УДК 517.5

Наближене обчислення криволінійних інтегралів типу згортки з логарифмічною функцією чи її похідною

Михайло Сухорольський[1], Олеся Любицька[2]

[1] д. ф-м. н., проф., Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: sukhorolsky@gmail.com
[2] Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: olesia.liubytska@gmail.com

Ґрунтуючись на послідовнісному підході до подання сингулярних функцій, досліджено збіжність числових схем дискретизації контурних інтегралів типу згортки з функцією, що має логарифмічну особливість або особливість, що є похідною від логарифмічної функції. Розглянуто згортки цих функції з функціями гельдерівського класу. Числова схема передбачає наближене обчислення невласних інтегралів на замкнутих кривих як границь послідовностей інтегралів від достатньо гладких функцій, граничними для яких (у сенсі слабкої збіжності) є сингулярні функції. Доведено теореми про збіжність відповідних інтегралів та інтегральних сум за певних обмежень стосовно залежності параметра гладкості підінтегральної функції від кількості відрізків розбиття контуру інтегрування. Одержано асимптотичні оцінки, які визначають похибку наближення криволінійних інтегралів відповідними інтегральними сумами на замкнутих кривих Ляпунова та, зокрема, на колі.

Ключові слова: логарифмічний потенціал, криволінійні інтеграли типу згортки, наближення інтегралів інтегральними сумами.

Вступ. Двовимірні крайові задачі теорії оболонок, гідростатики, електростатики та інших прикладних наук можна звести (методом потенціалів) до інтегральних рівнянь, ядро яких містить логарифмічну функцію або похідну від логарифмічної функції. У роботі [1] інтегральні рівняння такого типу методом колокацій із використанням рівномірної апроксимації густин зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь і встановлено умови збіжності їх розв'язків. У монографії [2] розвинуто метод «джерел» стосовно числового розв'язування інтегральних рівнянь з ядром Коші, у яких інтеграли замінено відповідними інтегральними сумами. У пропонованій роботі, ґрунтуючись на послідовнісному підході до подання сингулярних функцій [3], досліджено збіжність числових схем дискретизації інтегралів типу згортки методом «джерел» із функціями з ядрами, що мають логарифмічну особливість або особливість похідної від логарифмічної функції.

1. Оцінка відхилень інтегральних сум від інтегралів на колі

Розглянемо криволінійні інтеграли

$$I\left(t_0\right)=\int_L \ln\left|t_0-t\right| g(t)\,dl(t)\,, \tag{1}$$

$$J(t_0)=\int_L \frac{\partial}{\partial n(t_0)}\ln|t_0-t|\,g(t)\,dl(t)=\int_L \frac{(x_0-x)n_1(t_0)+(y_0-y)n_2(t_0)}{|t_0-t|^2}g(t)\,dl(t), \quad (2)$$

де $|t_0-t|=\sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2}$; $L=\partial D_0$ — замкнута крива Ляпунова; D_0 — обмежена область; $g(t)$ — функція гельдерівського класу, $|g(t')-g(t'')|\le A|t'-t''|^{\mu}$, $t', t''\in L$, $0<\mu\le 1$, $A=const$; $t_0(x_0, y_0)\in D_0$; $\frac{\partial}{\partial n(t_0)}$ — похідна за напрямком одиничного вектора $\overline{n}(t_0)=\{n_1(t_0); n_2(t_0)\}$.

Дослідимо збіжність інтегральних сум для інтегралів (1) і (2) залежно від положення точки t_0. Зазначимо, що ці інтеграли є невласні, якщо точка t_0 належить контуру L.

Виберемо дві множини точок на кривій L

$$E_k=\{t_k(x_k, y_k),\ k=\overline{1,n}\},\ \ t_{n+1}=t_1;\ \ E_{0k}=\{t_{0k}(x_{0k}, y_{0k}), k=\overline{1,n}\},\ \ t_{0n+1}=t_{01}.$$

Точки t_k розбивають криву L на n частин L_k, точки t_{0k} довільно вибираємо на дугах $t_{k-1}t_k$.

Множини E_k і E_{0k} називають [1, 2], відповідно, множиною точок розбиття кривої L і множиною контрольних точок (точок колокації).

Розглянемо також інтегральні суми для інтегралів (1) і (2)

$$I_n(t_0)=\sum_{k=1}^{n}\ln|t_0-t_k|\,g(t_k)\Delta l_k, \quad (3)$$

$$J_n(t_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_0-x_k)n_1(t_0)+(y_0-y_k)n_2(t_0)}{|t_0-t_k|^2}g(t_k)\Delta l_k, \quad (4)$$

де $\Delta l_k=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(y_k-y_{k-1})^2}$.

Якщо $g(t)=1$, L — коло радіуса R із центром у початку координат і $\frac{\partial}{\partial n(t_0)}=$ $=\partial/\partial\rho$, де $\rho=\sqrt{x_0^2+y_0^2}, 0\le\rho<R$, то для інтеграла (1) можна одержати явний вираз. Вводячи полярну систему координат, одержимо такі координати точок t та t_0

$$x=R\cos\varphi,\ \ y=R\sin\varphi,\ \ 0\le\varphi<2\pi;\ \ x_0=\rho\cos\psi,\ \ y_0=\rho\sin\psi,\ \ 0\le\psi<2\pi.$$

Тоді інтеграли (1) і (2) набудуть вигляду

$$I(t_0)=\frac{R}{2}\int_0^{2\pi}\ln\left[\rho^2+R^2-2\rho R\cos(\psi-\varphi)\right]d\varphi=2\pi R\ln R,$$

$$J(t_0)=R\int_0^{2\pi}\frac{\rho-R\cos(\psi-\varphi)}{\rho^2+R^2-2\rho R\cos(\psi-\varphi)}d\varphi=0. \quad (5)$$

