

## Концентрація напружень та електричних зміщень на тонких включеннях у п'єзоелектричних тілах

Георгій Сулим<sup>1</sup>, Ярослав Пастернак<sup>2</sup>

<sup>1</sup> д. ф.-м. н., професор, Львівський національний університет ім. І. Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: sulym@franko.lviv.ua

<sup>2</sup> к. ф.-м. н., Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, Луцьк, 43018, e-mail: pasternak@ukrpost.ua

*Розглянуто задачу визначення двовимірного електронапруженого стану тіл із тонкими неоднорідностями та запропоновано схему її розв'язування за принципом спряження континуумів різної вимірності. З'ясовано, що поля напружень та електричних зміщень біля вершин тонких неоднорідностей мають кореневу особливість. Отримано зв'язки між коефіцієнтами концентрації та інтенсивності напружень і електричних зміщень.*

**Ключові слова:** тонке п'єзоелектричне включення, інтегральне рівняння, узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень та електричних зміщень.

**Вступ.** Сучасні розрахункові моделі суцільних середовищ невпинно розширюються в сенсі врахування якомога більшої кількості фізичних властивостей тіл і полів, що діють у них. Вагомий доробок у створення фундаментальних загальнотеоретичних принципів і методів розв'язування конкретних задач з урахуванням взаємовпливу полів різної фізичної природи належить Я. Й. Бураку разом із його учнями [1]. І все ж при цьому здатність тонких неоднорідностей будови матеріалу чинити істотний вплив на розраховані експлуатаційні характеристики виробу вивчено далеко неповно. Зокрема, тріщини, чужорідні прошарки, електропровідні включення тощо створюють істотні градієнти фізико-механічних полів, що можуть спричинити відмову чи навіть цілковите механічне руйнування конструкційного елемента. Зважаючи на те, що діелектрична стала не дорівнює нулю навіть для вакууму ( $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-3}$  нФ/м), то й тріщину в п'єзоелектрику слід розглядати як порожнину, заповнену електропроникним середовищем. Тому задачі дослідження тонких дефектів у п'єзоелектриках неодмінно повинні зводитися до задач теорії тонких включень.

Прямолінійні електрично-непроникні, проникні та електропровідні тріщини в п'єзоелектричних матеріалах розглянуті у роботах [2-4] та ін. Задач електро- та магнітопружності тіл із тріщинами стосуються монографії [5-7]. Менше публікацій стосується дослідження поєднаних фізико-механічних полів у тілах із тонкими включеннями. Еліптичні включення в п'єзоелектриках розглянуті у монографіях [5, 7]. Електронапружений стан тіл із тонкими жорсткими включеннями за антиплоскої деформації вивчено у праці [8]. Дослідження тонких пружних і

п'єзоелектричних включень за антиплоскої деформації середовища започатковано у роботі [9]. Визначення ж двовимірного електронапруженого стану тіл із тонкими електропружними включеннями залишається актуальним завданням.

У цій роботі, використовуючи принцип спряження континуумів різної вимірності, розроблено підхід, який дає можливість досліджувати двовимірні поєднані фізико-механічні поля у п'єзоелектриках із тонкими неоднорідностями.

### 1. Формулювання задачі

Розглянемо циліндричне п'єзоелектричне тіло, що містить тонке стрічкове чужорідне включення. Вважатимемо, що на спільній межі тіла та включення задовольняються умови ідеального механічного й електричного контакту. Це дає можливість звести задачу до розгляду стаціонарних фізико-механічних полів тіла та включення у деякій площині, перпендикулярній до твірної тіла.

Виходячи з принципу спряження континуумів різної вимірності [10] (рис. 1), створимо лінійчатую модель тонкої неоднорідності. Для цього вилучимо з розгляду таке включення як геометричний об'єкт певної товщини, а контактні напруження, поверхневі заряди, переміщення й електричний потенціал перенесемо на його серединну поверхню  $\Gamma_C$  (відповідно на її береги  $\Gamma_C^+$  та  $\Gamma_C^-$ , рис. 1). У такий спосіб зведемо задачу до визначення електронапруженого стану тіла з лінією стрибків фізико-механічних полів (*зовнішня задача*). Побудова умов взаємодії тонкої неоднорідності з тілом (*внутрішня задача*) разом із рівняннями рівноваги останнього, тобто запис і розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь стосовно згаданих функцій стрибка, дадуть можливість визначити його електронапружений стан.

