

Контакт штампа та пружного клина з урахуванням тертя та зчеплення

Володимир Острик¹, Ольга Щокотова²

¹ д. ф.-м. н., доцент, Інститут прикладної фізики НАН України, вул. Петропавлівська, 58, Суми, 40000, e-mail: ostrik_v@rambler.ru

² Інститут прикладної фізики НАН України, вул. Петропавлівська, 58, Суми, 40000, e-mail: schekotova@list.ru

Розглянуто контактну взаємодію штампа з прямолінійною основою та пружного клина. Одну з граней клина жорстко закріплено, а в іншу грань, вільну від навантажень, вдавлюється штамп так, що область контакту межує з вершиною клина. Враховано сили тертя в області контакту, які призводять до її поділу на зону зчеплення поблизу вершини клина та зону проковзування на вільному краї штампа. Із застосуванням інтегрального перетворення Мелліна задачу зведено до системи інтегральних рівнянь, яку з використанням процедур методу Вінера-Гопфа перетворено до нескінченної системи алгебричних рівнянь з експоненціально спадаючими коефіцієнтами. Отримано розподіли напружень в області контакту та переміщення точок незакріпленої грані клина. Знайдено відносний розмір зони проковзування для різних кутів розхилу клина.

Ключові слова: штамп, пружний клин, контактна взаємодія, тертя, зчеплення, метод Вінера-Гопфа, напруження, переміщення.

Вступ. Задачі про гладкий контакт штампа з пружним клином, у випадку якщо область контакту межує з вершиною клина, вивчали у працях [1, 2]. Врахування сил тертя в області контакту призводить до її поділу на зони зчеплення та проковзування [3]. У цій роботі розглянуто контакт зі зчепленням і проковзуванням штампа з прямолінійною основою та пружного клина, одну грань якого закріплено. Із застосуванням методу Вінера-Гопфа отримано аналітичний розв'язок задачі.

1. Формулювання задачі

Розглянемо контактну взаємодію штампа з прямолінійною основою та пружного клина $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \vartheta \leq \alpha$ в умовах плоскої деформації (рис. 1). Нижню грань $\vartheta = 0$ клина жорстко закріплено, а у верхню грань $\vartheta = \alpha$ на відрізку $0 \leq r \leq l$ вдавлюється штамп під дією нормальної сили P , прикладеної до правого краю штампа ($r = l$, l — розмір основи штампа). Лівий край штампа ($r = 0$) нерухомий і опирається на закріплену грань клина у його вершині. Щільне прилягання основи штампа до грані клина забезпечується прикладеним до штампа моментом M . Інша частина ($r > l$) грані $\vartheta = \alpha$ клина вільна від навантажень. Внаслідок деформації пружного клина основа

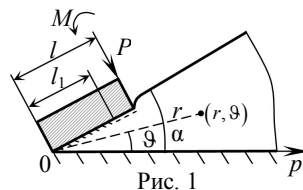


Рис. 1

штампа повертається на деякий кут ε . За наявності тертя область контакту $0 \leq r \leq l$, $\vartheta = \alpha$ поділяється на зону зчеплення $0 \leq r \leq l_1$ і зону проковзування $l_1 < r \leq l$, у якій нормальні та дотичні напруження пов'язані законом тертя Амонтона (Кулона) [3]. Вважаємо, що в зоні проковзування граничні точки пружного клина зміщуються у напрямку до його вершини. Змішані крайові умови на гранях клина запишемо у такому вигляді (μ_0 — коефіцієнт тертя)

$$u_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = -\varepsilon r \quad (0 \leq r \leq l), \quad u_r|_{\vartheta=\alpha} = 0 \quad (0 \leq r \leq l_1), \quad (1)$$

$$\tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = -\mu_0 \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} \quad (l_1 < r < l), \quad (2)$$

$$\sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = 0, \quad \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = 0 \quad (l < r < \infty), \quad (3)$$

$$u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = 0, \quad u_r|_{\vartheta=0} = 0 \quad (0 \leq r < \infty). \quad (4)$$

Невідомі параметри задачі — кут повороту штампа ε , момент M і розмір зони зчеплення l_1 — визначимо з умов рівноваги штампа

$$\int_0^l \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} dr = -P, \quad \int_0^l r \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} dr = -Pl + M \quad (5)$$

та умови неперервності контактних напружень у точці переходу із зони зчеплення у зону проковзування ($r = l_1$), яку розглянемо нижче.

