

Скінчено-елементний метод розв'язування задач поляризаційно-оптичної томографії напружень у заготовках волоконних світловодів

Василь Чекурін¹, Тарас Брич²

¹ д. ф.-м. н., професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: chekurin@iapmm.lviv.ua

² к. т. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: tb@mail.lviv.ua

Розглянуто пряму й обернену задачі неруйнівного визначення залишкових напружень у довгому циліндричному тілі кусково-однорідного перерізу за ізотермічних умов. Для опису залишкових напружень застосовано концепцію несумісних вільних деформацій, зумовлених фізичною та структурною неоднорідністю матеріалу. В рамках такого підходу сформульовано двовимірну пряму задачу визначення напружень у поперечному перерізі циліндра. Вільні деформації у прямій задачі задавали відповідно до розподілу коефіцієнта теплового розширення у поперечному перерізі. Сформульовано обернену двовимірну задачу визначення залишкових напружень на основі даних, отриманих зондуванням циліндричного тіла поляризованим світлом у напрямках, нормальних до його осі. Розроблені скінченно-елементні методики розв'язування прямої й оберненої задач. На цій основі, використовуючи метод числового експерименту, дослідили вплив схем сканування й об'єму вхідних даних на точність розв'язування оберненої задачі. Досліджено ефективність застосування розроблених методик для визначення залишкових напружень у заготовках скловолоконних світловодів, що зберігають поляризацію сигналу.

Ключові слова: залишкові напруження, неруйнівні методи, метод фотопружності, задачі томографії, метод скінченних елементів.

Вступ. Здатність волоконного світловода зберігати лінійну поляризацію сигналу залежить від анізотропії коефіцієнта заломлення світла в його перерізі. Цю здатність визначає різниця сталих поширення лінійно поляризованих мод [1]

$$\Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_x - n_y), \quad (1)$$

де n_x, n_y — головні значення тензора коефіцієнтів заломлення світла у жилі оптоволоконна, λ — довжина світлової хвилі.

Оптичну анізотропію у склі можна створити шляхом формування напруженого стану. Тоді параметр $\Delta\beta$ визначає різницю головних напружень σ_{xx} і σ_{yy}

$$\Delta\beta = \frac{\pi n^3}{\lambda E} P(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}). \quad (2)$$

Тут n — показник заломлення матеріалу серцевини за відсутності напружень, P — п'єзооптичний коефіцієнт, E — модуль Юнга.

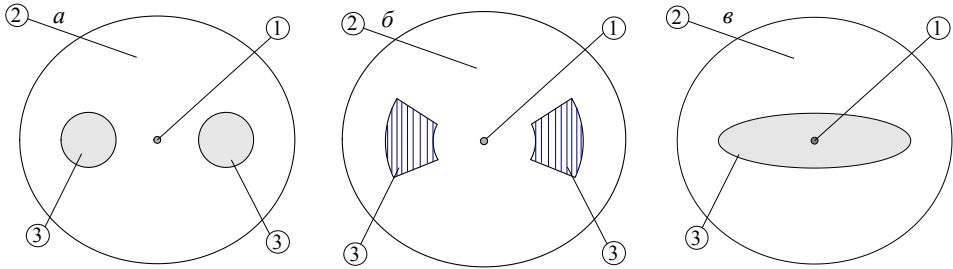


Рис. 1. Поперечний переріз заготовок оптоволоконних світловодів різних типів: (а) «панда», (б) «краватка-метелик», (в) «еліпс»

Щоб створити напруження, використовують волокна з кусково-однорідним перерізом. На рис. 1 схематично показані три типи таких волокон. Окрім світловодної жили 1 та оболонки 2 у їх поперечному перерізі наявні включення 3 з відмінними від матеріалів жили й оболонки значеннями коефіцієнта теплового розширення α . Внаслідок цього у поперечному перерізі волокна виникають залишкові напруження.

Волокна виготовляють шляхом витягування зі спеціально створених заготовок, структура яких відтворює структуру поперечного перерізу волокна і розподіл напружень у ньому. Тому на стадії проектування та виготовлення таких заготовок виникає задача визначення їх напружено-деформованого стану.