### 2. Рівняння внутрішньої задачі для включення

Відповідно до [5] узагальнені зв'язки між напруженнями  $\sigma_{ij}$ , деформаціями  $u_{k,m}$ , електричним зміщенням  $D_i$  й електростатичним потенціалом  $\phi$  можна подати у вигляді

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,m} + e_{pij} \phi_{,p}, \quad D_i = e_{ikm} u_{k,m} - \kappa_{ip} \phi_{,p}, \quad (1)$$

де  $C_{ijkl}$  — компоненти тензора пружних сталей (модулі пружності),  $e_{ijk}$  — п'єзоелектричні сталі,  $\kappa_{ij}$  — діелектричні сталі матеріалу.

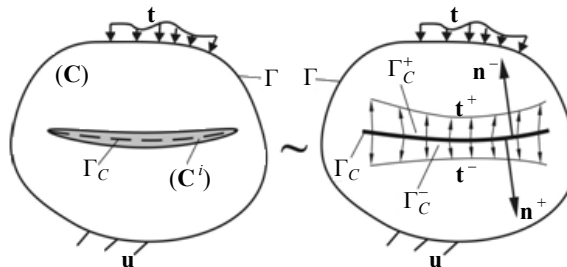


Рис. 1. Ілюстрація моделювання тонкого включення за принципом спряження

Розглянемо двовимірні електричне поле та поле напружень, за яких переміщення й електричний потенціал точок циліндричного тіла не змінюються з координатою  $x_3$  ( $u_{i,3} \equiv 0, E_3 = \phi_{,3} \equiv 0$ ). Отже, електромеханічні поля у кожному нормальному до осі  $Ox_3$  тіла перерізі  $S$  будуть однакові. Введемо, подібно до [5], узагальнені величини

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i &= u_i, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} \quad (i = \overline{1,3}), \quad \tilde{u}_4 = \phi, \quad \tilde{\sigma}_{4j} = D_j \quad (j = 1,2); \\ \tilde{C}_{ijkm} &= C_{ijkm}, \quad \tilde{C}_{ij4m} = e_{mij}, \\ \tilde{C}_{4jkm} &= e_{jkm}, \quad \tilde{C}_{4j4m} = -\kappa_{jm} \quad (i, k = \overline{1,3}; j, m = 1,2). \end{aligned} \quad (2)$$

Із використанням позначень (2) рівняння (1) можна записати в уніфікованому компактному вигляді

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkm} \tilde{u}_{k,m} \quad (i, k = \overline{1,4}; j, m = 1,2). \quad (3)$$

Для зручності введемо  $4 \times 4$  матриці  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{T}$  формалізму Стро так

$$Q_{ik} = \tilde{C}_{i1k1}, \quad T_{ik} = \tilde{C}_{i2k2}, \quad R_{ik} = \tilde{C}_{i1k2} = \tilde{C}_{k2i1}. \quad (4)$$

Відповідно до (2) матриці  $\mathbf{Q}$  та  $\mathbf{T}$  симетричні.

Розглянемо електронапружений стан тонкого п'єзоелектричного включення, а саме, його перерізу, означеного точкою  $\mathbf{y}$  серединної поверхні. Включення за принципом спряження континуумів різної вимірності моделюється лінією  $\Gamma_C$  розриву фізико-механічних полів. Пов'яжемо вісь  $Ox'_1$  локальної системи координат  $Ox'_1x'_2x'_3$  із вектором нормалі  $\mathbf{n}^+(\mathbf{y})$  до поверхні  $\Gamma_C^+$  у точці  $\mathbf{y} \in \Gamma_C$ . Вектори в локальній системі координат пов'язані з відповідними у глобальній співвідношеннями  $\tilde{t}'_i = \Omega_{ij} \tilde{t}_j$ ,  $\tilde{t}_i = \Omega_{ji} \tilde{t}'_j$ , де  $\mathbf{\Omega}$  — матриця повертання системи координат. Помістимо центр локальної системи координат на серединну поверхню тонкого включення. Тоді  $\tilde{g}(-h) = \tilde{g}^+$ ,  $\tilde{g}(h) = \tilde{g}^-$ , де  $\tilde{g}$  — довільний із векторів  $\tilde{u}_i, \tilde{t}_i$ ;  $2h$  — товщина включення. Враховуючи, що  $\mathbf{n}^\pm = -\mathbf{n}^{\pm}$ , умови ідеальних механічного й електричного контакту включення із середовищем матимуть вигляд  $\tilde{u}_i^\pm = \tilde{u}_i^{\pm}$ ,  $\tilde{t}_i^\pm = -\tilde{t}_i^{\pm}$ . Тут верхнім прямим індексом «і» позначено величини, що стосуються включення.

