

Стаціонарне температурне поле у півбезмежному тілі з теплоактивним або теплоізолюваним дисковим включенням

Григорій Кіт¹, Ольга Сушко²

¹ д. ф.-м. н., член-кор. НАН України, професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: hkit@iapmm.lviv.ua

² к. ф.-м. н., с. н. с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: sushko@email.ua

Розв'язано задачі стаціонарної теплопровідності для півбезмежного тіла з паралельним або перпендикулярним до його межі теплоактивним дисковим включенням (на якому задано температуру або тепловий потік), а також теплоізолюваним включенням. На межі тіла задано нульову температуру або теплоізоляцію. Задачі зведено до інтегральних рівнянь із сингулярними та регулярними ядрами. Якщо віддаль центра кругового включення від межі більша, ніж його радіус, то регулярні ядра замінено виродженими і тоді одержано точні розв'язки рівнянь, праві частини яких є поліноми другого степеня. Якщо віддаль між включенням і межею тіла мала, то задачу розв'язано аналітично-числовим методом.

Ключові слова: півбезмежне тіло, температурне поле, теплоактивне включення, теплоізолюване включення, двовимірні сингулярні інтегральні рівняння.

Вступ. Багато елементів сучасних конструкцій та інженерних споруд працюють в умовах нерівномірного нагрівання, за якого виникають градієнти температури та неоднакове теплове розширення окремих частин. Таке нерівномірне теплове розширення викликає температурні напруження. Наявність у тілі тонких теплоактивних включень, на яких задано температуру або теплові потоки, зумовлює локальне зростання в їх околі температурних градієнтів і напружень.

Задачі про збурення теплового потоку в однорідному середовищі в околі теплоізолюваного включення є важливі у техніці та геофізиці. У цьому випадку таке включення є тепловим екраном, ідеальність теплового контакту порушується. Воно впливає на температурні та механічні поля у тілі, його поверхні прогриваються нерівномірно, внаслідок чого виникають дотичні напруження. Розв'язки задач про збурення теплового потоку в околі тонких включень можна використовувати для оцінки зміни геотермічного градієнта, що важливо під час термічних методів розвідки в геофізиці, а також вивчення термонапруженого стану земної кори.

Під час дослідження напруженого стану тіла з теплоактивними або теплоізолюваними тріщинами проміжним етапом є визначення температурного поля за заданими на місці тріщин температурі або тепловому потоці. Більшість таких

досліджень в осесиметричному формулюванні виконані методом інтегрального перетворення Ганкеля та дуальних інтегральних рівнянь для безмежного тіла з круговою тріщиною, на якій задано сталу температуру або тепловий потік [1-6].

У працях [7-10] розв'язують задачі стаціонарної теплопровідності для безмежного тіла з круговими теплоактивними або теплоізованими включеннями (тріщинами). Із використанням гармонічних потенціалів простого та подвійного шарів такі задачі зведено до розв'язування двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь. При цьому густини потенціалів мають простий фізичний сенс: це потужність джерел і диполів тепла на місці розташування включень.

У цій роботі розв'язані задачі стаціонарної теплопровідності для півбезмежного тіла з теплоактивним чи теплоізованим дисковим включенням, паралельним або перпендикулярним до межі тіла, яка теплоізована або підтримується за нульової температури. Наведеним у праці інтегральним рівнянням для перпендикулярного до теплоізованої межі тіла теплоактивного включення моделюється також контактна задача для півпростору з двома штампами, що проілюстровано прикладом 3.2.

1. Паралельне до межі тіла включення

Розглянемо півбезмежне тіло з паралельним до його межі тонким дисковим включенням радіуса a : теплоактивним, на якому задані температура чи тепловий потік, або теплоізованим. Початок декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$ розмістимо в центрі круга S , який є серединною площиною включення, спрямувавши вісь Ox_3 перпендикулярно до цієї площини (рис. 1).