Координати точок множин E_k і E_{0k} у полярній системі такі

$$x_k = R\cos\varphi_k\,, \quad y_k = R\sin\varphi_k\,, \quad x_{0k} = R\cos\psi_k\,, \quad y_{0k} = R\sin\psi_k\,,$$

де

$$\varphi_k = 2\pi k/n\,, \qquad 2\pi(k-1)/n \le \psi_k \le 2\pi k/n\,.$$

Розглянемо дві множини E_{0k} точок. Для першої множини точок $t'_{0k}\left(x'_{0k}, y'_{0k}\right) \in E_{0k}$ маємо $\psi'_{0k} = 2\pi k/n$ (ці точки співпадають із точками розбиття). Друга множина точок $t''_{0k}\left(x''_{0k}, y''_{0k}\right) \in E_{0k}$ є середні точки дуг розбиття та $\psi''_{0k} = 2\pi k/n - \pi/n = (2k-1)\pi/n$.

Приймаємо, що $\Delta l_k = 2\pi R/n$, тоді інтегральні суми (3), (4), набудуть вигляду

$$I_n(t_0) = \frac{\pi R}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left[\rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos(\psi - \varphi_k)\right],$$

$$J_n(t_0) = \frac{2\pi R}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho - R\cos(\psi - \varphi_k)}{\rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos(\psi - \varphi_k)}\,.$$

Одержані інтегральні суми подаємо в явному вигляді [4]

$$I_n(t_0) = \frac{\pi R}{n}\ln\prod_{k=1}^{n}\left[\rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos(\psi - \varphi_k)\right] =$$

$$= \frac{\pi R}{n}\ln\left[\rho^{2n} + R^{2n} - 2\rho^n R^n\cos(n\psi)\right], \tag{6}$$

$$J_n(t_0) = \frac{2\pi R\,\rho^{n-1}\left[\rho^n - R^n\cos(n\psi)\right]}{\rho^{2n} + R^{2n} - 2\rho^n R^n\cos(n\psi)}\,. \tag{7}$$

Оцінимо порядок малості відхилення інтегральних сум (8), (9) від відповідних інтегралів (5), $\left|I(t_0) - I_n(t_0)\right|, \left|J(t_0) - J_n(t_0)\right|$, якщо $t_0 \to t_{0k} \in L(\rho \to R)$ уздовж нормалі до L у точці t_{0k}. При цьому вважаємо, що граничний перехід відбувається за законом

$$\rho = R\left(1 - \varepsilon_0/n^{\alpha}\right), \tag{8}$$

де ε_0 і α — малі числа, $0 < \varepsilon_0 < 1$, $0 < \alpha < 1$.

Теорема 1. Відхилення інтегральних сум (6), (7) від інтегралів (5) у разі $n \to \infty$ за виконання співвідношення (8) справджують нерівності

$$\left|I(t_0) - I_n(t_0)\right| \le \frac{2\pi R}{n(1+\varepsilon_0)^{n^{1-\alpha}}}\,, \qquad \text{якщо } t_0 \to t'_{0k}\,,$$

$$\left|I(t_0) - I_n(t_0)\right| \le \frac{2\pi R}{n(1+\varepsilon_0)^{n^{1-\alpha}}}\,, \qquad \text{якщо } t_0 \to t''_{0k}\,,$$

$$\left|J\left(t_0\right)-J_n\left(t_0\right)\right| \le \frac{A}{\left(1+\varepsilon_0\right)^{n^{1-\alpha}}}, \qquad \text{якщо } t_0 \to t'_{0k},$$

$$\left|J\left(t_0\right)-J_n\left(t_0\right)\right| \le \frac{2\pi}{\left(1+\varepsilon_0\right)^{n^{1-\alpha}}}, \qquad \text{якщо } t_0 \to t''_{0k}, \tag{9}$$

де $A = const$.

Доведення. Для лівої частини перших двох нерівностей (9) з урахуванням першої формули (5) і формули (6) отримаємо такий вираз

$$\left|I\left(t_0\right)-I_n\left(t_0\right)\right| = \left|2\pi R\ln R - \frac{\pi R}{n}\ln\left[\rho^{2n}+R^{2n}-2\rho^n R^n\cos\left(n\psi\right)\right]\right| =$$

$$= \frac{\pi R}{n}\left|\ln\left[1+\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2n}-2\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n}\cos\left(n\psi\right)\right]\right|.$$

Звідси, якщо $t_0 \to t'_{0k}$, маємо значення полярного кута ψ'_{0k} і з урахуванням залежності (10) знайдемо оцінку

$$\left|I\left(t_0\right)-I_n\left(t_0\right)\right| = \frac{\pi R}{n}\left|\ln\left[1+\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2n}-2\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n}\cos(2\pi k)\right]\right| = \frac{2\pi R}{n}\ln\left[1-\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n}\right] =$$

$$= \frac{2\pi R}{n}\ln\left[1-\left(1-\frac{\varepsilon_0}{n^\alpha}\right)^{n}\right] \le \frac{2\pi R}{n}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{n^\alpha}\right)^{n} \le \frac{2\pi R}{n}\frac{1}{\left(1+\varepsilon_0\right)^{n^{1-\alpha}}}.$$