2. Система інтегральних рівнянь

Подано розв'язок задачі (1)-(5) у вигляді розв'язку основної змішаної задачі, в якій на грані клина $\vartheta = \alpha$ задано напруження

$$(2G)^{-1} \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = g_1(r), \quad (2G)^{-1} \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = g_2(r) \quad (0 \leq r < \infty), \quad (6)$$

де G — модуль зсуву, а на грані $\vartheta = 0$ — нульові значення переміщень згідно з умовою (4).

Із використанням інтегрального перетворення Мелліна розв'язок основної змішаної задачі (4), (6) знаходимо у вигляді

$$u_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [M_{11}(s)a_1(s) + M_{12}(s)a_2(s)] r^{-s} ds,$$

$$u_r|_{\vartheta=\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [M_{21}(s)a_1(s) + M_{22}(s)a_2(s)] r^{-s} ds \quad (-1 < c < \delta_1),$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a_1(s) r^{-s-1} ds, \quad \frac{1}{2G} \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a_2(s) r^{-s-1} ds,$$

$$a_j(s) = \int_0^{\infty} g_j(r) r^s dr, \quad M_{vj}(s) = 2(m-1) \frac{\lambda_{vj}(s)}{s\Delta(s)} \quad (v, j = 1, 2),$$

$$\begin{aligned}\lambda_{11}(s) &= (3m - 4)\sin(2s\alpha) - ms\sin(2\alpha), \\ \lambda_{12}(s) &= ms\left(\frac{ms}{m-1} - 2\right)\sin^2\alpha - \frac{(3m-4)(m-2)}{m-1}\sin^2(s\alpha), \\ \lambda_{21}(s) &= \frac{(3m-4)(m-2)}{m-1}\sin^2(s\alpha) - ms\left(\frac{ms}{m-1} + 2\right)\sin^2\alpha, \\ \lambda_{22}(s) &= (3m - 4)\sin(2s\alpha) + ms\sin(2\alpha), \\ \Delta(s) &= (3m - 4)m(\cos(2s\alpha) - 1) - 2m^2s^2\sin^2\alpha + 8(m-1)^2,\end{aligned}\quad (7)$$

де δ_1 — найменший за модулем корінь рівняння $\Delta(s) = 0$ із півплощини $\operatorname{Re} s > 0$, m — число Пуассона ($m = 1/\mu$, μ — коефіцієнт Пуассона).

Введемо невідомі функції контактних напружень

$$\begin{aligned}(2G)^{-1}\sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} &= p(r); & (2G)^{-1}\tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} &= q(r) \quad (0 \leq r \leq l_1), \\ (2G)^{-1}\sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} &= -(2G\mu_0)^{-1}\tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = \sigma(r) \quad (l_1 < r < l),\end{aligned}\quad (8)$$

через які функції $g_1(r), g_2(r)$ із (6) подамо таким чином

$$g_1(r) = \begin{cases} p(r), & 0 \leq r \leq l_1, \\ \sigma(r), & l_1 < r < l, \\ 0, & l < r < \infty, \end{cases} \quad g_2(r) = \begin{cases} q(r), & 0 \leq r \leq l_1, \\ -\mu_0\sigma(r), & l_1 < r < l, \\ 0, & l < r < \infty. \end{cases}$$

Взявши зворотне перетворення третього та четвертого співвідношення (7), з урахуванням (2), (3) маємо

$$a_1(s) = \int_0^{l_1} p(y)y^s dy + \int_{l_1}^l \sigma(y)y^s dy, \quad a_2(s) = \int_0^{l_1} q(y)y^s dy - \mu_0 \int_{l_1}^l \sigma(y)y^s dy. \quad (9)$$

Розв'язок, побудований у вигляді (7), (9), задовольняє крайові умови (2)-(4) задачі. Підставимо у крайові умови (1) вирази для переміщень із (7), у яких густини $a_1(s), a_2(s)$ подамо через функції контактних напружень $p(y), q(y), \sigma(y)$ згідно з (9). Виконавши заміни $s = -i\tau, r = le^{-\xi}, y = le^{-\eta}$ відносно нових невідомих функцій

$$\begin{aligned}\psi_1(\eta) &= p(le^{-\eta})e^{-\eta}, & \psi_2(\eta) &= q(le^{-\eta})e^{-\eta} \quad (a \leq \eta < \infty), \\ \varphi(\eta) &= \sigma(le^{-\eta})e^{-\eta} \quad (0 \leq \eta < a), & a &= \ln(l/l_1),\end{aligned}\quad (10)$$

отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned}L_1(\xi) &\equiv \int_a^\infty [k_{11}(\xi - \eta)\psi_1(\eta) + k_{12}(\xi - \eta)\psi_2(\eta)] d\eta + \\ &+ \int_0^a k_1(\xi - \eta)\varphi(\eta) d\eta = f_1(\xi) \quad (0 \leq \xi < \infty),\end{aligned}$$

$$L_2(\xi) \equiv \int_a^\infty [k_{21}(\xi - \eta)\psi_1(\eta) + k_{22}(\xi - \eta)\psi_2(\eta)]d\eta + \int_0^a k_2(\xi - \eta)\varphi(\eta)d\eta = 0 \quad (a \leq \xi < \infty) \quad (11)$$

$$k_{vj}(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty K_{vj}(\tau)e^{-i\tau(\xi-\eta)}d\tau, \quad k_v(\xi - \eta) = k_{v1}(\xi - \eta) - \mu_0 k_{v2}(\xi - \eta),$$

$$K_{vj}(\tau) = \frac{M_{vj}(-i\tau)}{2(m-1)} \quad (v, j = 1, 2), \quad f_1(\xi) = -\frac{\varepsilon e^{-\xi}}{2(m-1)}.$$

3. Розв'язування системи інтегральних рівнянь

Для знаходження розв'язку системи інтегральних рівнянь зведемо її до нескінченної системи алгебричних рівнянь, використовуючи підхід роботи [4].

Розповсюдимо інтегральні рівняння (11) на всю числову вісь, прийнявши $\psi_1(\eta) = 0, \psi_2(\eta) = 0$ для $\eta < a$ і $\varphi(\eta) = 0$ для $\eta < 0$ і $\eta > a$, і застосуємо до них інтегральне перетворення Фур'є. Введемо невідомі функції

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \varphi(\xi)e^{iz\xi}d\xi, & \Phi^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^0 \varphi(\xi+a)e^{iz\xi}d\xi, \\ \Psi_1^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \psi_1(\xi+a)e^{iz\xi}d\xi, & \Psi_2^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \psi_2(\xi+a)e^{iz\xi}d\xi, \\ \Psi_1^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 L_1(\xi)e^{iz\xi}d\xi, & \Psi_2^-(z) &= \frac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a L_2(\xi)e^{iz\xi}d\xi, \end{aligned} \quad (12)$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\text{Im}z > c^+$ та $\text{Im}z < c^-$ ($c^+ < 0, c^- > 0$) комплексної площини. Застосовуючи теорему про згортку для інтегрального перетворення Фур'є, приходимо до системи функціональних рівнянь Вінера-Гопфа [5]

$$\begin{aligned} K_1(z)\Phi^+(z) + e^{iza} [K_{11}(z)\Psi_1^+(z) + K_{12}(z)\Psi_2^+(z)] - \Psi_1^-(z) &= F_1^+(z), \\ K_2(z)\Phi^+(z) + e^{iza} [K_{21}(z)\Psi_1^+(z) + K_{22}(z)\Psi_2^+(z) - \Psi_2^-(z)] &= 0, \\ \Phi^+(z) &= e^{iza}\Phi^-(z) \quad (c^+ < \text{Im}z < c^-), \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} K_v(z) &= \frac{\lambda_v(-iz)}{-iz \Delta(-iz)}, & K_{vj}(z) &= \frac{\lambda_{vj}(-iz)}{-iz \Delta(-iz)}, \\ \lambda_v(s) &= \lambda_{v1}(s) - \mu_0 \lambda_{v2}(s) \quad (v, j = 1, 2), \\ F_1^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f_1(\xi)e^{iz\xi}d\xi = -\frac{A\varepsilon}{1-iz}, & A &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}(m-1)}. \end{aligned}$$