1.1. Теплоактивне включення. Стационарне температурне поле, зумовлене тепловиділенням, подамо через гармонічний потенціал простого шару з густиною $w_k(x_1, x_2)$, який описує потужність теплових джерел в області S [7]

$$T_k(x^*) = \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S w_k(\xi) \left[\frac{1}{R(x^*, \xi)} + \frac{(-1)^k}{R_1(x^*, \xi)} \right] d_\xi S, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad (1)$$

$$R(x^*, \xi) = \sqrt{\omega_1^2(x, \xi) + x_3^2}, \quad R_1(x^*, \xi) = \sqrt{\omega_1^2(x, \xi) + (x_3 - 2h)^2},$$

$$\omega_1^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2, \quad x^* = (x_1, x_2, x_3), \quad (2)$$

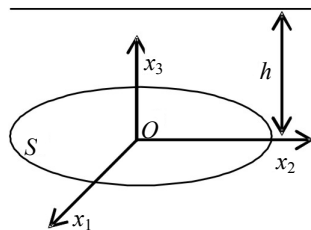


Рис. 1. Схема розташування включення

де λ — коефіцієнт теплопровідності, h — віддаль центра включення від межі тіла, $k = 1$ відповідає нульовій температурі межі, а $k = 2$ — її теплоізоляції.

Задаючи різні вирази для функції $w(\xi)$, із подання (1) знаходимо температуру в довільній точці тіла. Введемо безрозмірні величини

$$y_i = \frac{x_i}{a}, \quad \eta_i = \frac{\xi_i}{a}, \quad \varepsilon = \frac{a}{h}, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

і запишемо розподіл температури в площині $x_3 = 0$

$$T_k(y) = \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S w_k(\eta) \left[\frac{1}{R(y, \eta)} + \frac{(-1)^k}{R_1(y, \eta)} \right] d_\eta S, \quad y = (y_1, y_2, 0). \quad (4)$$

Якщо в області тепловиділення S відома температура $T_k(y)$, то з інтегрального рівняння (4) визначаємо потужності відповідних джерел тепла.

Нехай центр включення знаходиться на віддалі $h > a$ від межі тіла. Замінімо тоді регулярне ядро $R_1^{-1}(y, \eta)$, яке враховує взаємодію включення з межею тіла, виродженим

$$R_1^{-1}(y, \eta) = \left[\omega_1^2(y, \eta) + \frac{4}{\varepsilon^2} \right]^{-1/2} \approx \frac{\varepsilon}{2} \left[1 - \frac{0,3\varepsilon^2 \omega_1^2(y, \eta)}{4} \right]. \quad (5)$$

Максимальна похибка розкладу (5) для $\varepsilon = a/h = 1$ не перевищує 3 % і швидко зменшується зі збільшенням віддалі h .

У разі довільного значення $T_k(y)$ інтегральне рівняння (4) має необмежений на контурі області S розв'язок [11], який можна записати у вигляді

$$w_k(\eta) = \frac{\psi_k(\eta)}{\sqrt{L(\eta)}}, \quad L(\eta) = 1 - \eta_1^2 - \eta_2^2, \quad k = 1, 2, \quad (6)$$

де $\psi_k(\eta)$ — обмежені функції. За певних значень функції $T_k(y)$ розв'язок може бути й обмежений [7].

Якщо функція $T_k(y)$ у рівнянні (4) є поліном степеня n , то $\psi_k(\eta)$ також є поліном такого ж степеня і тоді можна одержати точний розв'язок цього рівняння. Наведемо розв'язок рівняння (4), якщо $T_k(y)$ і $\psi_k(\eta)$ описуються поліномами другого степеня

$$T_k(y) = \sum_{i,j=0}^2 t_{ij} y_1^i y_2^j, \quad \psi_k(\eta) = \sum_{i,j=0}^2 b_{ij} \eta_1^i \eta_2^j, \quad i + j \leq 2. \quad (7)$$

Підставимо ці вирази у рівняння (4) й обчислимо інтеграли

$$I_{ij}(y) = \iint_S \frac{\eta_1^i \eta_2^j}{\sqrt{L(\eta)} R(y, \eta)} d_\eta S \quad \text{для} \quad i + j \leq 2: \quad (8)$$

$$I_{00}(y) = \pi^2, \quad I_{10}(y) = \pi^2 y_1 / 2, \quad I_{01}(y) = \pi^2 y_2 / 2, \quad I_{11}(y) = 3\pi^2 y_1 y_2 / 8, \\
 I_{20}(y) = \pi^2 (4 + 5y_1^2 - y_2^2) / 16, \quad I_{20}(y) = \pi^2 (4 - y_1^2 + 5y_2^2) / 16.$$

Обчислимо також інтеграли

$$K_{ij} = \iint_S \frac{\eta_1^i \eta_2^j}{\sqrt{L(\eta)}} d\eta S, \\
 K_{00} = 2\pi, \quad K_{20} = K_{02} = 2\pi / 3, \quad K_{22} = 2\pi / 15, \quad K_{40} = K_{04} = 2\pi / 5. \quad (9)$$