1. Модель напружено-деформованого стану заготовки та пряма задача

Заготовку волоконного світловода розглядатимемо як кусково-однорідне тіло у формі довгого кругового циліндра радіуса R . Поперечний переріз S циліндра містить N чужорідних включень $S = \bigcup_{\lambda=0}^N S_{\lambda}$, де S_0 — область, що відповідає обо-

лонці заготовки, а S_{λ} , $\lambda = \overline{1, N}$ — жили та включенням. Пружні та теплофізичні властивості матеріалу в областях S_{λ} , $\lambda = \overline{0, N}$ є кількісно відмінні. Зовнішня поверхня ∂S тіла є вільна від навантажень, а на межі ∂S_{λ} кожної з підобластей S_{λ} виконуються умови ідеального механічного контакту.

У поперечних перерізах, достатньо віддалених від країв циліндра, з достатньою точністю реалізуються умови двовимірного напружено-деформованого стану плоскої деформації. Для його опису застосуємо концепцію несумісних деформацій [2, 3], за якою джерелом виникнення напружень є вільні деформації ε_{ij}^0 , що зумовлені фізичною та/чи структурною неоднорідностями тіла. Повні деформації ε_{ij} у межах кожної області S_{λ} задовольняють умови сумісності та визначаються як сума пружних ε_{ij}^e і вільних ε_{ij}^0 деформацій

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^0, \quad (3)$$

а компоненти напружень σ_{ij} визначаються пружними деформаціями ε_{ij}^e

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0), \quad (4)$$

де C_{ikl} — компоненти тензора пружних модулів матеріалу цього складника.

Повна система рівнянь моделі, окрім співвідношень (4), включає рівняння рівноваги та сумісності повних деформацій, записані для кожного складника гетерогенного тіла [3-5].

Для розв'язування прямої задачі задавалися розподілами компонент деформацій ε_{ij}^0 у кожній області S_λ у вигляді $\varepsilon_{ij}^0 = \alpha(T_0 - T)\delta_{ij}$, де α — коефіцієнт теплового розширення складника λ ; T_0 — температура, за якої відбулося формування тіла як пружної кусково-однорідної структури; T — актуальна температура тіла; δ_{ij} — дельта Кронекера.

Пряму задачу розв'язували методом скінченних елементів із використанням алгоритму, описаного в статті [6]. Провели числове моделювання напружено-деформованого стану трьох видів заготовок волоконних світловодів, показаних на рис. 1. Матеріал усіх елементів поперечного перерізу вважали ізотропним. Значення модуля Юнга E , коефіцієнтів Пуасона ν та теплового розширення α подані у табл. 1.

Таблиця 1

Значення фізичних параметрів заготовки

| елементи перерізу | E (кг/см ²) | ν | α (1/K) |
|-------------------|---------------------------|-------|---------------------|
| оболонка | $6,8910^{10}$ | 0,18 | $0,8 \cdot 10^{-6}$ |
| жила | $6,78 \cdot 10^{10}$ | 0,20 | $3,2 \cdot 10^{-6}$ |
| включення | $7,30 \cdot 10^{10}$ | 0,17 | $0,6 \cdot 10^{-6}$ |

Радіус циліндра брали 0,05 м, радіуси включень — 0,01 м з центрами в точках (0,025; 0,05) і (0,075; 0,05). Серцевина — коло радіусом 0,0015 м (рис. 1а). Для заготовки з еліптичним включенням розміри великої та малої півосей відповідно $a = 0,025$ і $b = 0,01$ м. Перепад температур $\Delta T = T_0 - T$ приймали 100 К.

На рис. 2 подані графіки різниці головних напружень уздовж осі x поперечного перерізу світловода для різних їх типів. Таким чином, розв'язуючи пряму задачу, можемо кількісно оцінити вплив геометрії поперечного перерізу, а також пружних і теплофізичних параметрів матеріалу складників заготовки на параметр $\Delta\beta_{xy}$.

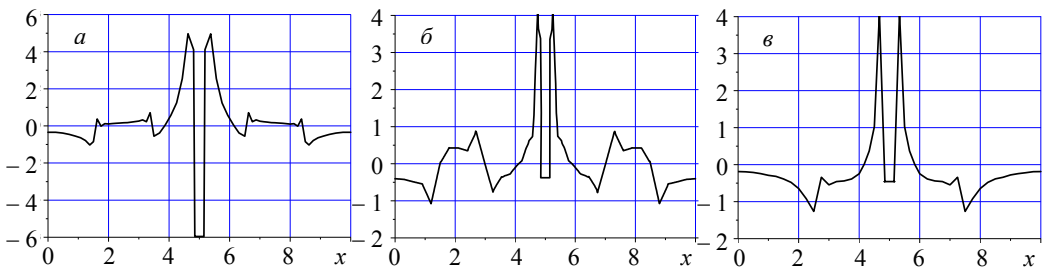


Рис. 2. Розподіл різниці напружень $(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \cdot 10^{-6}$ уздовж осі x :
(а) «панда», (б) «метелик», (в) «еліпс»