Аналогічним чином отримаємо оцінку для граничного випадку $t_0 \to t''_{0k}$

$$\left|I\left(t_0\right)-I_n\left(t_0\right)\right| = \frac{2\pi R}{n}\ln\left[1+\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n}\right] \le \frac{2\pi R}{n}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{n^\alpha}\right)^{n} \le \frac{2\pi R}{n}\frac{1}{\left(1+\varepsilon_0\right)^{n^{1-\alpha}}}.$$

Третю нерівність (9) одержимо з використанням відповідних формул (5), (7). Для випадку $t_0 \to t'_{0k}$ знайдемо

$$\left|J\left(t_0\right)-J_n\left(t_0\right)\right| = \frac{2\pi R\rho^{n-1}\left|\rho^n - R^n\cos\left(n\psi'\right)\right|}{\rho^{2n}+R^{2n}-2\rho^n R^n\cos\left(n\psi'\right)} =$$

$$= 2\pi\left(1-\frac{\varepsilon_0}{n^\alpha}\right)^{n-1}\frac{\left(1-\varepsilon_0/n^\alpha\right)^n-1}{1+\left(1-\varepsilon_0/n^\alpha\right)^{2n}-2\left(1-\varepsilon_0/n^\alpha\right)^n} =$$

$$= 2\pi\frac{\left(1-\varepsilon_0/n^\alpha\right)^{n-1}}{1-\left(1-\varepsilon_0/n^\alpha\right)^n} \le A\left(1-\frac{\varepsilon_0}{n^\alpha}\right)^{n-1} \le \frac{A}{\left(1+\varepsilon_0\right)^{n^{1-\alpha}}}.$$

Четверту нерівність із (9) одержимо аналогічним чином з урахуванням формули (8) і значення полярного кута ψ''_{0k}

$$\left|J(t_0)-J_n(t_0)\right|=\frac{2\pi R\rho^{n-1}\left|\rho^n-R^n\cos(n\psi'')\right|}{\rho^{2n}+R^{2n}-2\rho^nR^n\cos(n\psi'')}=2\pi\left(1-\frac{\varepsilon_0}{n^{\alpha}}\right)^{n-1}\le\frac{2\pi}{\left(1+\varepsilon_0\right)^{n^{1-\alpha}}}.$$

Теорему доведено.

Зауваження. Нерівності (9) визначають похибку асимптотичного наближення інтегралів інтегральними сумами за вибраного закону (8) прямування точки t_0 до точок t'_{0k} (або t''_{0k}).

Якщо у нерівностях (9) формально прийняти $\rho = R$ ($\varepsilon_0 = 0$), то тільки перші дві з них визначають нескінченно малі величини у разі $n \to \infty$. Окрім того, лише друга нерівність (9) для $\varepsilon_0 = 0$ відповідає асимптотичному наближенню першого інтеграла (4) відповідною інтегральною сумою для $\rho = R$, тобто розглядається випадок середньої точки дуги розбиття $\left(t_0 = t''_{0k}\right)$. Тоді

$$\left|I\left(t''_{01}\right)-I_n\left(t''_{01}\right)\right|\le 2\pi R/n .$$

Для випадку наближення другого інтеграла (4) для $\rho = R$ відповідною інтегральною сумою в точці $t_0 = t'_{0n}$ одержимо невизначений вираз.

Теорема 2. Якщо L — коло, а $g(t)$ — задана на L функція, що належить класу Гельдера, то відхилення інтегральної суми (3) від інтеграла (1) для довільного $t_0 \in L$ ($R = \rho$) та $n \to \infty$, справджує нерівність

$$\left|I(t_0)-I_n(t_0)\right|\le A_0/n^{\mu} .$$

де A_0 — стала величина.

Доведення. Оскільки $\rho = R$, то інтеграли в (1) є сингулярні. Розглянемо відповідне відхилення (для визначеності приймемо $R = 1$ і $\psi = \psi_n$)

$$\left|I(t_0)-I_n(t_0)\right|=\left|\int_0^{2\pi}\left[\ln 2+\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi}{2}\right|\right]\left[g(\varphi)-g(\psi_n)\right]d\varphi-\right.$$

$$-\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln 2+\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi_k}{2}\right|\right]\left[g(\varphi_k)-g(\psi_n)\right]+$$

$$\left.+g(\psi_n)\left\{\int_0^{2\pi}\left[\ln 2+\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi}{2}\right|\right]d\varphi-\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln 2+\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi_k}{2}\right|\right]\right\}\right|\le$$

$$\le\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}}\left\{\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi}{2}\right|\left[g(\varphi)-g(\psi_n)\right]-\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi_k}{2}\right|\left[g(\varphi_k)-g(\psi_n)\right]\right\}d\varphi\right|+$$

$$+S_1+S_2\le\left|\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}}\left\{\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi}{2}\right|\left[g(\varphi)-g(\psi_n)\right]+\right.\right.$$

$$+\left|\int_{\varphi_n}^{\varphi_1}\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi}{2}\right|\left[g(\varphi)-g\left(\psi_n\right)\right]d\varphi\right|+\frac{2\pi}{n}\left|\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi_n}{2}\right|\right|\left|g\left(\varphi_n\right)-g\left(\psi_n\right)\right|+$$

$$+S_1+S_2\le\left|\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}}\left\{\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi}{2}\right|\left[g(\varphi)-g\left(\varphi_k\right)\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi}{2}\right|-\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi_k}{2}\right|\right]\left[g\left(\varphi_k\right)-g\left(\psi_n\right)\right]\right\}d\varphi\right|+$$

$$+\left|\int_{\varphi_n}^{\varphi_1}\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi}{2}\right|\left[g(\varphi)-g\left(\psi_n\right)\right]d\varphi\right|+$$

$$+\frac{2\pi}{n}\left|\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi_n}{2}\right|\right|\left|g\left(\varphi_n\right)-g\left(\psi_n\right)\right|+S_1+S_2.$$