Підставимо вирази (6) і (7) із використанням (5), (8) і (9) у рівняння (4) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях y_1 та y_2 . Тоді одержимо систему алгебричних рівнянь

$$\delta_{1k} b_{00} + \delta_{2k} b_{20} + \delta_{2k} b_{02} = 4\lambda t_{00}, \quad 3\pi b_{11} = 32\lambda t_{11}, \\
 \delta_{3k} b_{10} = 80\lambda t_{10}, \quad \delta_{3k} b_{01} = 80\lambda t_{01}, \\
 (-1)^{k+1} 3\varepsilon^3 b_{00} + 40\delta_{4k} b_{20} - 40\delta_{5k} b_{02} = 160\lambda t_{20}, \\
 (-1)^{k+1} 3\varepsilon^3 b_{00} - 40\delta_{5k} b_{20} + 40\delta_{4k} b_{02} = 160\lambda t_{02}; \quad (10)$$

$$\delta_{1k} = \pi + (-1)^k \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{20} \right), \quad \delta_{2k} = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \left(\frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^3}{50} \right), \quad \delta_{3k} = 10\pi + (-1)^k \varepsilon^3, \\
 \delta_{4k} = \frac{5}{16} \pi - (-1)^k \frac{\varepsilon^3}{40}, \quad \delta_{5k} = \frac{\pi}{16} + (-1)^k \frac{\varepsilon^3}{40}. \quad (11)$$

Після розв'язання системи рівнянь (10) знаходимо коефіцієнти b_{ij}

$$b_{00} = \frac{4\lambda [\delta_{6k} t_{00} - \delta_{2k} (t_{20} + t_{02})]}{\delta_{6k} \delta_{1k} + (-1)^k 3\varepsilon^3 \delta_{2k} / 20}, \quad b_{10} = \frac{80\lambda}{\delta_{3k}} t_{10}, \quad b_{01} = \frac{80\lambda}{\delta_{3k}} t_{01}, \\
 b_{11} = \frac{32\lambda}{3\pi} t_{11}, \quad b_{20} = \frac{\delta_{7k}}{\delta_{6k}} + \delta_0, \quad b_{02} = \frac{\delta_{7k}}{\delta_{6k}} - \delta_0; \quad (12)$$

$$\delta_{6k} = \frac{\pi}{4} - (-1)^k \frac{\varepsilon^3}{20}, \quad \delta_{7k} = 2\lambda (t_{20} + t_{02}) + (-1)^k \frac{3\varepsilon^3 b_{00}}{40}, \quad \delta_0 = \frac{16\lambda}{3\pi} (t_{20} - t_{02}). \quad (13)$$

У виразах (12) δ_{1k} , δ_{2k} і δ_{3k} задані співвідношеннями (11).

1.2. Теплоізольоване включення. Температурне поле у тілі з включенням подамо у вигляді

$$T_k(x^*) = t_0(x^*) + t_k(x^*), \quad (14)$$

де $t_0(x^*)$ — температурне поле в тілі без включення, $t_k(x^*)$ — збурене включенням температурне поле $t_0(x^*)$. Граничну умову на включенні для $x_3 = 0$ із використанням (14) запишемо так

$$\frac{\partial T_k(x^*)}{\partial x_3} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial t_k(x^*)}{\partial x_3} = -\frac{\partial t_0(x^*)}{\partial x_3}, \quad x^* = (x_1, x_2, x_3). \quad (15)$$

Температуру $t_k(x^*)$ шукаємо у вигляді гармонічного потенціалу подвійного шару [8]

$$\begin{aligned} t_k(x^*) &= -\frac{1}{4\pi\lambda} \frac{\partial}{\partial x_3} \iint_S \gamma_k(\xi) \left[\frac{1}{R(x^*, \xi)} + \frac{(-1)^{k+1}}{R_1(x^*, \xi)} \right] d_\xi S = \\ &= \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S \gamma_k(\xi) \left[\frac{x_3}{R^3(x^*, \xi)} + (-1)^{k+1} \frac{x_3 - 2h}{R_1^3(x^*, \xi)} \right] d_\xi S, \end{aligned} \quad (16)$$

