18] Гера, Б. Використання взаємозв'язку тепло- та вологopровідності для відтворення початкового розподілу вологості тіла за його температурними даними / Б. Гера // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2005. — Вип. 2. — С. 18-26.

## Boundary thermal parameters identification for cylinder with nonstationary boundary conditions

Roman Shvets, Oles Yatskiv, Bohdan Bobyk

*General approach to solving direct problems for cylindrical bodies with thin coatings as well as boundary inverse problems of boundary parameter identification for the known surface temperature is proposed. The integro-differential equation for surface temperature is obtained and is used to identify unknown thermal boundary parameters. Identification instability depending upon small data errors is investigated. In this case the method of going through the neighbourhood of obtained from integro-differential equation thermal parameters is applied. The parameters for which average quadratic difference between calculated from direct problem surface temperature and input data is minimal are refined and called as the solution to the inverse boundary thermal parameters identification problem. The proposed method allows a real-time identification of thermal parameters.*

## Идентификация граничных теплофизических параметров цилиндра при нестационарных граничных условиях

Роман Швець, Олесь Яцків, Богдан Бобик

*Рассмотрен единый подход к решению как прямых задач термоупругости для цилиндрических тел с тонкими приповерхностными слоями, так и обратных задач параметрической идентификации граничных теплофизических параметров по заданной на поверхности тела температуре. Неизвестные приведенные теплофизические параметры цилиндра и приповерхностного слоя определяются из полученного на температуру поверхности интегро-дифференциального уравнения, в которое они входят в явном виде. Исследована неустойчивость идентификации в зависимости от погрешностей задания входных данных. В этом случае производится уточнение полученных из интегро-дифференциального уравнения параметров, путем перебора их окрестности и определения таких, для которых средне-квадратическое отклонение температуры поверхности от входных данных будет минимальным. Предложенный метод даёт возможность определять неизвестные теплофизические параметры в режиме «реального времени».*

Представлено доктором технічних наук Я. П'янилом

Отримано 6.06.10