Відповідно до (3) напруження й електричне зміщення у включенні з використанням позначень (4) дорівнюють

$$\tilde{\sigma}'_{i1} = Q_{ik}^i \tilde{u}'_{k,1} + R_{ik}^i \tilde{u}'_{k,2}, \quad \tilde{\sigma}'_{i2} = R_{ki}^i \tilde{u}'_{k,1} + T_{ik}^i \tilde{u}'_{k,2}. \quad (5)$$

Інтегруючи (5) за товщиною включення, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \tilde{\sigma}'_{i1} dx'_1 &= Q_{ik}^i [\tilde{u}'_k(h) - \tilde{u}'_k(-h)] + R_{ik}^i \int_{-h}^h \tilde{u}'_{k,2} dx'_1, \\ \int_{-h}^h \tilde{\sigma}'_{i2} dx'_1 &= R_{ki}^i [\tilde{u}'_k(h) - \tilde{u}'_k(-h)] + T_{ik}^i \int_{-h}^h \tilde{u}'_{k,2} dx'_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Зважаючи на рівняння рівноваги й умову контакту  $\tilde{t}_i^{\pm} = -\tilde{t}_i^{\pm}$ , за принципом спряження континуумів різної вимірності матимемо

$$\int_{-h}^h \tilde{\sigma}'_{i2} dx'_1 = \tilde{P}'_i(\mathbf{y}) = \Omega_{ij}(\mathbf{y}) \tilde{P}'_j(\mathbf{y}), \quad \tilde{P}'_j(\mathbf{y}) = -\tilde{P}_j^0 + \int_{y_0}^{\mathbf{y}} \tilde{\Sigma}'_j(s) ds, \quad (7)$$

де  $s$  — дугова координата математичного розрізу  $\Gamma_C$ ;  $\tilde{P}_j^0$  — зусилля та заряди на лівому торці включення, координати якого означені точкою  $y_0$ . На основі теореми про середнє значення інтеграла отримаємо зв'язки

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \tilde{\sigma}'_{i1} dx'_1 &= 2h \tilde{\sigma}'_{i1}{}^{\text{avr}} \approx h(\mathbf{y}) \left[ \tilde{t}_i^{\text{ni}}(h) - \tilde{t}_i^{\text{ni}}(-h) \right] = h(\mathbf{y}) \Delta \tilde{t}'_i(\mathbf{y}), \\ \int_{-h}^h \tilde{u}'_{k,2} dx'_1 &= 2h \tilde{u}'_{k,2}{}^{\text{avr}} \approx h(\mathbf{y}) \left[ \tilde{u}'_{k,2}(h) + \tilde{u}'_{k,2}(-h) \right] = h(\mathbf{y}) \Sigma \tilde{u}'_{k,2}(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (8)$$

Знехтуємо у тонкому включенні взаємодію комплексу електричних та механічних полів у поперечних і поздовжніх стосовно серединної поверхні неоднорідності напрямках (як у моделі ортотропного матеріалу з нульовим коефіцієнтом Пуассона чи пружної основи Вінклера). Тоді, використовуючи (7) і (8), зі співвідношень (6) матимемо