де $R(x^*, \xi)$ і $R_1(x^*, \xi)$ задані виразами (2), а густина розподіленого по області S подвійного шару $\gamma_k(\xi)$ виражається через граничні значення температури на поверхнях включення співвідношенням

$$\gamma_k(x) = \lambda [t^+(x) - t^-(x)], \quad x \in S. \quad (17)$$

Для визначення $\gamma_k(\xi)$ знайдемо похідну по нормалі до області S від $t_k(x^*)$ із виразу (16) і підставимо в граничну умову (15). Тоді, врахувавши, що

$$q(x) = -\lambda \left. \frac{\partial t_0(x^*)}{\partial x_3} \right|_{x_3=0}, \quad \text{і ввівши величини (3), одержимо гіперсингулярне інтегральне рівняння}$$

$$\iint_S \gamma_k(\eta) \left[\frac{1}{R^3(y, \eta)} + \frac{(-1)^{k+1}}{R_1^3(y, \eta)} \right] d_\eta S = 4\pi q(y). \quad (18)$$

Рівняння (18) має обмежений на контурі області S розв'язок [11]

$$\gamma_k(\eta) = \sqrt{L(\eta)} \varphi_k(\eta), \quad L(\eta) = 1 - \eta_1^2 - \eta_2^2. \quad (19)$$

Якщо його права частина є поліноміальна функція, то $\varphi_k(\eta)$ також поліноміальна функція. Нехай

$$q(y) = \sum_{i,j=0}^2 q_{ij} y_1^i y_2^j, \quad \varphi_k(\eta) = \sum_{i,j=0}^2 c_{ij} \eta_1^i \eta_2^j, \quad i + j \leq 2. \quad (20)$$

Підставимо вирази (19) і (20) у рівняння (18), замінивши при цьому його регулярне ядро виродженням

$$R_1^{-3}(y, \eta) = \left[\omega_1^2(y, \eta) + \frac{4}{\varepsilon^2} \right]^{-\frac{3}{2}} \approx \frac{\varepsilon^3}{8} \left[1 - \frac{\varepsilon^2 \omega_1^2(y, \eta)}{4} \right]. \quad (21)$$

Похибка розкладу (21) для $\varepsilon < 2/3$ не перевищує 3,4 %. Тому таке ядро можна використовувати, якщо віддаль включення від межі $h > 1,5a$. Якщо h — менше, то рівняння (18) розв'язуємо аналітично-числовим способом: сингулярний інтеграл знаходимо аналітично, а регулярний — числово [11]. Для цього розбиваємо область S на граничні елементи за радіусом і кутом та задовольняємо рівняння у точках колокації усередині введених елементів, використовуючи кусково-сталу апроксимацію шуканих функцій.

Обчислимо сингулярні інтеграли [11]

$$J_{ij}(y) = \iint_S \frac{\sqrt{L(\eta)} \eta_1^i \eta_2^j}{R^3(y, \eta)} d_\eta S, \quad \text{якщо } i + j \leq 2: \quad (22)$$

$$J_{00} = -\pi^2, \quad J_{10}(y) = -3\pi^2 y_1 / 2, \quad J_{11}(y) = -15\pi^2 y_1 y_2 / 8, \quad J_{01}(y) = -3\pi^2 y_2 / 2, \\ J_{20}(y) = \pi^2 (4 - 33y_1^2 - 3y_2^2) / 16, \quad J_{02}(y) = \pi^2 (4 - 3y_1^2 - 33y_2^2) / 16.$$

Обчислимо також інтеграли

$$L_{ij} = \iint_S \sqrt{L(\eta)} \eta_1^i \eta_2^j d_\eta S, \quad (23)$$

$$L_{00} = 2\pi / 3, \quad L_{20} = L_{02} = 2\pi / 15, \quad L_{22} = 2\pi / 105, \quad L_{40} = L_{04} = 2\pi / 35.$$

Підставивши вирази (20) із врахуванням (21)-(23) у рівняння (18) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях y_1 та y_2 , одержимо систему алгебричних рівнянь

$$2\Delta_{1k} c_{00} + \Delta_{2k} c_{20} + \Delta_{2k} c_{02} = 8q_{00}, \quad -15\pi c_{11} = 32q_{11}, \\ \Delta_{3k} c_{10} = 4q_{10}, \quad \Delta_{3k} c_{01} = 4q_{01}, \\ (-1)^k \varepsilon^5 c_{00} - 48\Delta_{4k} c_{20} - 48\Delta_{5k} c_{02} = 192q_{20}, \\ (-1)^k \varepsilon^5 c_{00} - 48\Delta_{5k} b_{20} - 48\Delta_{4k} c_{02} = 192q_{02}; \quad (24)$$

$$\Delta_{1k} = -\pi + (-1)^{k+1} \frac{\varepsilon^3}{12} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{10} \right), \quad \Delta_{2k} = \frac{\pi}{2} + (-1)^{k+1} \frac{\varepsilon^3}{30} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{7} \right), \\ \Delta_{3k} = -\frac{3}{2} \pi + (-1)^{k+1} \frac{\varepsilon^5}{120}, \quad \Delta_{4k} = \frac{33}{16} \pi + (-1)^{k+1} \frac{\varepsilon^5}{240}, \\ \Delta_{5k} = \frac{3\pi}{16} + (-1)^{k+1} \frac{\varepsilon^5}{240}. \quad (25)$$