Таким чином маємо

$$\left|I\left(t_0\right)-I_n\left(t_0\right)\right|\le S_1+S_2+S_3+S_4, \tag{10}$$

де

$$S_1=\ln 2\sum_{k=1}^{n}\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}}\left[g(\varphi)-g\left(\varphi_k\right)\right]d\varphi,$$

$$S_2=g\left(\psi_n\right)\left\{\int_0^{2\pi}\left[\ln 2+\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi}{2}\right|\right]d\varphi-\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln 2+\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi_k}{2}\right|\right]\right\},$$

$$S_3=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}}\left|\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi}{2}\right|\left[g(\varphi)-g\left(\varphi_k\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi}{2}\right|-\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi_k}{2}\right|\right]\left[g\left(\varphi_k\right)-g\left(\psi_n\right)\right]\right|d\varphi,$$

$$S_4=\int_{\varphi_n}^{\varphi_1}\left|\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi}{2}\right|\right|\left|g(\varphi)-g\left(\psi_n\right)\right|d\varphi+\frac{2\pi}{n}\left|\ln\left|\sin\frac{\psi_n-\varphi_n}{2}\right|\right|\left|g\left(\varphi_n\right)-g\left(\psi_n\right)\right|.$$

Для першого S_1 і четвертого S_4 з цих співвідношень з урахуванням умови Гельдера $\left|g(\varphi)-g\left(\psi_n\right)\right|\le A\left|\varphi-\psi_n\right|$, нерівності $\left|\ln\left|\sin\left[\left(\psi_n-\varphi\right)/2\right]\right|\right|\le A_1\ln\left|\psi_n-\varphi\right|$ й умови $\left|\varphi-\psi_n\right|\le 2\pi/n$ маємо оцінку

$$S_1\le A\ln 2\sum_{k=1}^{n}\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}}\left|\varphi-\varphi_k\right|^{\mu}d\varphi\le\frac{A_2}{n^{\mu}},$$

$$S_4 \le A_1 \int\limits_{\varphi_n}^{\varphi_1} \left|\psi_n - \varphi\right|^{\mu} \ln\left|\psi_n - \varphi\right| d\varphi + \frac{A_3}{n}\left|\varphi_n - \psi_n\right|^{\mu} \left|\ln\left|\psi_n - \varphi_n\right|\right| \le \frac{A_2 \ln n}{n^{1+\mu}} .$$

Для S_2 за врахування першої нерівності з (9) для $\varepsilon_0 = 0$ маємо: $S_2 \le A_4/n$.

Із використанням формули Лагранжа перетворимо вираз S_3 за змінною t на проміжку $\left[\varphi, \varphi_k\right]$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \left| \ln\left|\sin\frac{\psi_n - \varphi}{2}\right| \left[g(\varphi) - g\left(\varphi_k\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\ln\left|\sin\frac{\psi_n - \varphi}{2}\right| - \ln\left|\sin\frac{\psi_n - \varphi_k}{2}\right| \right] \left[g\left(\varphi_k\right) - g\left(\psi_n\right)\right] \right| d\varphi =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \left| \ln\left|\sin\frac{\psi_n - \varphi}{2}\right| \left[g(\varphi) - g\left(\varphi_k\right)\right] + \frac{\left[g\left(\varphi_k\right) - g\left(\psi_n\right)\right]\left(\varphi - \varphi_k\right)}{2\operatorname{tg}\frac{\psi_n - \overline{\varphi}_k}{2}} \right| d\varphi \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \left| \ln\left|\sin\frac{\psi_n - \varphi}{2}\right| \right| \left| g(\varphi) - g\left(\varphi_k\right)\right| d\varphi + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \left| \frac{\left[g\left(\varphi_k\right) - g\left(\psi_n\right)\right]\left(\varphi - \varphi_k\right)}{2\operatorname{tg}\frac{\psi_n - \overline{\varphi}_k}{2}} \right| d\varphi ,$$

де $\overline{\varphi}_k \in \left(\varphi, \varphi_k\right)$.

З огляду на обмеженість підінтегральних функцій, оскільки $\psi_n \notin \left[\varphi_1, \varphi_n\right]$, з урахуванням нерівності $\left|\varphi - \varphi_k\right| \le 2\pi/n$ і умови Гельдера $\left|g(\varphi) - g\left(\varphi_k\right)\right| \le$ $\le A\left|\varphi - \varphi_k\right|^{\mu} \le A'/n^{\mu} \left(\varphi \in \left[\varphi_k, \varphi_{k+1}\right]\right)$, а також рівності $\varphi_{k+1} - \varphi_k = 2\pi/n$, одержимо

$$S_3 \le \sum_{k=1}^{n-1} \left| \ln\left|\sin\frac{\psi_n - \overline{\varphi}_k}{2}\right| \right| \int\limits_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \left|\varphi - \varphi_k\right|^{\mu} d\varphi + \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\left[g\left(\varphi_k\right) - g\left(\psi_n\right)\right]}{2\operatorname{tg}\frac{\psi_n - \overline{\varphi}_k}{2}} \right| \int\limits_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \left|\varphi - \varphi_k\right| d\varphi \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{A_4}{n^{1+\mu}} + \frac{A_5}{n^2} \right) \le \frac{A_6}{n^{\mu}} .$$

Сума нескінченно малих величин у формулі (10) еквівалентна нескінченно малій найнижчого порядку, тобто

$$\left| I\left(t_0\right) - I_n\left(t_0\right) \right| \le S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \le A_0/n^{\mu} .$$

Теорему доведено.