2. Дослідження методики розв'язування оберненої задачі

Деформації ε_{ij}^0 , які спричиняють залишкові напруження в заготовці, а відтак і в оптоволокні, у багатьох практично важливих випадках є апіорі невідомі. У такому разі визначення напружено-деформованого стану шляхом розв'язування прямої задачі стає неможливим. Натомість, застосовуючи методи фотопружності, можна отримати певну апостеріорну інформацію про шуканий напружено-деформований стан неруйнівним способом. Як показано в [3-5], просвічуючи об'єкт поляризованим світлом у довільному напрямку L_n і вимірюючи зміну стану його поляризації, можна емпірично визначити значення J_1^n і J_2^n двох променевих інтегралів виду

$$\frac{\omega P}{2c\sqrt{\kappa}} \int_{L_n} (\sigma_{11}^n - \sigma_{22}^n) dt = J_1^n, \quad \frac{\omega P}{2c\sqrt{\kappa}} \int_{L_n} \sigma_{12}^n dt = J_2^n, \quad (5)$$

де $\sigma_{11}^n, \sigma_{22}^n, \sigma_{12}^n$ — компоненти тензора напружень стосовно декартової системи координат, вісь 3 якої орієнтовано вздовж напрямку просвічування L_n ; t — параметр, що визначає точку на прямій L_n ; κ — діелектрична проникність середовища; c — швидкість світла, ω — циклічна частота світлової хвилі.

Якщо обмежитися просвічуванням у напрямках, нормальних до осі циліндра, то, беручи до уваги двомірний напружено-деформований стан плоскої деформації та відсутність зовнішнього навантаження на зовнішній циліндричній поверхні, легко встановити, що другий інтеграл (5) тотожно дорівнює нулю, а перший набуває вигляду

$$\frac{\omega P}{2c\sqrt{\kappa}} \int_{L_n} \sigma_{zz} dt = J_n, \quad (6)$$

де σ_{zz} — осьова компонента напружень у циліндричному тілі, $J_n \equiv J_1^n$.

Зондуючи заготовку у деякій множині $\mathcal{L} = \{L_n, n = \overline{1, M}\}$ напрямків L_n отримуємо M променевих інтегралів виду (6) із відомими правими частинами. Таким чином, розв'язування оберненої задачі визначення напружено-деформованого стану заготовки зводиться: а) до визначення розподілу компоненти напружень $\sigma_{zz}(x, y)$ у поперечному перерізі \mathcal{S} заготовки з множини променевих інтегралів (6) і б) до визначення на цій основі розподілів компонент $\sigma_{xx}(x, y)$, $\sigma_{xy}(x, y)$ і $\sigma_{yy}(x, y)$. Варіаційний граничноелементний метод розв'язування цієї задачі розглянуто в статті [6].

Для практичного застосування цього методу слід оцінити мінімальний об'єм даних, необхідних для розв'язування оберненої задачі із заданою точністю. З цією метою провели дослідження впливу схеми сканування, об'єму даних і рівня напружень, що підлягають визначенню, на точність розв'язування оберненої задачі. Дослідження провели у два етапи, використовуючи метод числового експерименту. На першому етапі отримували вхідні дані для оберненої задачі. Для цього розв'язували пряму задачу томографії, тобто — задавали певний розподіл вільних деформацій у перерізі \mathcal{S} , розв'язували задачу визначення залишкових напружень,

вибирали певну схему сканування та множину напрямків зондування \mathcal{L} і розраховували за формулою (6) значення променевого інтеграла J_n для кожного напрямку $L_n \in \mathcal{L}$. На другому етапі розв'язували обернену задачу томографії на основі вхідних даних $\mathcal{J} = \{J_n, n = \overline{1, M}\}$.

Дослідження провели для спрощеної моделі заготовки. Розглядали довге циліндричне тіло, що містить два циліндричні включення. Щоб урахувати вплив контрастності поля напружень на точність розв'язування оберненої задачі, розглянули два випадки: 1) коефіцієнт теплового розширення включення у 4 рази більший, ніж оболонки (модель 1) і 2) коефіцієнт теплового розширення включення є більший лише на 15 % (модель 2). Характеристики матеріалу моделей подані в табл. 2.