Після розв'язання системи (24) знайдемо коефіцієнти c_{ij}

$$c_{00} = \frac{4\Delta_{6k}q_{00} - 4\Delta_{2k}(q_{20} + q_{02})}{\Delta_{1k}\Delta_{6k} + (-1)^{k+1}\varepsilon^5\Delta_{2k}/24}, \quad c_{10} = \frac{4}{\Delta_{3k}}q_{10}, \quad c_{01} = \frac{4}{\Delta_{3k}}q_{01},$$

$$c_{11} = -\frac{32}{15\pi}q_{11}, \quad c_{20} = \frac{\Delta_{7k}}{\Delta_{6k}} - \Delta_1, \quad c_{02} = \frac{\Delta_{7k}}{\Delta_{6k}} + \Delta_1; \quad (26)$$

$$\Delta_1 = \frac{16}{15\pi}(q_{20} - q_{02}), \quad \Delta_{6k} = -\frac{9\pi}{2} - (-1)^{k+1}\frac{\varepsilon^5}{60},$$

$$\Delta_{7k} = 4(q_{20} + q_{02}) + (-1)^{k+1}\frac{\varepsilon^5}{24}c_{00}. \quad (27)$$

Підставивши співвідношення (26) у вираз (20), за формулою (16) з урахуванням (19) знаходимо збурену теплоізолюваним включенням температуру. Вона має стрибок (17) на включенні, є непарна за x_3 , а для $x_3 = 0$ поза включенням дорівнює нулеві. Це впливає також із властивостей гармонічного потенціалу подвійного шару. Загальне температурне поле у тілі визначається формулою (14).

2. Перпендикулярне до межі тіла включення

Розглянемо півбезмежне тіло з перпендикулярним до його межі теплоактивним або теплоізолюваним дисковим включенням радіуса a . Початок декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$ розмістимо в центрі круга S , спрямувавши вісь Ox_3 перпендикулярно до області S , а вісь Ox_2 — перпендикулярно до межі тіла (рис. 2).

2.1. Теплоактивне включення. Температурне поле, як і раніше, подамо через потенціал простого шару з густиною $w_k(x_1, x_2)$

$$T_k(x^*) = \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S w_k(\xi) \left[\frac{1}{R(x^*, \xi)} + \frac{(-1)^k}{R_2(x^*, \xi)} \right] d_\xi S, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad (28)$$

$$R_2(x^*, \xi) = \sqrt{\omega_2^2(x, \xi) + x_3^2}, \quad \omega_2^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2 - 2h)^2. \quad (29)$$

Тут $R(x^*, \xi)$ задаємо виразом (21), h — віддаль від центра включення до межі тіла, $k = 1$ відповідає нульовій температурі межі, а $k = 2$ — її теплоізоляції.

Розподіл температури в площині області S через безрозмірні величини (3) визначаємо так

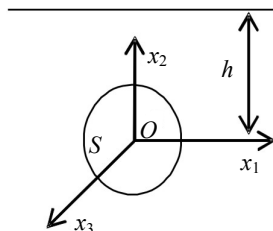


Рис. 2. Схема розташування включення

$$T_k(y) = \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S w_k(\eta) \left[\frac{1}{R(y, \eta)} + \frac{(-1)^k}{R_2(y, \eta)} \right] d_\eta S, \quad y = (y_1, y_2, 0). \quad (30)$$

Якщо в області тепловиділення S відома температура $T_k(y)$, то з рівняння (30) визначаємо потужність джерел тепла, а за формулою (28) — температуру в тілі.