Введемо допоміжну невідому функцію

$$\Psi^+(z) = \mu_0 \Psi_1^+(z) + \Psi_2^+(z).$$

Виключивши з перших двох рівнянь системи (13) функцію $\Phi^+(z)$, отримаємо таке функціональне рівняння

$$K(z)\Psi^+(z) + e^{-iza}\lambda_2(-iz)\Psi_1^-(z)/\lambda_1(-iz) - \Psi_2^-(z) = F(z), \quad (14)$$

$$K(z) = \frac{\lambda(-iz)}{-iz\lambda_1(-iz)}, \quad \lambda(s) = \left[(3m-4)^2 \sin^2(s\alpha) - m^2 s^2 \sin^2 \alpha \right] / \left[2(m-1)^2 \right],$$

$$F(z) = A\varepsilon \frac{\lambda_2(-iz) e^{-iza}}{\lambda_1(-iz) 1-iz}.$$

Перейдемо до системи функціональних рівнянь, яка складається з першого рівняння системи (13) і рівняння (14). Методом Вінера-Гопфа зведемо цю систему до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Для цього факторизуємо коефіцієнти $K_1(z)$, $K(z)$ у добуток, другі складники лівих частин і праві частини системи функціональних рівнянь — у різницю функцій, аналітичних у верхній ($\text{Im} z > c^+$) і нижній ($\text{Im} z > c^-$) півплощинах

$$K_1(z) = \kappa_1 K_1^+(z) K_1^-(z), \quad K(z) = \kappa K^+(z) K^-(z), \quad \kappa_1 = K_1(0), \quad \kappa = K(0),$$

$$K_1^+(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{s'_n} \right) \left(1 - \frac{iz}{\delta_n} \right)^{-1}, \quad K_1^-(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{s_n} \right) \left(1 + \frac{iz}{\delta_n} \right)^{-1},$$

$$K^+(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{iz}{\tau_n} \right) \left(1 + \frac{iz}{s'_n} \right)^{-1}, \quad K^-(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{\tau_n} \right) \left(1 + \frac{iz}{s_n} \right)^{-1},$$

$$\frac{e^{iza}}{K_1^-(z)} \left[K_{11}(z)\Psi_1^+(z) + K_{12}(z)\Psi_2^+(z) \right] = \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z),$$

$$e^{-iza} \frac{\lambda_2(-iz) \Psi_1^-(z)}{\lambda_1(-iz) K^-(z)} = \chi^+(z) - \chi^-(z),$$

$$F_1^+(z)/K_1^-(z) = f_1^+(z) - f_1^-(z), \quad F(z)/K^-(z) = f^+(z) - f^-(z),$$

$$\chi_1^-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^+}{s_n + iz} \Psi^+(is_n) e^{-s_n a}, \quad \chi^+(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^-}{s'_n + iz} \Psi_1^-(is'_n) e^{s'_n a},$$

$$f_1^+(z) = -\frac{A\varepsilon}{K_1^-(z)(1-iz)}, \quad f^+(z) = \varepsilon \left[\frac{B}{1-iz} + A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^- e^{s'_n a}}{(1+s'_n)(s'_n + iz)} \right],$$

$$\alpha_n^+ = \kappa_1 \frac{\lambda_{12}(s_n)}{\lambda_1'(s_n)} K_1^+(is'_n), \quad \alpha_n^- = -\frac{\lambda_2(s'_n)}{\lambda_1'(s'_n) K^-(is'_n)} \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$B = -2 \frac{(m-2) \sin^2 \alpha + (m-1) \mu_0 \sin(2\alpha)}{(m-2) \sin(2\alpha) + 4\mu_0 \sin^2 \alpha} \frac{Ae^{-a}}{K^-(z)}, \quad (15)$$

де s_n, s'_n — корені рівняння $\lambda_1(s) = 0$ із півплощин $\text{Re } s > 0, \text{Re } s < 0$ відповідно; δ_n — корені рівняння $\Delta(s) = 0$ із півплощини $\text{Re } s > 0$; τ_n — корені рівняння $\lambda(s) = 0$ із півплощини $\text{Re } s > 0 (n = 1, 2, \dots)$.