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{t}'_i(\mathbf{y}) &= -\frac{Q_{ik}^{\text{ni}}(\mathbf{y})}{h(\mathbf{y})} \left[ \Delta \tilde{u}'_k(\mathbf{y}) + \Delta \tilde{u}'_k{}^*(\mathbf{y}) \right], \\ T_{ik}^{\text{ni}}(\mathbf{y}) \Sigma \tilde{u}'_{k,2}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{h(\mathbf{y})} \left[ \tilde{P}'_i(\mathbf{y}) + \tilde{P}'_i{}^*(\mathbf{y}) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

З огляду на зроблені спрощення, у (9) введено систему коригувальних функцій  $\Delta \tilde{u}'_i{}^*, \tilde{P}'_i{}^*$  (у задачах теорії пружності тіл із тонкостінними включеннями [10] їх ще називають торцьовими переміщеннями та зусиллями). Для тонких дефектів ці функції, зазвичай, не враховують або задають наближеними апіорними залежностями так, щоб задача мала точний розв'язок для трьох основних характерних випадків властивостей неоднорідності (тріщина, абсолютно жорстке включення, суцільне бездефектне тіло, тобто включення з матеріалу середовища). З огляду на побудовані в теорії термопружності тонких дефектів апіорні залежності [10], для дуже тонких включень коригувальні функції можна вважати нульовими.

Позначаючи  $\mathbf{N}^1 = (\mathbf{T}^{\text{ni}})^{-1}$  і зважаючи на те, що  $\Sigma u'_{k,2} = \partial \Sigma u'_k / \partial s$ , отримаємо таку модель тонкого включення

$$\Delta \tilde{t}'_i = -\frac{Q_{ij}^{\text{ni}}}{h} \left[ \Delta \tilde{u}'_j + \Delta \tilde{u}'_j{}^* \right], \quad \frac{\partial \Sigma u'_i}{\partial s} = \frac{N_{ij}^1}{h} \left[ \tilde{P}'_j + \tilde{P}'_j{}^* \right]. \quad (10)$$

Перейшовши у (10) до глобальної системи координат та інтегруючи  $\partial \Sigma u_k / \partial s$  уздовж дуги  $\Gamma_C$  від лівого торця  $y_0$  до точки колокації  $y$ , матимемо

$$\Delta \tilde{\mathbf{t}}(y) = - \frac{\mathbf{V}(y) \left[ \Delta \tilde{\mathbf{u}}(y) + \Delta \tilde{\mathbf{u}}^*(y) \right]}{h(y)},$$

$$\Sigma \tilde{\mathbf{u}}(y) = 2\tilde{\mathbf{u}}^0 + \int_{y_0}^y \frac{\mathbf{W}(s) \left[ \tilde{\mathbf{P}}(s) + \tilde{\mathbf{P}}^*(s) \right]}{h(s)} ds. \quad (11)$$

Тут  $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{Q}^i \boldsymbol{\Omega}$ ,  $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{N}^1 \boldsymbol{\Omega}$ ;  $\tilde{\mathbf{u}}^0$  — середні значення переміщень та електричного потенціалу на лівому торці включення. Середні значення переміщень та електричного потенціалу на лівому торці тонкого включення визначаємо з рівнянь рівноваги

$$\tilde{P}_j^n + \tilde{P}_j^0 - \int_{\Gamma_C^+} \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0, \quad (12)$$

де  $\tilde{P}_j^n$  — зусилля й електричні заряди, зосереджені на правому торці тонкого включення.

### 3. Концентрація напружень та електричних зміщень у п'єзоелектричному тілі на вершині тонкого включення

Дослідимо рівновагу приторцевої частини включення за припущення, що торець включення заокруглено. Систему координат виберемо так, як зображено на рис. 2.

Рівняння електричної та статичної рівноваги уявно відсіченої частини включення з урахуванням умов  $\Sigma \tilde{\mathbf{t}} = -\Sigma \tilde{\mathbf{t}}^1$  ідеального електромеханічного контакту включення з середовищем мають вигляд

$$\int_{-h}^h \tilde{\sigma}_{i1}(r, x_2) dx_2 = - \int_0^r \Sigma \tilde{t}_i(r) dr. \quad (13)$$

У разі  $r \rightarrow 0$  півтовщина включення змінюється як  $h(r) = \sqrt{r} \sqrt{2\rho - r} + O(r^2)$ , де  $\rho$  — радіус заокруглення вершини включення. Тому ліву частину у співвідношенні (13) можна подати у вигляді