Замінімо регулярне ядро $R_2^{-1}(y, \eta)$ виродженим

$$R_2^{-1}(y, \eta) \approx \frac{\varepsilon}{2} \left[1 + 0, 3\varepsilon(y_2 + \eta_2) - 0, 3\varepsilon^2 \frac{(y_1 - \eta_1)^2 + (y_2 + \eta_2)^2}{4} \right]. \quad (31)$$

Підставимо співвідношення (6), (7) і (31) у рівняння (30), використаємо інтеграли (8), (9) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях y_1 та y_2 . У результаті одержимо систему алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} 10\delta_{1k}b_{00} + (-1)^k \varepsilon^2 b_{01} + 10\delta_{2k}b_{20} + 10\delta_{2k}b_{02} &= 40\lambda t_{00}, \\ 3\pi b_{11} &= 32\lambda t_{11}, \\ \delta_{3k}b_{10} &= 80\lambda t_{10}, \\ (-1)^k 6\varepsilon^2 b_{00} + \delta_{8k}b_{01} + (-1)^k 2\varepsilon^2 b_{20} + (-1)^k 2\varepsilon^2 b_{02} &= 80\lambda t_{01}, \\ (-1)^{k+1} 3\varepsilon^3 b_{00} + 40\delta_{4k}b_{20} - 40\delta_{5k}b_{02} &= 160\lambda t_{20}, \\ (-1)^{k+1} 3\varepsilon^3 b_{00} - 40\delta_{5k}b_{20} + 40\delta_{4k}b_{02} &= 160\lambda t_{02}, \end{aligned} \quad (32)$$

де $\delta_{1k}, \delta_{2k}, \delta_{3k}, \delta_{4k}, \delta_{5k}$ обчислюємо за формулами (11), а $\delta_{8k} = 10\pi - (-1)^k \varepsilon^3$.

Після розв'язання системи рівнянь (32) знаходимо коефіцієнти b_{ij}

$$\begin{aligned} b_{00} &= \frac{4\lambda\delta_{10k} [\delta_{6k}t_{00} - \delta_{2k}(t_{20} + t_{02})] - (-1)^k \delta_{11k} + \delta_{12k}}{\delta_{1k}\delta_{6k}\delta_{10k} + (-1)^k \delta_{13k} - \varepsilon^2 \delta_{9k}/10}, \\ b_{01} &= \frac{4\lambda t_{01}\delta_{6k} - (-1)^k \delta_1 - (-1)^k \delta_{9k}b_{00}}{\delta_{10k}\delta_{6k}}, \\ b_{10} &= \frac{80\lambda}{\delta_{3k}} t_{10}, \quad b_{11} = \frac{32\lambda}{3\pi} t_{11}, \quad b_{20} = \frac{\delta_{7k}}{\delta_{6k}} + \delta_0, \quad b_{02} = \frac{\delta_{7k}}{\delta_{6k}} - \delta_0; \\ \delta_{9k} &= \frac{3\varepsilon^2}{10} \delta_{6k} + \frac{3\varepsilon^5}{200}, \quad \delta_{10k} = \frac{\pi}{2} - (-1)^k \frac{\varepsilon^3}{20}, \\ \delta_{11k} &= \frac{2\lambda\varepsilon^2}{5} \delta_{6k} t_{01}, \quad \delta_{12k} = \frac{\lambda\varepsilon^4}{25} (t_{20} + t_{02}), \\ \delta_{13k} &= \frac{3\varepsilon^3}{20} \delta_{2k}\delta_{10k}, \quad \delta_1 = \frac{2\lambda\varepsilon^2}{5} (t_{20} + t_{02}). \end{aligned} \quad (33)$$

У формулах (33) $\delta_{1k}, \delta_{2k}, \delta_{3k}, \delta_{6k}, \delta_{7k}$ і δ_0 задаємо виразами (11), (13).

2.2. Теплоізольоване включення. Температурне поле подаємо у вигляді (14), при цьому збурене температурне поле визначаємо формулою

$$\begin{aligned}
 t_k(x^*) &= -\frac{1}{4\pi\lambda} \frac{\partial}{\partial x_3} \iint_S \gamma_k(\xi) \left[\frac{1}{R(x^*, \xi)} + \frac{(-1)^k}{R_2(x^*, \xi)} \right] d_\xi S = \\
 &= \frac{x_3}{4\pi\lambda} \iint_S \gamma_k(\xi) \left[\frac{1}{R^3(x^*, \xi)} + \frac{(-1)^k}{R_2^3(x^*, \xi)} \right] d_\xi S, \quad (34)
 \end{aligned}$$

де $R(x^*, \xi)$ і $R_2(x^*, \xi)$ задаємо виразами (2) та (29), а потужність теплових диполів — різницею граничних значень температури на поверхнях включення співвідношенням (17).