У підсумку знаходимо

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{f_1^+(z) - \chi_1^+(z)}{\kappa_1 K_1^+(z)}, & \Psi^+(z) &= \frac{f^+(z) - \chi^+(z)}{\kappa K^+(z)}, \\ \Psi_1^-(z) &= K_1^-(z) [f_1^-(z) - \chi_1^-(z)], & \Psi_2^-(z) &= K^-(z) [f^-(z) - \chi^-(z)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Вимагаючи обмеженість контактних напружень у точці $r = l_1$, за лемою Ватсона [6] для інтегралів із співвідношень (12) приходимо до додаткової умови [4]

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} iz [f^+(z) - \chi^+(z)] = 0. \quad (17)$$

Вирази (16) ще не визначають функції $\Phi^+(z), \Psi^+(z), \Psi_{1,2}^-(z)$, а лише виражають їх, завдяки співвідношенням із (15), через невідомі значення $\Psi^+(is_n), \Psi_1^-(is'_n) (n = 1, 2, \dots)$. Для знаходження вказаних значень візьмемо у другому та третьому співвідношеннях системи (16) відповідно $z = is_n$ і $z = is'_n (n = 1, 2, \dots)$. Тоді відносно невідомих

$$z_k^+ = \varepsilon^{-1} \Psi^+(is_k), \quad z_k^- = \varepsilon^{-1} \Psi_1^-(is'_k) - \frac{A}{1 + s'_k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} z_n^+ + \beta_n^+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^- e^{s'_k a}}{s'_k - s_n} z_k^- &= h_n^+, & z_n^- + \beta_n^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+ e^{-s_k a}}{s_k - s'_n} z_k^+ &= h_n^- \quad (n = 1, 2, \dots), \\ \beta_n^+ &= \frac{1}{\kappa K^+(is_n)}, & \beta_n^- &= K_1^-(is'_n), \quad h_n^+ = \frac{B \beta_n^+}{1 + s_n}, \quad h_n^- = -\frac{A \beta_n^-}{K_1^-(-i)(1 + s'_n)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Розв'язок регулярної системи алгебричних рівнянь (18) з експоненціально спадаючими коефіцієнтами можна знайти методом послідовних наближень.

Для визначення відносного розміру зони зчеплення $l_1/l (l_1/l = e^{-a})$ із додаткової умови (17) отримуємо рівняння

$$B + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^- e^{s'_n a} z_n^- = 0.$$

З умов рівноваги (5) знаходимо кут повороту штампа та прикладений до нього момент

$$\varepsilon = k \frac{P}{2Gl}, \quad M = k_1 Pl,$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\kappa_1} \left[\frac{A}{K_1^-(-i)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+ e^{-s_k a}}{s_k} z_k^+ \right] - \kappa_2 \left[B - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^- e^{s'_k a}}{s'_k} z_k^- \right] \right)^{-1},$$

$$k_1 = 1 + \sqrt{2\pi} k \left(\kappa_3 K_1^-(i) \left[\frac{A}{2K_1^-(-i)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+ e^{-s_k a}}{s_k - 1} z_k^+ \right] + \right. \\ \left. + (m-1)e^{-a} K^-(i) \left[\frac{B}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^- e^{s'_k a}}{s'_k - 1} z_k^- \right] \right),$$

$$\kappa_2 = \frac{4m(m-1)^2 \sin^2 \alpha}{\alpha^2 (3m-4)^2 - m^2 \sin^2 \alpha}, \quad \kappa_3 = -\frac{4(m-1)(m \cos^2 \alpha - 1)}{(m-2)(\sin(2\alpha) + 2\mu_0 \sin^2 \alpha)}. \quad (19)$$

4. Контактні напруження та переміщення точок незакріпленої грані клина

Нормальні та дотичні напруження (8), (10) в області контакту знаходимо із застосуванням оберненого перетворення Фур'є до співвідношень (12) для функцій $\Phi^+(z)$, $\Psi_1^+(z)$, $\Psi_2^+(z)$. Обчислюючи відповідні інтеграли Фур'є за теорією лишків, одержуємо такі вирази для контактних напружень у зонах проковзування та зчеплення

$$\frac{\sigma_{\vartheta}}{2G\varepsilon} \Big|_{\vartheta=\alpha} = -\frac{2(m \cos^2 \alpha - 1)}{(m-2)\sin(2\alpha) + 4\mu_0 \sin^2 \alpha} + \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{l \lambda_{12}(s_k)}{l_1 \lambda'_1(s_k)} z_k^+ \left(\frac{r}{l_1} \right)^{-s_k - 1} + \right. \\ \left. + \frac{s'_k \Delta(s'_k)}{\lambda'_1(s'_k)} z_k^- \left(\frac{r}{l} \right)^{-s'_k - 1} \right] \quad (l_1 < r \leq l),$$

