

## Побудова $h$ -адаптивних схем методу скінченних елементів для задач теорії пружності

Іван Дияк<sup>1</sup>, Ярема Савула<sup>2</sup>, Юрій Ящук<sup>3</sup>

<sup>1</sup> к. ф.-м. н., Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail: dyyak@lnu.edu.ua

<sup>2</sup> д. ф.-м. н., професор, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail: savula@lnu.edu.ua

<sup>3</sup> Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail: yuriy.yashchuk@gmail.com

*Розглянуто задачу деформування двовимірного однорідного пружного тіла з тріщиною. Запропоновано стратегію побудови адаптивної сітки скінченних елементів, що базується на аналізі різниці розв'язків задачі, одержаних методом скінченних елементів і прямим методом граничних елементів. У випадку несумісного скінченноелементного розбиття отримуємо числовий розв'язок, накладаючи умову слабкої неперервності переміщень уздовж межі несумісності та використовуючи мортарні функції. Досліджено застосовність різниці напружень, отриманих обома методами, для оцінювання похибки. Запропоновано спосіб побудови такої оцінки, що дає змогу порівнювати точність результатів на окремих скінченних елементах. Числові результати підтверджують ефективність запропонованого оцінювання як на сумісних, так і несумісних розбиттях.*

**Ключові слова:** оцінювач похибки, прямий метод граничних елементів, метод скінченних елементів, мортарні функції, напружено-деформований стан.

**Вступ.** Задача розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) пружних тіл — невід'ємна частина етапу розробки у машинобудуванні, визначення міцності та довговічності конструкцій і споруд. У зв'язку з розмаїттям таких задач найпоширенішим підходом до їх розв'язування є використання числових методів, зокрема, методу скінченних елементів (МСЕ). Особливості його застосування добре вивчені та висвітлені в літературі [1], [2]. На практиці об'єкти досліджень містять дефекти, які виникають під час виготовлення чи в ході їх експлуатації. Тому виникає потреба визначення НДС тіл із тріщинами, що суттєво ускладнює процес розв'язування сформульованої задачі. Хоча швидкодія й об'єми пам'яті комп'ютерів в останнє десятиліття значно зросли, все ж залишається ще багато інженерних задач, які розв'язують із багатьма спрощеннями. Одна з найпоширеніших методик, яка надає можливість зменшення обчислювальних затрат за дотримання вимог щодо точності результату — це  $h$ -адаптація. Її суть полягає у можливості локального керування похибкою результату за допомогою місцевого згущення (а часом і розрідження) сітки скінченних елементів. Різні варіанти таких методик описані, наприклад, у працях [3], [4], [5]. Кожен із підходів засвідчив свою ефективність для певного класу задач, але універсального загальноновизнаного підходу досі не існує.

Із цієї причини можемо спостерігати появу нових оцінювачів похибки, а на їх основі — нових адаптивних стратегій, зокрема, для задач теорії пружності з локальними концентраторами.

У роботі [6] було подано й обґрунтовано адаптивний алгоритм, який базується на порівнянні результатів МСЕ і методу граничних елементів (МГЕ). Різний порядок точності обчислення напружень за цими методами дозволяє використовувати різницю між ними для оцінки похибки результату та визначення зон згущення сітки. Метою цієї роботи є дослідження ефективності застосування такого підходу для вивчення концентрації напружень в околі тріщини.

### 1. Метод скінченних елементів із використанням мортарних функцій

Розглянемо двовимірне ізотропне однорідне тіло, що займає область  $\Omega$  й обмежене границею  $\Gamma$ . Нехай на частині границі  $\Gamma_u$  задано граничні умови на переміщення  $u$ , а на решті границі  $\Gamma_\tau = \Gamma \setminus \Gamma_u$  — граничні умови на зусилля  $\tau$ . Нехай  $\sigma$  та  $\varepsilon$  — відповідно напруження та деформації, які виникають у тілі.

Згідно класичного підходу МСЕ до розв’язування задач теорії пружності в переміщеннях область  $\Omega$  розбивають на скінченні елементи  $\Omega_e$ , які повинні задовольняти умови сумісності: вершина одного чотирикутного скінченного елемента не може належати стороні іншого. Проте, в процесі адаптації скінченноелементної сітки дотримання умови суміщення вузлів апроксимації пов’язано зі значними труднощами (з’являються чотирикутники з гострими кутами). Застосування мортарних функцій дозволяє уникнути таких обмежень [7].