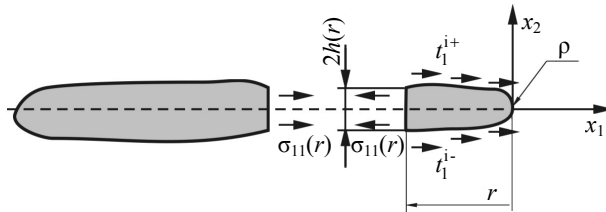


Рис. 2. Схема об'єкту дослідження

$$\int_{-h}^h \tilde{\sigma}_{i1}(r, x_2) dx_2 \approx 2h(r) \tilde{\sigma}_{i1}(r). \quad (14)$$

З урахуванням (14) напруження та електричні зміщення  $\tilde{\sigma}_{i1} = \tilde{\sigma}_{i1}(r)|_{r=0}$  на торці включення, відповідно до (13) дорівнюють

$$\tilde{\sigma}_{i1} = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_0^r \Sigma \tilde{t}_i(r) dr}{2h(r)} = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_0^r \Sigma \tilde{t}_i(r) dr}{2\sqrt{r}\sqrt{2\rho}} = -\frac{1}{\sqrt{2\rho}} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \Sigma \tilde{t}_i(r). \quad (15)$$

Під час знаходження границі (15) використано правило Лопітала.

Для визначення напружень та електричних зміщень  $\tilde{\sigma}_{i2}$  в матриці у вершині тонкого п'єзоелектричного включення обчислимо деформації та градієнти електричного потенціалу останнього для  $r \rightarrow 0$ . Оскільки відповідно до спрощень, використаних у моделі (11) тонкого включення,  $\tilde{u}_{i,2}(r) \approx \Delta \tilde{u}_i(r) / [2h(r)]$ , то на його торці

$$\tilde{u}_{i,2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta \tilde{u}_i(r)}{2h(r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta \tilde{u}_i(r)}{2\sqrt{r}\sqrt{2\rho - r}} = \frac{1}{\sqrt{8\rho}} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta \tilde{u}_i(r)}{\sqrt{r}}. \quad (16)$$

Використовуючи (15) і (16), на основі електропружного аналога узагальненого закону Гука (3) й умов контакту  $\tilde{\sigma}_{i1}^i = \tilde{\sigma}_{i1}$ ,  $\tilde{u}_{i,2}^i = \tilde{u}_{i,2}$  можна обчислити напруження й електричні зміщення  $\tilde{\sigma}_{i2}$  в тілі біля вершини тонкого включення.

Відповідно до (15), (16) та умов скінченності напружень й електричних зміщень, крайові функції  $\Sigma \tilde{t}_i$  та  $\Delta \tilde{u}_i$  біля кінців лінії стрибків (розриву фізико-механічних полів) змінюються таким чином

$$\Delta \tilde{u}_i(s) = \Delta \tilde{u}_i^0 \sqrt{s} + O(s), \quad \Sigma \tilde{t}_i(s) = \Sigma \tilde{t}_i^0 / \sqrt{s} + O(1), \quad (17)$$

де  $s$  — дугова координата, що відраховується від вершини неоднорідності уздовж лінії  $\Gamma_C$  чи її продовження.

У механіці для оцінювання напружено-деформованого стану, зазвичай, не використовують границь крайових функцій  $\Delta \tilde{u}_i^0$  та  $\Sigma \tilde{t}_i^0$ , а вводять поняття коефіцієнтів інтенсивності напружень та електричних зміщень (КІНЕЗ) [5]. За аналогією із задачами теорії тріщин введемо такі вектори коефіцієнтів інтенсивності

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} \mathbf{L} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{u}}(s), \quad \tilde{\mathbf{k}}^{(2)} = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(s), \quad (18)$$

де  $\mathbf{L}$  — дійсна матриця Barnett-Lothe [5], що залежить лише від властивостей матеріалу та під час повертання осей координат  $Ox_1x_2$ , в яких обчислюються пружні

сталі, її компоненти змінюються за тензорним законом.  $\tilde{\mathbf{k}}^{(1)} = [K_{21}, K_{11}, K_{31}, K_{41}]^T$ ,