Знайдемо похідну по нормалі до області S (тобто по x_3) від $t_k(x^*)$ і підставимо в граничну умову (15). Тоді, врахувавши, що $q(x) = -\lambda \frac{\partial t_0(x^*)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0}$, і ввівши безрозмірні величини (3), одержимо гіперсингулярне інтегральне рівняння

$$\iint_S \gamma_k(\eta) \left[\frac{1}{R^3(y, \eta)} + \frac{(-1)^k}{R_2^3(y, \eta)} \right] d_\eta S = 4\pi q(y). \quad (35)$$

Замінімо регулярне ядро $R_2^{-3}(y, \eta)$ виродженим

$$R_2^{-3}(y, \eta) \approx \frac{\varepsilon^3}{8} \left[1 + \varepsilon(y_2 + \eta_2) - \varepsilon^2 \frac{(y_1 - \eta_1)^2 + (y_2 + \eta_2)^2}{4} \right]. \quad (36)$$

Підставимо вирази (19), (20) і (36) у рівняння (35), врахуємо значення інтегралів (22) та (23) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях y_1 та y_2 . У підсумку одержимо систему алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned}
 60\Delta_{1k}c_{00} + (-1)^k \varepsilon^5 c_{01} + 30\Delta_{2k}c_{20} + 30\Delta_{2k}c_{02} &= 240q_{00}, \\
 -15\pi c_{11} &= 32q_{11}, \\
 \Delta_{3k}c_{10} &= 4q_{10}, \\
 (-1)^k 5\varepsilon^4 c_{00} + 60\Delta_{8k}c_{01} + (-1)^k \varepsilon^4 c_{20} + (-1)^k \varepsilon^4 c_{02} &= 240q_{01}, \\
 (-1)^{k+1} \varepsilon^5 c_{00} - 48\Delta_{4k}c_{20} - 48\Delta_{5k}c_{02} &= 192q_{20}, \\
 (-1)^{k+1} \varepsilon^5 c_{00} - 48\Delta_{5k}b_{20} - 48\Delta_{4k}c_{02} &= 192q_{02}, \quad (37)
 \end{aligned}$$

де $\Delta_{8k} = -\frac{3}{2}\pi - (-1)^k \frac{\varepsilon^5}{120}$, а $\Delta_{1k}, \Delta_{2k}, \Delta_{3k}, \Delta_{4k}, \Delta_{5k}$ задаємо виразами (25), якщо в них $(-1)^{k+1}$ замінити на $(-1)^k$.

Після розв'язання системи рівнянь (37) знаходимо коефіцієнти c_{ij}

$$\begin{aligned} c_{00} &= \frac{4\Delta_{8k}\Delta_{6k}q_{00} + \Delta_{9k} - (-1)^k \Delta_{10k} - 4\Delta_{2k}\Delta_{8k}(q_{20} + q_{02})}{\Delta_{1k}\Delta_{8k}\Delta_{6k} + (-1)^k \Delta_{11k} + (-1)^k \varepsilon^5 \Delta_{2k}\Delta_{8k}/24}, \\ c_{01} &= \frac{9\varepsilon^4 \pi c_{00}/24 - (-1)^k 2\varepsilon^4 (q_{20} + q_{02})/15 + 4\Delta_{6k}q_{01}}{\Delta_{8k}\Delta_{6k}}, \\ c_{10} &= \frac{4}{\Delta_{3k}}q_{10}, \quad c_{11} = -\frac{32}{15\pi}q_{11}, \quad c_{20} = \frac{\Delta_{7k}}{\Delta_{6k}} - \Delta_1, \quad c_{02} = \frac{\Delta_{7k}}{\Delta_{6k}} + \Delta_1; \\ \Delta_{9k} &= \frac{\varepsilon^9}{450}(q_{20} + q_{02}), \quad \Delta_{10k} = \frac{\varepsilon^5 \Delta_{6k}}{15}q_{01}, \quad \Delta_{11k} = \frac{\varepsilon^9 \pi}{160}, \end{aligned} \quad (38)$$

де $\Delta_{1k}, \Delta_{2k}, \Delta_{3k}$ задаємо виразами (25), а $\Delta_1, \Delta_{6k}, \Delta_{7k}$ — виразами (27).

Збурене температурне поле визначаємо за формулою (34) з урахуванням співвідношень (19), (20) і (38) для $\gamma(\eta)$.