Нехай  $\Omega$  розбито на  $M$  підобластей  $\Omega_i$ , що не перетинаються. У кожній підобласті задане деяке сумісне скінченноелементне розбиття. На спільній границі  $\Gamma_{ij}$  двох підобластей  $\Omega_i$  й  $\Omega_j$  (інтерфейсі) умова сумісності в загальному випадку виконуватися не буде. Тому на інтерфейсі вводять умову слабкої неперервності переміщень

$$\int_{\Gamma_{ij}} (u_i - u_j) \varphi_k(t) d\Gamma_{ij} = 0, \quad k = \overline{1, K-1}, \quad t \in \Gamma_{ij}, \quad (1)$$

де  $\varphi_k(t)$  — деякий базис, визначений на інтерфейсі,  $t$  — параметр, введений на  $\Gamma_{ij}$ . Функції  $\varphi_k(t)$  називають мортарними, тобто «склеюючими». Для побудови мортарного базису беруть за основу вузли розбиття однієї з підобластей  $\Omega_i$  чи  $\Omega_j$ , що попали на  $\Gamma_{ij}$  (позначимо їх  $t_k, i = \overline{0, K}$ ), та визначають лінійні функції таким чином

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t < t_{k-1}; \\ 1, & t_{k-1} \leq t < t_k, \quad k = 1; \\ \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}, & t_{k-1} \leq t < t_k, \quad 1 < k < K - 1; \\ -\frac{t - t_{k+1}}{t_{k+1} - t_k}, & t_k \leq t < t_{k+1}, \quad 1 < k < K - 1; \\ 1, & t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = K - 1; \\ 0, & t_{k+1} \leq t < t_K. \end{cases}$$

Позначимо через  $V_i$  — простір, натягнутий на базис скінченноелементного розбиття підобласті  $\Omega_i$ , а також введемо  $V = \prod_i V_i$ ,  $\Lambda = \text{span}\{\phi_k\}$ . На відміну від підходу, запропонованого нами у [8], додаткову умову (1) врахуємо за допомогою методу множників Лагранжа, як описано у роботі [9]. У цьому випадку варіаційне формулювання задачі полягає у знаходженні таких  $(u_h, \lambda_h) \in (V, \Lambda)$ , що

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) + b(\lambda_h, v_h) &= f(v_h), & v_h &\in V, \\ b(\mu_h, u_h) &= 0, & \mu_h &\in \Lambda. \end{aligned}$$

Тут білінійна форма  $a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \sigma(u_h) \varepsilon(v_h) d\Omega$  визначає енергію деформації тіла, лінійна форма  $f(v_h) = \int_{\Gamma_{\tau}} \tau v_h d\Gamma_{\tau}$  — роботу зовнішніх сил, а білінійна форма  $b(\mu, u) = \int_{\Gamma_{ij}} (u_i - u_j) \mu d\Gamma_{ij}$  справджує умову слабкої неперервності (1). У праці [9] показано, що розв'язування задачі в такому формулюванні не погіршує швидкості збіжності, порівняно з класичним МСЕ: для переміщень  $u$  порядок збіжності залишається  $O(h^2)$ . Отже, напруження чи деформації визначаються з порядком  $O(h)$ .

## 2. Прямий метод граничних елементів

Застосуємо також прямий метод граничних елементів (ПМГЕ) для розв'язування задачі пружності з метою побудови критерію адаптації сітки на основі порівняння результатів, одержаних ПМГЕ та МСЕ. Виходячи з теореми взаємності, запишемо таке граничне інтегральне рівняння [1]

$$u_j(\xi) = \int_{\Gamma} G_{ij}(x, \xi) \tau_i(x) d\Gamma + \int_{\Gamma} F_{ij}(x, \xi) u_i(x) d\Gamma, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

де  $G_{ij}(x, \xi)$  та  $F_{ij}(x, \xi)$  — відповідно фундаментальні розв'язки для переміщень і зусиль. Спрямувавши точку  $\xi$  до поверхні тіла та розбивши  $\Gamma$  на граничні елементи  $\Gamma_p, p = \overline{1, N}$ , співвідношенню (2) надамо вигляду

$$\frac{1}{2} u_j(\xi) = \sum_{p=1}^N \int_{\Gamma_p} G_{ij}(x, \xi) \tau_i(x) d\Gamma_p - \sum_{p=1}^N \int_{\Gamma_p} F_{ij}(x, \xi) u_i(x) d\Gamma_p. \quad (3)$$