Досліджували 5 схем сканування: 1) системою променів, паралельних до осі Oy ; 2) системою променів, паралельних до осі Ox ; 3) системою променів, паралельних до прямої $y = x$; 4) системою променів, що утворюють «віяло» з центром у точці $(0,05; 0,05)$ і 5) системою променів, що утворюють «віяло» з центром у точці $(0, 0)$.

Пряму задачу розв'язували за методикою, описаною у статті [6]. Розподіл вільних деформацій ε^0 у перетині заготовки задавали, виходячи із значень коефіцієнтів теплового розширення включень і оболонки згідно табл. 2 та приймаючи перепад температури $\Delta T = 300$ К. Використовували розбиття на 3840 трикутних елементів і 1969 вузлів.

Обернену задачу томографії двовимірного поля залишкових напружень зводили, використовуючи варіаційний метод [6], до визначення розподілу вільних деформацій $\varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon^0 \delta_{ij}$ у поперечному перерізі заготовки. Шукану залежність $\varepsilon^0(x, y)$ брали кусково-однорідною $\varepsilon^0(x, y) = \{ \tilde{\varepsilon}_\lambda^0, (x, y) \in S_\lambda, \lambda = \overline{1, N_\varepsilon} \}$, де $\tilde{\varepsilon}_\lambda^0$ — невідомі дійсні сталі, S_λ — задані двовимірні плоскі області (елементи поперечного перерізу), такі, що $\cup_\lambda S_\lambda = S$, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ — кількість елементів поперечного перерізу, які використовували для наближення невідомої функції $\varepsilon^0(x, y)$. Таким чином зводили задачу до знаходження N_ε невідомих дійсних сталих ε_λ^0 .

Щоб оцінити вплив кількості невідомих на точність розв'язування оберненої задачі розглядали дві моделі функції розподілу вільних деформацій $\varepsilon^0(x, y)$ у перерізі заготовки, які відрізнялися кількістю N_ε елементів S_λ . У першій моделі $N_\varepsilon = 3$, тобто вважали вільні деформації однорідними в межах оболонки та кожного із двох включень. У другій моделі, як і в першій, вільні деформації вважали однорідними

Таблиця 2

Значення параметрів моделей заготовки

| Модель заготовки | елементи перерізу | E (кг/см ²) | ν | α (1/К) | ε^0 |
|------------------|-------------------|---------------------------|-------|----------------------|----------------------|
| 1 | оболонка | $6,89 \cdot 10^{10}$ | 0,18 | $0,8 \cdot 10^{-6}$ | $2,40 \cdot 10^{-4}$ |
| | включення | $6,78 \cdot 10^{10}$ | 0,20 | $3,2 \cdot 10^{-6}$ | $9,6 \cdot 10^{-4}$ |
| 2 | оболонка | $7,00 \cdot 10^{10}$ | 0,22 | $0,85 \cdot 10^{-6}$ | $2,58 \cdot 10^{-4}$ |
| | включення | $6,50 \cdot 10^{10}$ | 0,25 | $0,80 \cdot 10^{-6}$ | $2,40 \cdot 10^{-4}$ |

в межах включень, а їх розподіл в оболонці задавали 28 скінченними елементами. Тож у другій моделі кількість N_ε невідомих становила 30.

Точність розв'язку оберненої задачі оцінювали шляхом порівняння отриманих значень $\tilde{\varepsilon}_\lambda^0$ зі значеннями, які задавали у прямій задачі, обчислюючи похибку Δ як середньоквадратичне відхилення

$$\Delta = \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{N_\varepsilon} (\varepsilon_\lambda^0 - \tilde{\varepsilon}_\lambda^0)^2} / N_\varepsilon, \quad (7)$$

де $\varepsilon_\lambda^0 = \alpha_\lambda \Delta T$, α_λ — коефіцієнт теплового розширення λ елемента поперечного перерізу згідно табл. 2, для моделі 1 функції $\varepsilon^0(x, y)$ $\lambda = 1$ і $\lambda = 2$ відповідає включенням, а $\lambda = 3$ — оболонці, для моделі 2 $\lambda = 1$ і $\lambda = 2$ відповідає включенням, а $\lambda = \overline{3,30}$ — оболонці.