$$\frac{\sigma_{\vartheta}}{2G\varepsilon} \Big|_{\vartheta=\alpha} = -\frac{m-1}{m-2} \operatorname{ctg} \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{12}(-\tau_k) w_k(r),$$

$$\frac{\tau_{r\vartheta}}{2G\varepsilon} \Big|_{\vartheta=\alpha} = -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{11}(-\tau_k) w_k(r) \quad (0 \leq r \leq l_1),$$

$$w_k(r) = \sqrt{2\pi} \frac{l \tau_k K^-(-i\tau_k)}{l_1 \lambda'(-\tau_k)} \left[\frac{B}{1-\tau_k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^- e^{s'_n a}}{s'_n + \tau_k} z_n^- \right] \left(\frac{r}{l_1} \right)^{\tau_k - 1}.$$

Аналізуючи співвідношення $|\tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} < \mu_0 |\sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha}$ між дотичними та нормальними напруженнями в зоні зчеплення, у разі $r \rightarrow 0$ приходимо до залежності $1/2 < \mu_0 (m-1) \operatorname{ctg} \alpha / (m-2)$, яка накладає обмеження на кут α розхилу клина: $0 < \alpha < \alpha_*$, $\alpha_* = \pi/2 - \operatorname{arctg}[2\mu_0 (m-1)/(m-2)]$ за заданих значень числа Пуассона m і коефіцієнта тертя μ_0 . У випадку, якщо кут α перевищує вказане критичне

значення α_* , побудований розв'язок стає фізично суперечливим і вказує на виникнення ще однієї зони проковзування поблизу вершини клина.

Вирази $L_1(\xi), L_2(\xi)$ із (11) для переміщень точок незакріпленої грані клина перетворимо до інтегралів Фур'є, які містять функції $\Phi^+(z), \Psi_1^+(z), \Psi_2^+(z)$, і обчислимо останні за теорією лишків. Отримаємо

$$\frac{u_\vartheta}{\varepsilon l} \Big|_{\vartheta=\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(\delta_k) u_k(r), \quad \frac{u_r}{\varepsilon l} \Big|_{\vartheta=\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_2(\delta_k) u_k(r) \quad (l \leq r < \infty),$$

$$u_k(r) = \frac{1}{\delta_k \Delta'(\delta_k) \kappa_1 K_1^+(i\delta_k)} \left[\frac{1}{K_1^-(-i)(1+\delta_k)} + A^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^+ e^{-s_n a}}{s_n - \delta_k} z_n^+ \right] \left(\frac{r}{l} \right)^{-\delta_k},$$

$$\frac{u_r}{\varepsilon l} \Big|_{\vartheta=\alpha} = -A^{-1} \left[BK^-(-i) \frac{r}{l_1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_2(s'_k)}{\lambda'_1(s'_k)} z_k^- \left(\frac{r}{l} \right)^{-s'_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(s_k)}{s_k \lambda'_1(s_k)} z_k^+ \left(\frac{r}{l} \right)^{-s_k} \right]$$

$(l_1 \leq r \leq l)$.

5. Результати розрахунків

На рис. 2-4 наведені результати обчислень контактних напружень і переміщень точок грані $\vartheta = \alpha$ пружного клина для числа Пуассона $m = 10/3$. Суцільні криві відповідають фрикційному контакту з коефіцієнтом тертя $\mu_0 = 0,5$, штрихові — гладкому контакту ($\mu_0 = 0$).

На рис. 2 криві 1 і 3 відповідають розподілу безрозмірних нормальних $\bar{\sigma} = \sigma_\vartheta / (2G\varepsilon) \Big|_{\vartheta=\alpha}$ та дотичних $\bar{\tau} = \tau_{r\vartheta} / (2G\varepsilon) \Big|_{\vartheta=\alpha}$ контактних напружень для значення кута розхилу клина $\alpha = \pi/4$, криві 2 і 4 — для $\alpha = \pi/6$. Наявність тертя та зчеплення дещо підвищує контактний тиск у зоні зчеплення і веде до появи дотичних