Введемо на  $\Gamma_p$  деякий параметр  $t \in (-1, 1)$ . У формулі (3)  $u$  та  $\tau$  визначаються на поверхні, тому можна використати апроксимацію їх поліномами Лагранжа  $N^r(t)$ , вибравши на  $\Gamma_p$  систему вузлів  $\xi^{pr}, r = \overline{1, m}$

$$\begin{aligned} u_i(\xi^p(t)) &= \sum_{r=1}^m u_i^{pr} N^r(t), & u_i^{pr} &= u_i(\xi^{pr}), & \xi^p &\in \Gamma_p, \\ \tau_i(\xi^p(t)) &= \sum_{r=1}^m \tau_i^{pr} N^r(t), & \tau_i^{pr} &= \tau_i(\xi^{pr}), & \xi^p &\in \Gamma_p. \end{aligned}$$

Підставивши цю апроксимацію у (3) та застосувавши метод Бубнова-Гальоркіна, отримаємо таку систему лінійних алгебричних рівнянь відносно невідомих величин  $u_i^{pr}$  та  $\tau_i^{pr}$

$$\frac{1}{2} u_j^{qs} \int_{-1}^1 N^s(\eta) J_q(\eta) d\eta = \sum_{p=1}^N \sum_{r=1}^m \tau_i^{pr} \int_{-1}^1 N^s(\eta) J_q(\eta) \int_{-1}^1 G_{ij}(x^p(t), \xi^q(\eta)) J_p(t) dt d\eta - \sum_{p=1}^N \sum_{r=1}^m u_i^{pr} \int_{-1}^1 N^s(\eta) J_q(\eta) \int_{-1}^1 F_{ij}(x^p(t), \xi^q(\eta)) J_p(t) dt d\eta,$$

де  $J_p(t)$  — якобіан переходу для граничного елемента  $\Gamma_p$ .

### 3. Оцінювання похибки

Нехай  $\sigma_{Fij}$  і  $\sigma_{Bij}$ ,  $i, j = \overline{1,3}$  — компоненти тензорів напружень, отримані відповідно з використанням МСЕ та ПМГЕ. У праці [6] для оцінювання похибки напружень запропоновано використовувати величину

$$\eta_{FB} = \frac{\sqrt{\int_{\Omega_e} \sum_{i,j=1}^3 (\sigma_{Fij} - \sigma_{Bij})^2 d\Omega_e}}{\sqrt{\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\sigma_{Bij})^2 d\Omega}} \frac{\|\Omega\|}{\|\Omega_e\|}. \quad (4)$$

Тут  $\|\Omega\|$  й  $\|\Omega_e\|$  — площі поверхонь всього тіла та деякого скінченного елемента відповідно.

Нехай  $\eta_{FT}$  — величина, обчислена за формулою (4) з використанням гранично-елементного розбиття з великою кількістю елементів. Тоді  $\eta_{FT}$  можна вважати істинною похибкою. Для кількісного відображення адекватності оцінки  $\eta_{FB}$  розглядатимемо індекс ефективності, що визначається співвідношенням

$$\theta = \eta_{FB} / \eta_{FT}.$$

Близькість  $\theta$  до одиниці означатиме ефективність запропонованого оцінювання.

### 4. Числові результати

Дослідимо адекватність оцінки  $\eta_{FB}$  на двомірній задачі деформування пружного тіла з тріщиною, схему навантаження якого подано на рис. 1. Механічні характеристики матеріалів вибирали такі, як у роботі [3].

Зауважимо, що в цій задачі тріщину можна моделювати як виріз певної форми. Для МСЕ цей виріз зручно робити трикутним, щоб уникнути появи скінченних елементів дуже малих розмірів. У МГЕ моделювання вирізом трикутної форми призводить до появи дуже близьких точок на граничних елементах в околі вершини тріщини, що значно погіршує числовий розв'язок. Тому у разі застосування МГЕ тріщину доцільно моделювати вирізом прямокутної форми.