Результати досліджень подані в табл. 3. На їх основі можна зробити такі важливі для подальшого розгляду висновки:

- для отримання задовільного результату кількість напрямків просвічування M повинна перевищувати кількість невідомих N_ε ;
- урахування апріорної інформації щодо геометрії поперечного перерізу дозволяє істотно знизити кількість невідомих, а відтак і об'єм даних, необхідних для розв'язування задачі зі заданою точністю;
- зменшення контрастності поля напружень вимагає збільшення об'єму даних (кількості напрямків просвічування) для досягнення результату з тією ж точністю;
- інформативність даних залежить від схеми зондування, так для даних, отриманих за схемою 1, похибка зменшується зі зростанням кількості напрямків зондування швидше, ніж для даних, отриманих за схемою 2, це ж стосується і схем 4 та 5, що легко пояснити, виходячи з симетрії структури поперечного перерізу.

3. Задача томографії напружень у заготовках волоконних світловодів

Розглянемо застосування розроблених скінченно-елементних методик розв'язування прямої й оберненої задач до створення неруйнівного томографічного методу визначення напружено-деформованого стану та різниці сталих поширення $\Delta\beta$ заготовок скловолоконних світловодів на основі емпіричних даних, отримуваних зондуванням поляризованим світлом.

Реалізація методу складається з таких етапів:

- вибір схеми зондування, множини \mathcal{L} напрямків просвічування та вимірювання значень променевих інтегралів J_n для усіх напрямків $L_n \in \mathcal{L}$, а відтак формування на цій основі множини \mathcal{J} вхідних даних для оберненої задачі;
- розв'язування оберненої задачі для вхідних даних \mathcal{J} і встановлення розподілу вільних деформацій у поперечному перерізі заготовки;
- розв'язування прямої задачі визначення залишкових напружень за знайденим розподілом вільних деформацій;
- обчислення за формулою (2) значення параметра $\Delta\beta$.

Таблиця 3

| Модель заготовки | | 1 | | 2 | |
|------------------------------------|------------------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|
| Модель ф-ції $\varepsilon^0(x, y)$ | | 1 | 2 | 1 | 2 |
| К-сть невідомих N_ε | | 3 | 30 | 3 | 30 |
| Схема сканування | К-сть ліній зондування | Похибка розв'язування оберненої задачі Δ | | | |
| 1 | 10 | $1,00 \cdot 10^{-8}$ | – | $1,41 \cdot 10^{-8}$ | – |
| | 20 | $< 10^{-10}$ | – | $1,41 \cdot 10^{-8}$ | – |
| | 40 | $< 10^{-10}$ | $1,67 \cdot 10^{-7}$ | $< 10^{-10}$ | $1,36 \cdot 10^{-6}$ |
| | 134 | $< 10^{-10}$ | $1,32 \cdot 10^{-8}$ | $< 10^{-10}$ | $1,42 \cdot 10^{-7}$ |
| | 270 | $< 10^{-10}$ | $4,92 \cdot 10^{-9}$ | $< 10^{-10}$ | $2,52 \cdot 10^{-8}$ |
| | 540 | $< 10^{-10}$ | $3,41 \cdot 10^{-9}$ | $< 10^{-10}$ | $1,98 \cdot 10^{-8}$ |
| 2 | 10 | $2,24 \cdot 10^{-8}$ | – | $3,94 \cdot 10^{-6}$ | – |
| | 20 | $3,04 \cdot 10^{-7}$ | – | $4,04 \cdot 10^{-7}$ | – |
| | 40 | $1,41 \cdot 10^{-7}$ | $4,58 \cdot 10^{-7}$ | $5,48 \cdot 10^{-8}$ | $1,77 \cdot 10^{-6}$ |
| | 134 | $3,61 \cdot 10^{-8}$ | $9,58 \cdot 10^{-9}$ | $4,17 \cdot 10^{-7}$ | $1,39 \cdot 10^{-7}$ |
| | 270 | $1,42 \cdot 10^{-8}$ | $9,21 \cdot 10^{-9}$ | $9,22 \cdot 10^{-8}$ | $3,54 \cdot 10^{-8}$ |
| | 540 | $1,00 \cdot 10^{-9}$ | $4,09 \cdot 10^{-9}$ | $2,45 \cdot 10^{-8}$ | $3,31 \cdot 10^{-8}$ |
| 3 | 10 | $1,01 \cdot 10^{-8}$ | – | $1,17 \cdot 10^{-7}$ | – |
| | 20 | $1,42 \cdot 10^{-8}$ | – | $6,48 \cdot 10^{-8}$ | – |
| | 40 | $1,42 \cdot 10^{-8}$ | $4,40 \cdot 10^{-8}$ | $6,48 \cdot 10^{-8}$ | $2,36 \cdot 10^{-7}$ |
| | 134 | $1,00 \cdot 10^{-9}$ | $4,94 \cdot 10^{-9}$ | $4,47 \cdot 10^{-8}$ | $2,60 \cdot 10^{-8}$ |
| | 270 | $1,00 \cdot 10^{-9}$ | $3,76 \cdot 10^{-9}$ | $2,83 \cdot 10^{-8}$ | $2,31 \cdot 10^{-8}$ |
| | 540 | $< 10^{-10}$ | $2,30 \cdot 10^{-9}$ | $3,00 \cdot 10^{-8}$ | $2,53 \cdot 10^{-8}$ |
| 4 | 10 | $1,01 \cdot 10^{-8}$ | – | $5,10 \cdot 10^{-8}$ | – |
| | 20 | $1,01 \cdot 10^{-8}$ | – | $4,24 \cdot 10^{-8}$ | – |
| | 40 | $1,01 \cdot 10^{-8}$ | $1,88 \cdot 10^{-8}$ | $4,12 \cdot 10^{-8}$ | $1,20 \cdot 10^{-7}$ |
| | 134 | $1,01 \cdot 10^{-8}$ | $6,84 \cdot 10^{-9}$ | $3,32 \cdot 10^{-8}$ | $4,55 \cdot 10^{-8}$ |
| | 270 | $< 10^{-10}$ | $5,06 \cdot 10^{-9}$ | $1,73 \cdot 10^{-8}$ | $3,49 \cdot 10^{-8}$ |
| | 540 | $< 10^{-10}$ | $2,39 \cdot 10^{-9}$ | $1,41 \cdot 10^{-8}$ | $3,49 \cdot 10^{-8}$ |
| 5 | 10 | $6,29 \cdot 10^{-7}$ | – | $7,17 \cdot 10^{-6}$ | – |
| | 20 | $1,56 \cdot 10^{-7}$ | – | $3,85 \cdot 10^{-7}$ | – |
| | 40 | $1,14 \cdot 10^{-7}$ | $5,65 \cdot 10^{-7}$ | $9,11 \cdot 10^{-8}$ | $6,22 \cdot 10^{-6}$ |
| | 134 | $5,86 \cdot 10^{-8}$ | $1,93 \cdot 10^{-8}$ | $3,71 \cdot 10^{-7}$ | $1,22 \cdot 10^{-7}$ |
| | 270 | $1,12 \cdot 10^{-8}$ | $1,15 \cdot 10^{-8}$ | $2,25 \cdot 10^{-7}$ | $7,24 \cdot 10^{-8}$ |
| | 540 | $1,04 \cdot 10^{-8}$ | $7,57 \cdot 10^{-9}$ | $1,71 \cdot 10^{-7}$ | $7,05 \cdot 10^{-8}$ |