Теорема 3. Якщо L — коло, а $g(t)$ — функція, що належить класу Гельдера, то відхилення інтегральних сум (3), (4) від інтегралів (1), (2) у довільній точці $t_0 \in D$ $(0 < \rho < 1)$ у разі $n \to \infty$ справджують нерівності

$$\left|I(t_0) - I_n(t_0)\right| \le A(\rho)/n^{\mu}, \qquad \left|J(t_0) - J_n(t_0)\right| \le B(\rho)/n^{\mu}, \tag{11}$$

де $A(\rho)$, $B(\rho)$ — скінченні величини.

Доведення. Проведемо елементарні перетворення відхилення інтегральних сум (3), (4) від інтегралів (1), (2). Приймемо також для визначеності $\psi = \psi_n$ і $R = 1$

$$\left|I_2(t_0) - I_{2n}(t_0)\right| = S_1 + S_2, \qquad \left|J_2(t_0) - J_{2n}(t_0)\right| = S_3 + S_4.$$

Тут

$$S_1 = \left|\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln\left[\rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\psi_n - \varphi)\right]\left[g(\varphi) - g(\psi_n)\right]d\varphi - \right.$$
$$\left. - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left[\rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\psi_n - \varphi_k)\right]\left[g(\varphi_k) - g(\psi_n)\right]\right|,$$

$$S_2 = \left|g(\psi)\right|\left|\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln\left[\rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\psi_n - \varphi)\right]d\varphi - \right.$$
$$\left. - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left[\rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\psi_n - \varphi_k)\right]\right|,$$

$$S_3 = \left|\int_0^{2\pi} \frac{\left[\rho - \cos(\psi_n - \varphi)\right]\left[g(\varphi) - g(\psi_n)\right]}{\rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\psi_n - \varphi)}d\varphi - \right.$$
$$\left. - \frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left[\rho - \cos(\psi_n - \varphi_k)\right]\left[g(\varphi_k) - g(\psi_n)\right]}{\rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\psi_n - \varphi_k)}\right|,$$

$$S_4 = \left|g(\psi_n)\right|\left|\int_0^{2\pi} \frac{\left[\rho - \cos(\psi_n - \varphi)\right]}{\rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\psi_n - \varphi)}d\varphi - \frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left[\rho - \cos(\psi_n - \varphi_k)\right]}{\rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\psi_n - \varphi_k)}\right|,$$

де $\psi_n = 2\pi$ або $\psi_n = (2n-1)\pi/n$.

Для виразів S_2 та S_4 маємо оцінки (11). Вираз для S_1 перетворимо так

$$S_1 = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \left\{ \ln\left[\rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\psi_n - \varphi)\right]\left[g(\varphi) - g(\psi_n)\right] - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \ln\left[\rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\psi_n - \varphi_k)\right]\left[g(\varphi_k) - g(\psi_n)\right]\right\} d\varphi\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \left\{ \ln\left[\rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\psi_n - \varphi)\right]\left[g(\varphi) - g(\varphi_k)\right] + \right.\right.$$

$$+\left\{\ln\left[\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi\right)\right]-\ln\left[\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi_k\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\left[g\left(\varphi_k\right)-g\left(\psi_n\right)\right]\Big\}d\varphi+\int\limits_{\varphi_n}^{\varphi_{n+1}}\ln\left[\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi\right)\right]\left[g(\varphi)-g\left(\psi_n\right)\right]d\varphi-$$

$$-\frac{2\pi}{n}\ln\left[\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi_k\right)\right]\left[g\left(\varphi_k\right)-g\left(\psi_n\right)\right]\Bigg|.$$

Оцінимо кожний із доданків

$$2S_1\le S_1'+S_1''+S_1''', \tag{12}$$

$$S_1'=\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}}\Big|\ln\left[\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi\right)\right]\left[g(\varphi)-g\left(\varphi_k\right)\right]+$$

$$+\left\{\ln\left[\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi\right)\right]-\ln\left[\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi_k\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\left[g\left(\varphi_k\right)-g\left(\psi_n\right)\right]\Big|d\varphi, \tag{13}$$

$$S_1''=\int\limits_{\varphi_n}^{\varphi_1}\left|\ln\left[\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi\right)\right]\right|\left|g(\varphi)-g\left(\psi_n\right)\right|d\varphi, \tag{14}$$

$$S_1'''=\frac{2\pi}{n}\left|\ln\left[\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi_n\right)\right]\right|\left|g\left(\varphi_n\right)-g\left(\psi_n\right)\right|.$$

До інтеграла у співвідношенні (14) застосуємо теорему про середнє з урахуванням обмеженості та додатності функції, умови Гельдера $\left|g(\varphi)-g\left(\psi_n\right)\right|\le$ $\le A\left|\varphi-\psi_n\right|$ і рівності $\left|\varphi_1-\varphi_n\right|=\Delta\varphi=2\pi/n$. У підсумку отримаємо

$$S_1''=\left|\ln\left[\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\overline{\varphi}\right)\right]\right|\left|\int\limits_{\varphi_n}^{\varphi_1}\left|g(\varphi)-g\left(\psi_n\right)\right|d\varphi,\quad \varphi_n\le\overline{\varphi}\le\varphi_1.$$

Тоді справджуються оцінки

$$S_1''\le A\left|\ln\left[\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\overline{\varphi}\right)\right]\right|\left|\int\limits_{\varphi_n}^{\varphi_1}\left|\varphi-\psi_n\right|^{\mu}d\varphi\le\frac{A_1(\rho)}{n^{1+\mu}},\quad S_1'''\le\frac{A_2(\rho)}{n^{1+\mu}},$$

де A_i — додатні сталі, $0<\rho<1$.