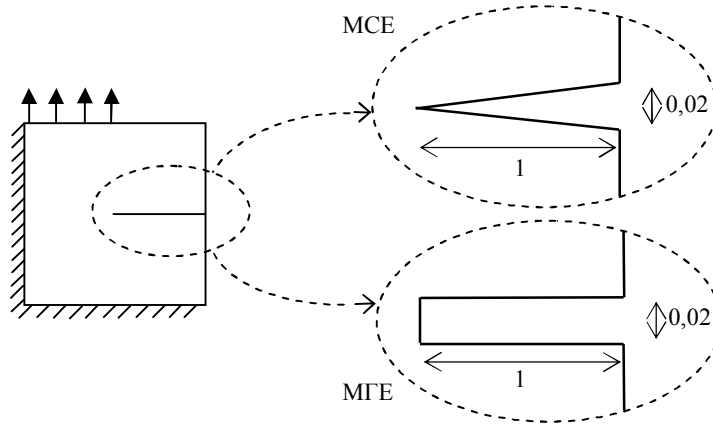


Рис. 1. Схема тіла та варіантів моделювання тріщини

Дослідження числових розв'язків проводили на сумісних і несумісних розбиттях. Результати для одного із варіантів сумісних розбиттів наведені на рис. 2. На інших сумісних розбиттях результати аналогічні. Аналіз результатів показав, що оцінка похибки є велика в околі вістря тріщини та біля точки зміни граничних умов із зусиль на переміщення (лівий верхній кут області). Значення індексів ефективності вказують на те, що оцінка  $\eta_{FB}$  є адекватна на більшості скінченних елементів. На елементах, для яких  $\theta \gg 1$ , похибка є значно менша, ніж на решті елементів. Тому з точки зору побудови адаптивних схем ці результати є прийнятні та не впливають на правильність модифікації сітки.

Розглянемо результати, отримані на несумісному розбитті (рис. 3). Область розбита на дві підобласті так, щоб згустити сітку в околі вістря тріщини. Задачу розв'язували із використанням мортарних функцій на інтерфейсі.

Отримані значення  $\eta_{FB}$  вказують на зростання похибки біля вістря тріщини та на елементах, що межують з інтерфейсом. Останнє можна пояснити розривністю

0,71	0,47	0,28	0,42	0,33	0,10	0,05	0,03	0,97	0,84	0,41	0,92	1,03	0,99	1,17	1,43
0,40	0,44	0,23	0,25	0,25	0,12	0,04	0,03	1,10	0,91	1,04	1,11	0,93	0,96	0,98	1,03
0,16	0,29	0,27	0,21	0,26	0,14	0,05	0,04	0,99	0,89	0,92	1,13	0,99	0,94	1,24	1,40
0,11	0,27	0,35	0,62	0,97	0,14	0,10	0,08	0,87	0,93	0,94	1,20	1,53	1,20	1,27	2,63
0,11	0,25	0,32	0,72	0,62	0,18	0,06	0,05	1,04	1,02	1,08	1,32	1,18	0,75	0,85	3,01
0,08	0,19	0,22	0,36	0,35	0,20	0,12	0,05	1,16	1,07	1,06	1,07	1,08	0,96	0,92	0,98
0,05	0,14	0,16	0,26	0,45	0,29	0,18	0,11	1,05	1,07	1,00	1,00	1,00	0,97	0,95	0,98
0,05	0,10	0,11	0,28	0,56	0,39	0,21	0,16	0,84	1,11	1,06	0,88	0,96	0,97	0,96	0,94

Рис. 2. Оцінки  $\eta_{FB}$  (а) й індекси ефективності  $\theta$  (б) для сумісного розбиття

0,79	0,62	0,32	0,09	1,06	0,93	0,97	0,91	
0,69	1.69 2.02 1.81 2.52 2.10 0.76 0.40 0.64 1.11 1.28 1.15 0.92 0.71 0.32 0.34 0.28 0.72 0.81 0.75 0.45 0.44 0.37 0.21 0.15 0.54 0.69 0.59 1.60 1.38 0.26 0.25 0.40		0,21	1,03	1.00 1.00 1.01 0.99 0.99 1.04 1.07 0.99 1.02 1.01 1.00 0.98 0.99 0.95 1.05 1.02 1.00 1.02 1.02 0.93 1.00 1.08 1.00 0.90 1.00 1.01 1.02 2.45 1.34 0.82 1.28 1.29		0,92	
0,17	1.03 0.57 0.50 1.49 1.22 0.29 0.18 0.85 0.75 0.51 0.41 0.41 0.46 0.28 0.14 0.10 0.45 0.72 0.68 0.61 0.76 0.42 0.20 0.15 1.43 1.09 1.13 2.03 1.92 0.74 0.37 0.36		0,11	0,94	1.02 1.07 1.14 2.11 1.37 0.70 0.91 4.82 1.04 1.10 1.17 1.16 1.18 1.02 0.85 0.86 1.03 1.05 1.06 0.95 1.05 1.02 1.01 0.96 0.99 1.03 1.02 0.99 1.01 1.01 1.01 1.02		1,04	
0,16	0,70	0,70	0,08	1,00	1,03	1,01	0,91	

Рис. 1. Оцінки  $\eta_{FB}$  (а) та індекси ефективності  $\theta$  (б) для несумісного розбиття

переміщень на межі підобластей, і, як наслідок, поганою точністю знайдених напружень. Індекс ефективності для більшості елементів є близький до 1, що вказує на адекватність оцінювання похибки. Виняток становлять елементи, які безпосередньо межують із вістрям тріщини.