$\tilde{\mathbf{k}}^{(2)} = [K_{12}^{(2)}, K_{22}^{(2)}, K_{32}, K_{42}]^T$  (символ «T» означає операцію транспонування);  $K_{ij}$  —

узагальнені КІНЕЗ. Для електрично-непроникувальної тріщини  $K_{i2} = 0$ ,  $K_{11} = K_1$ ,

$K_{21} = K_{II}, K_{31} = K_{III}, K_{41} = K_{IV} \equiv K_D$ , де  $K_I, K_{II}, K_{III}, K_{IV} \equiv K_D$  — класичні КІНЕЗ теорії тріщин [5].

У задачах теорії тонких включень в ізотропних та анізотропних матеріалах [10] введено дещо інші узагальнені КІН  $K_{12}$  та  $K_{22}$ . Для їхнього обчислення за узагальненими КІНЕЗ (18) необхідно використати формули перетворення

$$k_i^{(2)} = S_{ji} \tilde{k}_j^{(2)} \quad (i=1,2; j=\overline{1,4}). \quad (19)$$

Тут  $\mathbf{k}^{(2)} = [K_{22}, K_{12}]^T$  — вектор узагальнених КІН;  $\mathbf{S}$  — друга дійсна матриця Barnett-Lothe [5].

У випадку тіла, матеріал якого є однорідний ізотропний діелектрик, на підставі (2), (3), (15), (16), (18) і (19) отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{\kappa+1}{\sqrt{\pi\rho(\kappa-1)}} K_{12}, & \sigma_{22} &= \frac{2}{\sqrt{\pi\rho}} K_{11} + \frac{\kappa-3}{\sqrt{\pi\rho(\kappa-1)}} K_{12}, \\ \sigma_{13} &= K_{32}/\sqrt{\pi\rho}, & \sigma_{23} &= K_{31}/\sqrt{\pi\rho}, & D_1 &= K_{42}/\sqrt{\pi\rho}, & D_2 &= K_{41}/\sqrt{\pi\rho}, \end{aligned} \quad (20)$$

де  $\kappa = 3 - 4\nu$ ;  $\nu$  — коефіцієнт Пуассона. Вирази (7) для напружень узгоджуються з відповідними залежностями, отриманими в [11].

#### 4. Розв'язування зовнішньої задачі для тіла з лінією стрибків

Відповідно до [5] зовнішня задача зводиться до розв'язування дуальної системи інтегральних рівнянь

- якщо точка колокації  $\mathbf{y}$  лежить на гладкій поверхні  $\Gamma$  тіла

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{u}_i(\mathbf{y}) &= \int_{\Gamma_c^+} [U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ &+ \text{RPV} \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{t}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{u}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}); \end{aligned} \quad (21)$$

- якщо точка колокації  $\mathbf{y}$  лежить на гладкій серединній поверхні  $\Gamma_c^+$  неоднорідності

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma \tilde{u}_i &= \int_{\Gamma} [U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ &+ \text{RPV} \int_{\Gamma_c^+} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{u}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \\ \frac{1}{2} \Delta \tilde{t}_i &= n_j^+(\mathbf{y}) \left[ \int_{\Gamma} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{t}_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{u}_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \right. \\ &\left. + \text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{t}_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{HPV} \int_{\Gamma_c^+} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Тут символами «RPV», «CPV», «HPV» позначено головні значення відповідно невластивого, сингулярного та гіперсингулярного інтегралів;  $U_{ij}, T_{ij}, D_{ijk}, S_{ijk}$  — сингулярні та гіперсингулярні ядра [5].

Зовнішню та внутрішню задачі розв'язували сумісно за допомогою методу граничних елементів [12].