Перетворимо вираз (13), застосувавши формулу Лагранжа до функції $\ln\left[\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-t\right)\right]$ за змінною t на проміжку $\left[\varphi,\varphi_k\right]$. Одержимо

$$S_1'=\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}}\Big|\ln\left[\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi\right)\right]\left[g(\varphi)-g\left(\varphi_k\right)\right]-$$

$$-\frac{2\rho\sin\left(\psi-\overline{\varphi}_k\right)\left(\varphi-\varphi_k\right)}{\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\overline{\varphi}_k\right)}\left[g\left(\varphi_k\right)-g\left(\psi_n\right)\right]\Bigg|d\varphi.$$

Використавши тут теорему про середнє, а також врахувавши нерівність $\left|\varphi-\varphi_k\right| \le \Delta\varphi = 2\pi/n$ і умову Гельдера, отримаємо

$$S_1' \le \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \left|\ln\left[\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi\right)\right]\right|\left|g(\varphi)-g\left(\varphi_k\right)\right|d\varphi+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}}\left|\frac{2\rho\sin\left(\psi-\bar\varphi_k\right)\left(\varphi-\varphi_k\right)}{\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\bar\varphi_k\right)}\right|\left|g\left(\varphi_k\right)-g\left(\psi_n\right)\right|d\varphi \le$$

$$\le A\sum_{k=1}^{n-1}\left|\ln\left[\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\bar\varphi_k\right)\right]\right|\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}}\left|\varphi-\varphi_k\right|^{\mu}d\varphi+\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{2\rho\sin\left(\psi-\bar\varphi_k\right)}{\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\bar\varphi_k\right)}\right|\times$$

$$\times\left|g\left(\varphi_k\right)-g\left(\psi_n\right)\right|\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}}\left|\varphi-\varphi_k\right|d\varphi \le \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{A_2(\rho)}{n^{1+\mu}}+\frac{A_3(\rho)}{n^2}\right] \le \frac{A_4(\rho)}{n^{\mu}}\ .$$

Сума нескінченно малих величин у формулі (12) еквівалентна нескінченно малій найнижчого порядку, тобто

$$\left|I_2\left(t_0\right)-I_{2n}\left(t_0\right)\right| = S_1+S_2 \le S_1'+S_1''+S_1'''+S_2 \le A_4(\rho)/n^{\mu}\ .$$

Перетворимо тепер вираз S_3

$$S_3 = \left|\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}}\left\{\frac{\left[\rho-\cos\left(\psi_n-\varphi\right)\right]\left[g(\varphi)-g\left(\psi_n\right)\right]}{\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi\right)}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\left[\rho-\cos\left(\psi_n-\varphi_k\right)\right]\left[g\left(\varphi_k\right)-g\left(\psi_n\right)\right]}{\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi_k\right)}\right\}d\varphi+$$

$$+\int_{\varphi_n}^{\varphi_1}\frac{\left[\rho-\cos\left(\psi_n-\varphi\right)\right]\left[g(\varphi)-g\left(\psi_n\right)\right]}{\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi\right)}d\varphi-$$

$$\left.-\frac{2\pi}{n}\frac{\left[\rho-\cos\left(\psi_n-\varphi_n\right)\right]\left[g\left(\varphi_n\right)-g\left(\psi_n\right)\right]}{\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi_n\right)}\right| \le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}}\frac{\left|\rho-\cos\left(\psi_n-\varphi\right)\right|\left|g(\varphi)-g\left(\varphi_k\right)\right|}{\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi\right)}d\varphi+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}}\left|\frac{\left[\rho-\cos\left(\psi_n-\varphi\right)\right]}{\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi\right)}-\frac{\left[\rho-\cos\left(\psi_n-\varphi_k\right)\right]}{\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi_k\right)}\right|\left|g\left(\varphi_k\right)-g\left(\psi_n\right)\right|d\varphi+$$

$$+\int_{\varphi_n}^{\varphi_1}\frac{\left|\rho-\cos\left(\psi_n-\varphi\right)\right|\left|g(\varphi)-g\left(\psi_n\right)\right|}{\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi\right)}d\varphi+\frac{2\pi}{n}\frac{\left|\rho-\cos\left(\psi_n-\varphi_n\right)\right|\left|g\left(\varphi_n\right)-g\left(\psi_n\right)\right|}{\rho^2+1-2\rho\cos\left(\psi_n-\varphi_n\right)}.$$

Оцінивши окремі доданки цього виразу з урахуванням теореми про середнє, умови Гельдера та рівності $|\varphi-\varphi_k|\le\Delta\varphi=2\pi/n$, одержимо другу оцінку (11).

Теорему доведено.

*Наслідок***.** Якщо L — коло одиничного радіуса, то відхилення інтегралів

$$I_1(t_0)=\int_L\left[\ln|t_0-t|+G(t_0,t)\right]g(t)\,dl(t),$$

$$J_1(t_0)=\int_L\left[\frac{\partial}{\partial n(t_0)}\ln|t_0-t|+G(t_0,t)\right]g(t)\,dl(t)$$

від відповідних інтегральних сум $I_{1n}(t_0), J_{1n}(t_0)$ на взірець (3) та (4) справджують нерівності

$$\left|I_1(t_0)-I_{1n}(t_0)\right|\le A(t_0)/n^{\mu_0},\qquad \left|J_1(t_0)-J_{1n}(t_0)\right|\le A(t_0)/n^{\mu_0},$$

де $t_0\in D$; $g(t)$ — функція, що справджує умову Гельдера з показником μ, $0<\mu\le 1$; $G(t_0, t)$ — неперервна функція за змінною t_0 і справджує умову Гельдера за змінною t з показником μ_1, $0<\mu_1\le 1$; $\mu_0=\min(\mu,\mu_1)$; $A(t_0)$ — величина, що не залежить від змінних n і t.