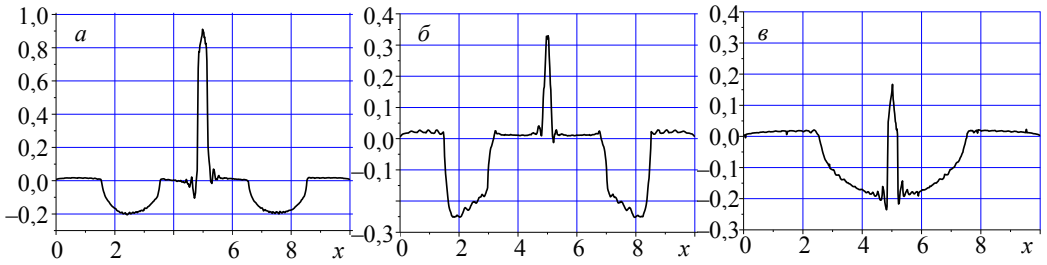


Рис. 3. Розподіл $J_n \cdot 10^{-5}$ для заготовок світловодів: (а) «панда», (б) «метелик», (в) «елїпс»

Дані зондування J заготовки поляризованим світлом відображають певним чином геометрію її поперечного перерізу. На рис. 3 подані результати сканування системою променів $x = const$, отримані з використанням розв'язку прямої задачі