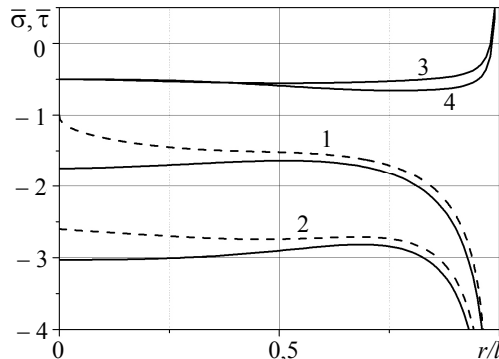


Рис. 2

Таблиця 1

Відносний розмір зони проковзування $(l - l_1)/l$

α	5°	10°	30°	45°	60°
$(l - l_1)/l$	$0,164 \cdot 10^{-3}$	$0,291 \cdot 10^{-3}$	$0,630 \cdot 10^{-3}$	$0,853 \cdot 10^{-3}$	$0,113 \cdot 10^{-2}$

контактних напружень, які змінюють знак поблизу правого краю зони зчеплення у точці $r = l_1 - \delta$ ($\delta/l = 0,018$ для $\alpha = \pi/4$, $\delta/l = 0,014$ для $\alpha = \pi/6$). Тому майже уздовж усієї області контакту відбувається зсув примезових шарів пружного клина у напрямку від його вершини, та тільки у малій зоні проковзування граничні точки клина рухаються у напрямку до вершини клина. У табл. 1 наведені числові значення відносного розміру зони проковзування $(l - l_1)/l$ для різних кутів розхилу клина ($\mu_0 = 0,5$; $m = 10/3$).

На рис. 3, 4 подані безрозмірні колові $\bar{u}_\vartheta = u_\vartheta / (\varepsilon l)|_{\vartheta=\alpha}$ та радіальні $\bar{u}_r = u_r / (\varepsilon l)|_{\vartheta=\alpha}$ переміщення точок верхньої грані пружного клина. Криві 1 відповідають значенню кута розхилу клина $\alpha = \pi/4$, криві 2 — $\alpha = \pi/6$. Спостерігається незначний вплив тертя на колові переміщення, які відтворюють форму деформованої грані клина. У разі гладкого контакту (штрихові криві) радіальні переміщення скрізь додатні, тобто усі точки верхньої грані клина зміщуються в напрямку від його вершини. Вказане зміщення при цьому значно стримується правою кромкою штампа, поблизу якої повздовжня деформація $\varepsilon_r = \partial u_r / \partial r$ є деформація стиску ($\varepsilon_r < 0$), необмежена на правому краї області контакту. За наявності тертя (суцільні криві) радіальні переміщення в околі краю штампа від'ємні, що вказує на рух точок грані клина поблизу штампа та в малій області проковзування у напрямку до його вершини, тобто під штамп; у зоні зчеплення переміщення відсутні, а на віддалі від краю штампа граничні точки клина зміщуються у напрямку від його вершини.

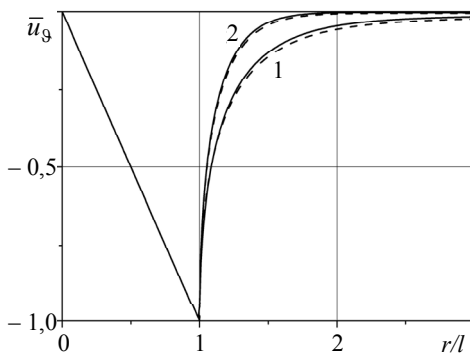


Рис. 3

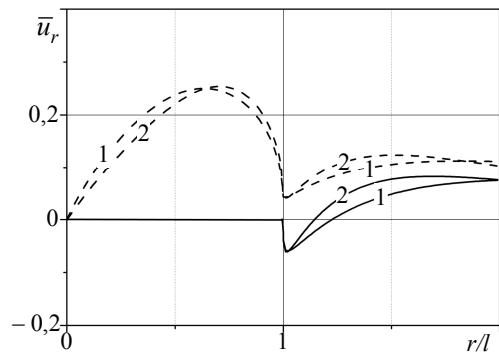


Рис. 4

Коефіцієнти k, k_1 із (19), які визначають кут повороту ε і момент M , прикладений до штампа, у випадку $\mu_0 = 0,5; m = 10/3$ відповідно дорівнюють 0,482; 0,418 для $\alpha = \pi/4$ і 0,304; 0,454 для $\alpha = \pi/6$. У разі гладкого контакту ($\mu_0 = 0, m = 10/3$) ці значення такі: $k = 0,541; k_1 = 0,396$ для $\alpha = \pi/4$ і $k = 0,328; k_1 = 0,445$ для $\alpha = \pi/6$. Тобто наявність тертя стримує просідання правого незакріпленого краю штампа та водночас призводить до збільшення моменту M , який необхідно прикласти до штампа, щоб забезпечити повний контакт його основи з пружним клином.