### 5. Приклад

Розглянемо безмежний п'єзоелектричний простір, властивості якого відповідають характеристикам матеріалу PZT-4 [6] гексагонального класу симетрії *bmm*, вісь симетрії якого спрямовано вздовж осі  $Ox_2$ . На відрізку  $[-a, a]$  дійсної осі розташоване тонке пружне ізотропне включення завтовшки  $2h$  ( $h = 0,01a$ ). Відносну жорсткість включення означимо величиною  $k = G^i/C_{66}$ , де  $G^i$  — модуль зсуву матеріалу включення. Коефіцієнт Пуассона для включення вважатимемо рівним 0,3. Приймаючи діелектричну сталу включення значно більшою за відповідну для матеріалу середовища (у розрахунках приймали  $\kappa^i = 10^{10}$  нФ/м), на основі (11) отримаємо модель електропровідного включення. І навпаки, якщо вважати, що діелектрична стала включення близька до відповідної у вакуумі ( $\kappa^i = \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-3}$  нФ/м), то із (11) матимемо модель пружного включення-діелектрика, що не поляризується. На рис. 3 зображено об'єкт дослідження та залежність узагальнених КІНЕЗ від відносної жорсткості  $k$  електропровідного (суцільні криві) та діелектричного (штрихові лінії) включень за механічного (рис. 3а) та електричного (рис. 3б) навантажень на безмежності. Величина  $D^*$  є номінальне електричне зміщення (в Кл/м<sup>2</sup>), модуль якого дорівнює модулю навантаження  $\sigma$  (в ГПа), а  $\sigma^*$  — номінальні напруження (в ГПа), модуль яких відповідає модулю прикладеного електричного зміщення  $D$  (в Кл/м<sup>2</sup>).

Для близьких до граничних випадків пружних та електричних сталих включення, обчислені за дії механічного навантаження, узагальнені КІНЕЗ добре

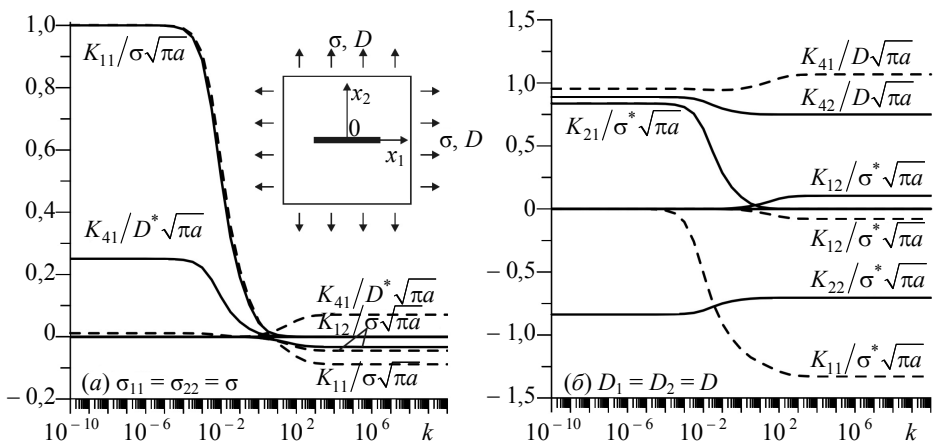


Рис. 3. Узагальнені КІНЕЗ пружних електропровідного (а) та діелектричного (б) включень



узгоджуються з відповідними значеннями для електрично-непроникної тріщини (параметри включення:  $k = 10^{-10}$ ,  $\kappa^i = \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-3}$  нФ/м) й електропровідного жорсткого включення ( $k = 10^{-10}$ ,  $\kappa^i = 10^{10}$  нФ/м). За дії електричного навантаження КІНЕЗ  $K_{41}$  сильно податного включення-діелектрика приблизно на 4 % менший, ніж відповідний для електрично-непроникної тріщини.

На відміну від суто пружного випадку [10], де для тріщин ненульовими можуть бути лише КІН  $K_{i1}$ , а для жорстких включень — лише  $K_{i2}$ , за електричного навантаження п'єзоелектричного середовища з тонким жорстким включенням-діелектриком така закономірність уже не є обов'язкова (рис. 3б).

Внаслідок відмінності від нуля КІНЕЗ  $K_{41}$  (рис. 3а) тріщина з електричним контактом берегів за механічного навантаження середовища, окрім концентрації напружень, породжує значні градієнти вектора електричного зміщення. За електричного ж навантаження середовища, навпаки, постає істотна концентрація механічних напружень (рис. 3б).