Таблиця 4

| | | Тип заготовки | | |
|------------------------------|-------------|---|--------------------------|--------------------------|
| | | «панда» | «метелик» | «елїпс» |
| К-сть невідомих N_ϵ | | 4 | 4 | 3 |
| Метод сканування | К-сть ліній | Похибка розв'язування оберненої задачі Δ | | |
| 1 | 40 | $3,53553 \cdot 10^{-10}$ | $2,56174 \cdot 10^{-9}$ | $3,65148 \cdot 10^{-9}$ |
| | 134 | $3,53553 \cdot 10^{-10}$ | $2,54951 \cdot 10^{-9}$ | $3,36650 \cdot 10^{-9}$ |
| | 270 | $3,53553 \cdot 10^{-10}$ | $2,52488 \cdot 10^{-9}$ | $7,45356 \cdot 10^{-10}$ |
| | 540 | $2,50000 \cdot 10^{-10}$ | $2,52488 \cdot 10^{-9}$ | $4,71405 \cdot 10^{-10}$ |
| 2 | 40 | $1,14564 \cdot 10^{-9}$ | $3,01040 \cdot 10^{-9}$ | $3,95247 \cdot 10^{-9}$ |
| | 134 | $0,6423 \cdot 10^{-9}$ | $2,79508 \cdot 10^{-9}$ | $3,67651 \cdot 10^{-9}$ |
| | 270 | $4,33013 \cdot 10^{-8}$ | $2,65754 \cdot 10^{-9}$ | $7,95563 \cdot 10^{-10}$ |
| | 540 | $3,53553 \cdot 10^{-8}$ | $1,03078 \cdot 10^{-9}$ | $4,90425 \cdot 10^{-10}$ |
| 3 | 40 | $1,08972 \cdot 10^{-9}$ | $2,70416 \cdot 10^{-9}$ | $2,68825 \cdot 10^{-8}$ |
| | 134 | $9,01388 \cdot 10^{-10}$ | $2,62202 \cdot 10^{-9}$ | $1,34164 \cdot 10^{-8}$ |
| | 270 | $6,01178 \cdot 10^{-10}$ | $2,56174 \cdot 10^{-9}$ | $6,73300 \cdot 10^{-9}$ |
| | 540 | $5,59017 \cdot 10^{-10}$ | $5,00000 \cdot 10^{-10}$ | $7,45356 \cdot 10^{-10}$ |
| 4 | 40 | $7,90569 \cdot 10^{-10}$ | $7,90569 \cdot 10^{-10}$ | $1,00000 \cdot 10^{-9}$ |
| | 134 | $5,59017 \cdot 10^{-10}$ | $5,59017 \cdot 10^{-10}$ | $6,66667 \cdot 10^{-10}$ |
| | 270 | $5,00000 \cdot 10^{-10}$ | $3,53553 \cdot 10^{-10}$ | $5,00000 \cdot 10^{-10}$ |
| | 540 | $5,00000 \cdot 10^{-10}$ | $2,50000 \cdot 10^{-10}$ | $3,33333 \cdot 10^{-10}$ |
| 5 | 40 | $3,44601 \cdot 10^{-9}$ | $1,25250 \cdot 10^{-8}$ | $2,68825 \cdot 10^{-8}$ |
| | 134 | $2,03101 \cdot 10^{-9}$ | $1,00312 \cdot 10^{-8}$ | $1,37204 \cdot 10^{-8}$ |
| | 270 | $1,95256 \cdot 10^{-9}$ | $7,50833 \cdot 10^{-9}$ | $7,36840 \cdot 10^{-9}$ |
| | 540 | $1,88746 \cdot 10^{-9}$ | $5,41410 \cdot 10^{-9}$ | $3,28295 \cdot 10^{-9}$ |

для трьох типів заготовок, зображених на рис. 1. Тут наведені значення променевого інтеграла J_n для різних значень координати x . Пряму задачу розв'язували для параметрів матеріалу, наведених у табл. 1 для $\Delta T = 100^\circ$.

Як видно з рисунка, дані зондування дозволяють із достатньою точністю ідентифікувати структуру поперечного перерізу та визначити розміри його складників. Тому, формулюючи обернену задачу визначення залишкових напружень, структуру поперечного перерізу можна вважати заданою та звести задачу до знаходження розподілів вільних деформацій у межах кожного структурного елемента перерізу — в оболонці, у включеннях і жилі світловода. У найпростішому випадку можна вважати, що вільні деформації є однорідні в межах кожного з цих елементів. Тоді кількість невідомих оберненої задачі для заготовок типу «панда» та «краватка-метелик» дорівнюватиме 4, а для заготовки типу «еліпс» — 3.

У табл. 4 наведені результати дослідження точності розв'язування оберненої задачі за методикою, розглянутою у п. 2, для заготовок трьох типів, поданих на рис. 1.