2. Оцінка відхилень інтегральних сум від інтегралів на контурі

Нехай тепер L — замкнутий контур Ляпунова. Тоді між точками $\tau_0(\xi_0, \eta_0)$ області D (з границею L) і точками $t_0(x_0, y_0)$ одиничного круга D_0 (з границею L_0 і центром у початку координат), де $x_0=\rho\cos\psi,\ y_0=\rho\sin\psi$, існує взаємно однозначна відповідність

$$\xi_0=\xi_0(\rho,\psi),\qquad \eta_0=\eta_0(\rho,\psi),\qquad 0\le\psi<2\pi,\qquad 0\le\rho<1.$$

При цьому кожній точці $t(x, y)\in L_0$ відповідає точка $\tau(\xi, \eta)\in L$

$$\xi=\xi_0(1,\varphi)\equiv\xi(\varphi),\quad \eta=\eta_0(1,\varphi)\equiv\eta(\varphi),\quad 0\le\varphi<2\pi,$$

так, що похідна $\dfrac{dl}{dt}=\sqrt{[\xi'(\varphi)]^2+[\eta'(\varphi)]^2}$ не набуває нульового значення та задовольняє умову Гельдера.

Тоді співвідношення (1), (2) можна записати у вигляді

$$I(\tau_0)=\int_L\ln|\tau_0-\tau|\,g(\tau)\,dl(\tau)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln\left\{[\xi_0-\xi(\varphi)]^2+[\eta_0-\eta(\varphi)]^2\right\}\bar{g}(\varphi)\,d\varphi, \quad (15)$$

$$J(\tau_0)=\int_L\frac{\partial}{\partial n(\tau_0)}\ln|\tau_0-\tau|\,g(\tau)\,dl(\tau)=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{[\xi_0-\xi(\varphi)]n_1(\tau_0)+[\eta_0-\eta(\varphi)]n_2(\tau_0)}{[\xi_0-\xi(\varphi)]^2+[\eta_0-\eta(\varphi)]^2}\bar{g}(\varphi)\,d\varphi, \quad (16)$$

де $\bar{g}(\varphi)=g\left(\xi(\varphi),\eta(\varphi)\right)\sqrt{[\xi'(\varphi)]^2+[\eta'(\varphi)]^2}$.

Теорема 4. Якщо L — замкнутий контур Ляпунова, а $g(t)$ — функція, що належить класу Гельдера, то відхилення інтегральних сум (3), (4) від інтегралів (1), (2) у довільній точці $\tau_0 \in D$ $(0 < \rho < 1)$ у разі $n \to \infty$ справджують нерівності

$$\left|I(\tau_0) - I_n(\tau_0)\right| \le A(\rho)/n^{\mu}, \qquad \left|J(\tau_0) - J_n(\tau_0)\right| \le B(\rho)/n^{\mu}, \tag{17}$$

де $A(\rho)$, $B(\rho)$ — скінченні величини, $0 \le \rho < 1$.

Доведення. Перетворимо формулу (21)

$$I(\tau_0) = \int\limits_L \ln|\tau_0 - \tau|\, g(\tau)\, dl(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left\{\left[\xi_0 - \xi(\varphi)\right]^2 + \left[\eta_0 - \eta(\varphi)\right]^2\right\} \bar{g}(\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left\langle \ln\left\{\frac{\left[\xi_0(\rho,\psi) - \xi(\varphi)\right]^2 + \left[\eta_0(\rho,\psi) - \eta(\varphi)\right]^2}{\left(\rho\cos\psi - \cos\varphi\right)^2 + \left(\rho\sin\psi - \sin\varphi\right)^2}\right\} + \right.$$

$$\left. + \ln\left[\rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)\right]\right\rangle \bar{g}(\varphi)\, d\varphi. \tag{18}$$

Функція $\bar{g}(\varphi)$ задовольняє умову Гельдера як добуток двох функцій гельдерівського класу. Справді, якщо $\left|\xi'(\varphi_1) - \xi'(\varphi_2)\right| \le A|\varphi_1 - \varphi_2|^{\mu}$, $\left|\eta'(\varphi_1) - \eta'(\varphi_2)\right| \le A|\varphi_1 - \varphi_2|^{\mu}$, то $\left|\left[\xi'(\varphi_1)\right]^2 - \left[\xi'(\varphi_2)\right]^2\right| = \left|\xi'(\varphi_1) + \xi'(\varphi_2)\right|\left|\xi'(\varphi_1) - \xi'(\varphi_2)\right| \le A_1|\varphi_1 - \varphi_2|^{\mu}$, $\left|\left[\eta'(\varphi_1)\right]^2 - \left[\eta'(\varphi_2)\right]^2\right| = \left|\eta'(\varphi_1) + \eta'(\varphi_2)\right|\left|\eta'(\varphi_1) - \eta'(\varphi_2)\right| \le A_1|\varphi_1 - \varphi_2|^{\mu}$. Окрім того, з огляду на те, що $\left|\sqrt{g(\varphi_1)} - \sqrt{g(\varphi_2)}\right| \le A_2\left|g(\varphi_1) - g(\varphi_2)\right|^{1/2}$, маємо $\left|\sqrt{\left[\xi'(\varphi_1)\right]^2 + \left[\eta'(\varphi_1)\right]^2} - \sqrt{\left[\xi'(\varphi_2)\right]^2 + \left[\eta'(\varphi_2)\right]^2}\right| \le A_3|\varphi_1 - \varphi_2|^{\mu/2}$.