**Висновки.** Тонкі неоднорідності будови матеріалу породжують значну концентрацію напружень біля своїх вершин. Як і в пружному випадку, для тонких включень у п'єзоелектричних матеріалах характерна коренева особливість поля напружень та електричних зміщень біля вершин неоднорідності, тому під час числового розв'язування рівнянь поставленої задачі слід враховувати відповідне поведіння крайових функцій. Поле напружень та електричних зміщень біля вершини тонкого включення в п'єзоелектрику загалом можна описати за допомогою 8 дійсних величин — узагальнених КІНЕЗ, 4 з яких залежать від розривів переміщень та електричного потенціалу й у випадку електрично-непроникної тріщини еквівалентні класичним КІНЕЗ. Інші 4 узагальнені КІНЕЗ пов'язані з розривами напружень та електричного зміщення на неоднорідності. Введення останніх дає можливість моделювати тріщини з електрично-контактуючими берегами та пружні включення в широкому спектрі властивостей матеріалу останніх.

## Література

- [1] Бурак, Я. Й. Вибрані праці / Я. Й. Бурак. — Львів: НУЦММ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, в-во «Ахіл», 2001. — 352 с.
- [2] Hao, T. H. A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications / T. H. Hao, Z. Y. Shen // Eng. Fract. Mech. — 1994. — Vol. 47. — P. 793-802.
- [3] Denda, M. BEM analysis of semipermeable piezoelectric cracks / M. Denda // Key Engng. Materials. — 2008. — Vol. 383. — P. 67-84.
- [4] Лобода, В. В. Задача термоелектромагнітопружності для п'єзоелектричного/п'єзомагнітного біматеріалу з міжфазною тріщиною / В. В. Лобода, Т. В. Ходанен // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2008. — Т. 51, № 3. — С. 121-132.
- [5] Qin, Q. H. Green's function and boundary elements of multifield materials / Q. H. Qin. — Oxford: Elsevier, 2007. — 254 p.
- [6] Партон, В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. — Москва: Наука, 1988. — 472 с.
- [7] Калоеров, С. А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей / С. А. Калоеров, А. И. Баева, О. И. Бороненко. — Донецк: ООО «Юго-Восток, Лтд», 2007. — 268 с.
- [8] Bardzokas, D. Mathematical methods in electro-magneto-elasticity / D. Bardzokas, M. L. Filshitskiy, L. A. Filshitskiy. — New York: Springer, 2007. — 530 p.

- [9] Сулим, Г. Антиплоска задача для тонкого пружного включення у п'єзоелектричному просторі / Г. Сулим, Р. Рабош // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2008. — Вип. 69. — С. 189-202.
- [10] Сулим, Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. — Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. — 716 с.
- [11] Бережницький, Л. Т. До теорії концентраторів напружень із заокругленими вершинами / Л. Т. Бережницький, П. С. Качур, Л. П. Мазурак // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1989. — Т. 25, № 5. — С. 28-41.
- [12] Pasternak, Ia. M. Thin inclusions theory integral equations numerical solution using the boundary element method procedure / Ia. M. Pasternak, H. T. Sulym // Proc. Int. Conf. «Integral Equations — 2010», 25-27 August 2010 (Lviv). — Lviv: PAIS, 2010. — P. 104-108.

## Stress and electric displacement concentration on thin inclusions in piezoelectric solids

Heorhiy Sulym, Iaroslav Pasternak

*The problem on two-dimensional electro-elastic state of solids containing thin inhomogeneities is considered. The solution procedure based on the coupling principle for continuums of different dimension is proposed. It is proved that the stress and electric displacement fields at the thin inhomogeneities possess a square root singularity. Equations, which relate the stress and electric displacement intensity factors with stress and electric displacement concentration factors are obtained.*

## Концентрация напряжений и электрических смещений на тонких включениях в пьезоэлектрических телах

Георгий Сулим, Ярослав Пастернак

*Исследована задача определения двумерного электронапряженного состояния тел с тонкими неоднородностями и предложена схема ее решения на основе принципа сопряжения континуумов разной размерности. Показано, что поля напряжений и электрических смещений возле вершин тонких неоднородностей имеют корневую особенность. Получены соотношения между коэффициентами концентрации и интенсивности напряжений и электрических смещений.*

Отримано 17.11.10