Висновки. Розроблені скінченно-елементні методики розв'язування прямої й оберненої задач, які застосовані для створення томографічного методу визначення напружено-деформованого стану й експлуатаційних властивостей заготовок скловолоконних світловодів на основі емпіричних даних, отримуваних зондуванням поляризованим світлом. Проведені числові дослідження підтвердили можливість використання розробленого математичного апарату у складі інформаційно-вимірвальних систем, призначених для оптимізації конструкції та технології виготовлення заготовок скловолоконних світловодів і контролю їх якості у процесі виробництва оптичних волокон. Подальші дослідження слід спрямувати на врахування неоднорідностей розподілу вільних деформацій у межах структурних елементів поперечного перерізу, зумовлених структурною неоднорідністю матеріалу, набутою ним у процесі технологічних обробок.

Література

- [1] *Дмитриев, А. Л.* Оптические системы передачи информации / *А. Л. Дмитриев.* — Санкт-Петербург: СПбГУИТМО, 2007. — 96 с.
- [2] *Кушнір, Р. М.* Розрахунок температурних залишкових напружень в оптичних волокнах / *Р. М. Кушнір, І. Б. Прокопович* // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 1991. — № 34. — С. 79-83.
- [3] *Чекурін, В. Ф.* Математичні проблеми томографії тензорних полів у твердих тілах із залишковими напруженнями / *В. Ф. Чекурін* // *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* — 2003. — Т. 46, № 3. — С. 133-148.
- [4] *Чекурін, В. Ф.* Варіаційний метод розв'язування задач томографії напруженого стану твердих тіл / *В. Ф. Чекурін* // *ФХММ.* — 1999. — Т. 35, № 5. — С. 23-32.
- [5] *Чекурин, В. Ф.* Об одном подходе к решению задач томографии напряженного состояния упругих тел с несовместными деформациями / *В. Ф. Чекурин* // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* — 2000. — № 6. — С. 38-48.
- [6] *Чекурін, В. Ф.* Скінченно-елементна реалізація методу розв'язування двовимірних задач поляризаційно-оптичної томографії напружень / *В. Ф. Чекурін, Т. Б. Брич* // *Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології.* — 2006. — № 4. — С. 98-108.

Finite element method for solving the problems of polarization-optical tomography of stresses in light-guide glass fiber preforms

Vasyl Chekurin, Taras Brych

Direct and inverse problems for nondestructive evaluation of residual stresses in a long cylindrical body of a piece-wise homogeneous cross-section under isothermal conditions have been considered. The concept of incompatible eigenstrains caused by the physical and structural material inhomogeneities has been used to describe the residual stresses origination. The direct problem for 2-D field of residual stresses determination in the body cross-section has been formulated within this approach. The eigenstrains distributions in the body have been defined in the direct problem due to values of thermal expansion coefficients of the cross-section components. For cases when the eigenstrain distributions in the body cross-section are a priori unknown a 2-D inverse problem for the residual stresses determination has been formulated. The empirical data obtained by probing the body with polarized light in the directions normal to the body cylindrical axis has been used as the input one for the inverse problem. The finite-element methods for solving the direct and inverse problems have been developed. On this basis, applying the method of numerical experiment, the influence of the scan technique and input data amount on the precision solution of the inverse problem has been studied. The effectiveness of the developed methods for nondestructive tomographic evaluation of the residual stresses the preforms of polarization preserving light-guide glass fibers of three types has been evaluated.

Конечно-элементный метод решения задач поляризационно-оптической томографии напряжений в заготовках оптоволоконных световодов

Василь Чекурин, Тарас Брыч

Рассмотрены прямая и обратная задачи неразрушающего определения остаточных напряжений в длинном цилиндрическом теле кусочно-однородного сечения при изотермических условиях. Для описания остаточных напряжений применена концепция несовместных свободных деформаций, обусловленных физической и структурной неоднородностями. В рамках такого подхода сформулирована двухмерная прямая задача определения остаточных напряжений в сечении цилиндра. Свободные деформации для прямой задачи задавались исходя из распределения коэффициента теплового расширения в сечении. Сформулирована обратная двухмерная задача определения остаточных напряжений на основании данных, полученных зондированием цилиндрического тела поляризованным светом в направлениях, нормальных к его оси. Разработаны конечно-элементные методики решения прямой и обратной задач. На этой основе, используя метод численного эксперимента, исследовано влияние схемы сканирования и объема используемых данных на точность решения обратной задачи. Исследована эффективность использования разработанных методик для неразрушающего томографического определения остаточных напряжений в заготовках стекловолоконных световодов, сохраняющих поляризацию сигнала.

Отримано 11.10.10