З урахуванням цієї умови й умови Гельдера $\left|g\left(\xi(\varphi_1), \eta(\varphi_1)\right) - g\left(\xi(\varphi_2), \eta(\varphi_2)\right)\right| \le A_4|\varphi_1 - \varphi_2|^{\mu_1}$ для функції $g\left(\xi(\varphi), \eta(\varphi)\right)$ одержимо умову Гельдера для функції $\bar{g}(\varphi)$

$$\left|\bar{g}(\varphi_1) - \bar{g}(\varphi_2)\right| \le A_0|\varphi_1 - \varphi_2|^{\mu_0}, \tag{19}$$

де $\mu_0 = \min(\mu/2, \mu_1)$.

Перший доданок ядра в інтегралі (18) неперервно диференційована функція за значень параметра $\rho(0 \le \rho < 1)$, тому він задовольняє умову Гельдера з показником $\mu = 1$.

Отже, інтеграл (18) задовольняє умови теореми 3 і, відповідно, справджується нерівність (17).

Аналогічним чином надамо підінтегральному виразу другого інтеграла (16)

$$G(\tau_0,\tau)=\frac{\left\{\left[\xi_0(\rho,\psi)-\xi(\varphi)\right]n_1(\tau_0)+\left[\eta_0(\rho,\psi)-\eta(\varphi)\right]n_2(\tau_0)\right\}}{\left\{\left[\xi_0(\rho,\psi)-\xi(\varphi)\right]^2+\left[\eta_0(\rho,\psi)-\eta(\varphi)\right]^2\right\}\left[\rho-R\cos\left(\psi-\varphi\right)\right]}\times$$
$$\times\left[\left(\rho\cos\psi-\cos\varphi\right)^2+\left(\rho\sin\psi-\sin\varphi\right)^2\right].$$

Ця функція неперервно-диференційовна за змінною φ, $\rho<1$, і, відповідно, задовольняє умову Гельдера з показником $\mu=1$. Функція $\overline{g}(\varphi)$ також задовольняє умову Гельдера (19). Функції інтеграла, що розглядаємо тут, справджують умови теореми 3, а відтак і нерівність (17). Теорему доведено.

Висновки. Наведені оцінки встановлюють збіжність числових алгоритмів наближеного обчислення криволінійних інтегралів (1) і (2) інтегральними сумами (3), (4) за умови (8) і їх можна покласти в основу числового розв'язування інтегральних рівнянь з функціями, що мають логарифмічну особливість або особливість похідної від логарифмічної функції. Такий підхід до обчислення сингулярних інтегралів дозволяє також будувати числові схеми розв'язування інтегральних рівнянь із функціями з ядрами, знайденими у вигляді сум степеневих рядів чи тригонометричних рядів (без виділення сингулярних доданків).

Література

[1] *Дмитриев, В. И.* Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики / *В. И. Дмитриев, Б. В. Захаров*. — Москва: Изд. МГУ, 1987. — 165 с.

[2] *Белоцерковский, С. М.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / *С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов.* — Москва: Наука — главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 256 с.

[3] *Михлин, С. Г.* Линейные уравнения в частных производных / *С. Г. Михлин.* — Москва: Высшая школа, 1977. — 431 с.

[4] *Брычков, Ю. А.* Таблицы неопределенных интегралов / *Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, А. П. Прудников*. — Москва: Физматлит, 2003. — 200 с.

The approximate calculation of curvilinear convolution integrals of logarithmic function or its derivative

Mykhailo Sukhorolsky, Olesia Liubytska

The sequence approach to the presentation of the singular functions has been analyzed. The convergence of the numerical methods of the contour integral discretization with the logarithmic kernel function or the derivative of the logarithmic function has been investigated. The convolution of singular kernel functions with the functions of Holder classes has been considered. The numerical scheme involves an approximate calculation of improper integrals on closed curves as limits of sequences of integrals of sufficiently smooth functions with boundary (in the sense of weak convergence) singular functions. The theorems on the convergence of relevant integrals and integral sums under certain conditions as to the dependence of the parameter of smoothness of the integrands on the number of intervals partitioning the contour have been proved. Asymptotic estimates that determine the approximation of curvilinear integrals that by the corresponding integral sums in the case of closed-loop Lyapunov and, in particular, the circle have been obtained.

Приближенные вычисления криволинейных интегралов типа свертки от логарифмической функции или её производной

Михаил Сухорольский, Олеся Любицкая

Исследована сходимость числовых схем дискретизации контурных интегралов типа свертки с ядерной функцией, имеющей логарифмическую особенность или особенность как производную от логарифмической функции. В основу этих схем положен последовательный подход к представлению сингулярных функций. Рассмотрены свертки сингулярных ядерных функций с функциями гельдеровского класса. Численная схема предусматривает приближенное вычисление несобственных интегралов на замкнутых кривых как пределов последовательностей интегралов от достаточно гладких функций с граничными (в смысле слабой сходимости) разрывными функциями. Доказаны теоремы об условиях сходимости соответствующих интегралов и интегральных сумм при определённых условиях относительно параметра, определяющего гладкость подинтегральных функций и зависящего от количества отрезков разбиения контура интегрирования. Получены асимптотические оценки, которые определяют приближения криволинейных интегралов соответствующими интегральными суммами в случае замкнутого контура Ляпунова и, в частности, окружности.

Отримано 16.02.10