Висновки. Із використанням методу Вінера-Гопфа знайдено аналітичний розв'язок задачі про контакт зі зчепленням і проковзуванням штампа з прямолінійною основою та пружного клина з однією закріпленою гранню. Встановлено, що зчеплення основи штампа з гранню пружного клина відбувається майже вздовж усієї області контакту, а розмір зони проковзування, яка виникає на краю штампа, надзвичайно малий (на 2-3 порядки менший від розміру області контакту).

Знайдено та проаналізовано розподіли напружень в області контакту, коліви та радіальні переміщення точок незакріпленої грані клина. З'ясовано, що тертя значно впливає на розподіл нормальних контактних напружень, та веде до появи дотичних контактних напружень, які змінюють знак в околі точки переходу із зони зчеплення в зону проковзування. За незначного впливу тертя на форму деформованої грані клина, його наявність викликає зчеплення граничних точок клина майже в усій області контакту та стримує їх рух у напрямку від вершини клина поза зоною зчеплення, так що поблизу віддаленого від вершини клина краю штампа спостерігається зміщення точок межі клина у зворотному напрямку — до середини підшви штампа. З'ясовано також, що у разі перевищення певного критичного кута розхилу клина виникає ще одна зона проковзування поблизу вершини клина.

Література

- [1] Лутченко, С. А. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости для клина / С. А. Лутченко, Г. Я. Попов // Прикл. механика. — 1970. — Т. 6, вып. 3. — С. 64-71.
- [2] Matczynski, M. Elastic wedge with discontinuous boundary conditions / M. Matczynski // Arch. Mech. Stosowanej. — 1963. — Vol. 15, No 6. — P. 833-855.
- [3] Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. — Москва: Мир, 1989. — 510 с.
- [4] Острик, В. І. Контакт пружного та жорсткого клинів з урахуванням тертя і зчеплення / В. І. Острик // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. — Т. 48, № 3. — С. 88-100.
- [5] Нобл, Б. Метод Винера-Хопфа / Б. Нобл. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 280 с.
- [6] Федорюк, М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды / М. В. Федорюк. — Москва: Наука, 1987. — 544 с.

Contact of a stamp and an elastic wedge with account of friction and adhesion

Volodymyr Ostriuk, Olga Shchokotova

The problem of contact interaction between a stamp with a rectilinear base and an elastic wedge with one rigid side is considered. The stamp is pressed into the other side, which is free of loading. The contact region borders with the wedge top. Friction forces in the contact region are taken into account. These forces lead to the division of the contact region into the adhesion zone at the wedge top and the slipping zone at the free edge of the stamp. With the use of the integral Mellin transform the problem is reduced to the system of integral equations, which with the use of the Wiener-Hopf method is reduced to an infinite system of algebraic equations with coefficients vanishing exponentially. The distribution of contact stresses and displacements at the free boundary of the wedge are received. The size of the slipping zone for different angles of the wedge is found.

Контакт штампа и упругого клина с учетом трения и сцепления

Владимир Острик, Ольга Щёктова

Рассмотрено контактное взаимодействие штампа с прямолинейным основанием и упругого клина. Одна из граней клина жестко закреплена, а в другую грань, свободную от нагрузки, вдавливаются штамп, так что область контакта граничит с вершиной клина. Учтены силы трения в области контакта, которые приводят к ее разделению на зону сцепления вблизи вершины клина и зону проскальзывания на свободном крае штампа. С применением интегрального преобразования Меллина задача сведена к системе интегральных уравнений, которая с использованием процедур метода Винера-Хопфа преобразовывается в бесконечную систему алгебраических уравнений с экспоненциально убывающими коэффициентами. Получены распределения напряжений в области контакта и перемещения точек незакрепленной грани клина. Найден относительный размер зоны проскальзывания для разных углов раствора клина.

Отримано 16.09.10