**Висновки.** Різницю між напруженнями, отриманими МСЕ та ПМГЕ, можна ефективно використовувати для оцінювання похибки числових розв'язків задач деформування тіл із тріщинами. Використання мортарних функцій для знаходження розв'язку МСЕ на несумісних розбиттях не погіршує ефективність оцінювання похибки біля інтерфейсу. Отже, адекватність запропонованого оцінювання зберігається, тому його можна використовувати для побудови адаптивних схем. Подальші дослідження будуть спрямовані на розробку алгоритму автоматизації побудови скінченно- та граничноелементної сіток на основі вказаної оцінки та його застосування у задачах пружності.

## Література

- [1] *Hutton, D. V.* Fundamentals of finite element analysis / *D. V. Hutton* // New-York: The McGraw-Hill Companies, 2004. — P. 494.
- [2] *Zienkiewicz, O. C.* The finite element method. Fifth edition. Vol. 2. Solid mechanics / *O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor* — Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. — P. 633.
- [3] *Квасниця, Г.* Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики / *Г. Квасниця, Г. Шинкаренко* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. — 2002. — Вип. 5. — С. 95-106.
- [4] *Geers, M. G. D.* Damage and crack modeling in single-edge and double edge notched concrete beams / *M. G. D. Geers, R. de Borst, R. H. J. Peerlings*. — Engineering Fracture Mechanics. — 2000. — Vol. 65. — P. 247-261.
- [5] *Ruter, M.* Adaptive finite element analysis of crack propagation in elastic fracture mechanics based on averaging techniques / *M. Ruter, E. Stein* // Computational Materials Science. — 2004. — Vol. 31. — P. 247-257.

- [6] Дияк, І. І. Побудова та дослідження чисельних розв'язків задач теорії пружності на основі  $h$ -адаптивних апроксимацій / І. І. Дияк, І. Г. Макара, Ю. О. Ящук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія. Фіз.-мат. науки. Зб. наук. пр. — Кам.-Подільський нац. університет ім. Івана Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 76-85.
- [7] Bernardi, C. A new non conforming approach to domain decomposition: The mortar element method / C. Bernardi, Y. Maday, A. Patera // Nonlinear partial differential equations and their applications. — 1994. — P. 13-51.
- [8] Дияк, І. Скінченно-граничноелементна схема методу декомпозиції області для плоских задач теорії пружності з несумісними розбиттями підобластей / І. Дияк, І. Прокопишин, С. Матисяк // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. — 2008. — Вип. 7. — С. 40-51.
- [9] Wohlmuth, B. I. A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier / B. I. Wohlmuth // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2000. — Vol. 38, Issue 3. — P. 989-1012.
- [10] Alshoaibi, A. M. Development of efficient finite element software of crack propagation simulation using adaptive mesh strategy / A. M. Alshoaibi, A. K. Ariffin, M. N. Almaghrabi // American Journal of Applied Sciences. — 2009. — Vol. 9. — P. 661-666.

## **$h$ -adaptive finite element method schemes development for problems of the theory of elasticity**

Ivan Dyyak, Yarema Savula, Yuriy Yashchuk

*The problem of two-dimensional homogeneous elastic deformation of an object with a crack is considered. The difference of solutions constructed by finite element method and the direct boundary element method for this problem is proposed as criteria for constructing the adaptive finite element mesh. In the case of incompatible finite element partition we obtain a numerical solution by satisfying the weak continuity conditions of displacements along the boundary with use of mortar functions. The difference of stresses obtained by both methods as error estimation is investigated. The way of such estimation construction is proposed, which allows the comparison of the results accuracy on different finite elements. Numerical results confirm the effectiveness of the proposed assessment for solving elastic problems.*

## **Построение $h$ -адаптивных схем метода конечных элементов для задач теории упругости**

Іван Дьяк, Ярема Савула, Юрій Ящук

*Рассмотрена задача деформирования двумерного однородного упругого тела с трещиной. Предложено использовать в качестве критерия построения адаптивной сетки конечных элементов разницу решений этой задачи методом конечных элементов и прямым методом граничных элементов. В случае несовместимого конечноэлементного разбиения получаем численное решение путем удовлетворения условия слабой непрерывности смещений вдоль границы несовместимых разбиений с использованием мортарных функций. Исследовано применимость использования разницы напряжений, полученных обеими методами, для оценивания погрешности. В работе представлено способ построения такой оценки, который дает возможность сравнивать точность результатов на отдельных конечных элементах. Численные результаты подтверждают эффективность предложенной оценки, как на совместимых, так и несовместимых разбиениях.*

Отримано 31.01.11