3. Приклади

3.1. Температура на осі симетрії паралельного до межі тіла теплоактивного включення. Нехай потужність теплових джерел на паралельному до межі тіла теплоактивному включенні є стала: $w(\xi) = w_0$. Знайдемо температуру на осі Ox_3 (рис. 1) залежно від віддалі включення до межі тіла. За формулою (1) для $x_1 = x_2 = 0$ маємо

$$T_k(x_3) = \frac{w_0}{4\pi\lambda} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + x_3^2}} + \frac{(-1)^k \rho}{\sqrt{\rho^2 + (x_3 - 2h)^2}} \right) d\rho d\varphi,$$

де $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$. Обчисливши інтеграли, одержимо

$$T_k(x_3) = \frac{w_0}{2\lambda} \left[\sqrt{a^2 + x_3^2} - |x_3| + (-1)^k \left(\sqrt{a^2 + (x_3 - 2h)^2} - |x_3 - 2h| \right) \right]. \quad (39)$$

Для $x_3 = h$ і $k=1$ температура на межі тіла $T_1(h) = 0$, а для $k=2$ $T_2(h) = \frac{w_0}{\lambda} \left(\sqrt{a^2 + h^2} - h \right)$, тобто температура удвічі більша, ніж на цій же віддалі в безмежному тілі.

Визначимо температуру в центрі включення за точною формулою (39)

$$T_k^T(0) = \frac{w_0}{2\lambda} \left[a + (-1)^k \left(\sqrt{a^2 + 4h^2} - 2h \right) \right] \quad (40)$$

і наближеною з урахуванням виразу (5) для регулярного ядра

$$T_k^H(0) = \frac{w_0 a}{2\lambda} \left[1 + (-1)^k \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - \frac{0,3\varepsilon^2}{16} \right) \right]. \quad (41)$$

У табл. 1 наведені точні (40) і наближені (41) значення температури в центрі включення залежно від його віддалі h/a до межі тіла.

Бачимо, що вже навіть для $h/a = 0,5$ формула (41) дає практично точні результати. Для $h/a > 5$ межа тіла не впливає на розподіл температури в ньому. У разі наближення включення до теплоізолюваної межі температура на ньому подвоюється порівняно з безмежним тілом.

Таблиця 1

Точне та наближене значення температури $T_k(0)$ ($k = 1, 2$) в центрі паралельного до межі тіла включення для різних величин h/a

$T_k(0)$	h/a									
	0,05	0,10	0,20	0,25	0,50	0,80	1,00	1,50	2,00	5,00
T_1^T	0,10	0,18	0,32	0,38	0,58	0,71	0,76	0,84	0,88	0,95
T_1^H	–	–	–	–	0,54	0,70	0,76	0,84	0,88	0,95
T_2^T	1,90	1,82	1,68	1,62	1,42	1,29	1,24	1,16	1,12	1,05
T_2^H	–	–	–	–	1,46	1,30	1,24	1,16	1,12	1,05

3.2. Тиск двох однакових кругових штампів на півпростір. Під час розв'язування контактних задач теорії пружності за дії гладкого штампа на пружний півпростір використовують інтегральне рівняння [12]

$$\frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_S \frac{p(\xi)}{R(x, \xi)} d\xi S = f(x), \quad (42)$$

де G — модуль зсуву, ν — коефіцієнт Пуассона, $p(\xi)$ — контактний тиск під штампом, а функція $f(x)$ визначається геометрією основи штампа та його переміщенням. Ядро $R(x, \xi) = \omega_1(x, \xi)$ визначається виразом (2). Із формули (42) випливає, що інтегральне рівняння типу (30) для $k = 2$ можна використати для розв'язування контактної задачі за дії двох однакових гладких штампів на пружний півпростір.

Нехай два однакових кругових плоских штампи з центрами в точках $x_1 = x_3 = 0$, а $x_2 = 0$ і $x_2 = 2h$ втискаються силами P у пружний півпростір $x_3 \leq 0$

на малу глибину δ . Тоді контактний тиск під ними визначаємо в безрозмірних величинах із рівняння

$$\iint_S p(\eta) \left[\frac{1}{R(y, \eta)} + \frac{1}{R_2(y, \eta)} \right] d_\eta S = \frac{2\pi G}{1-\nu} \delta. \quad (43)$$

Тут $R(y, \eta)$ і $R_2(y, \eta)$ задаємо виразами (2) та (29) для $x_3 = 0$, а переміщення штампів δ визначаємо з умови їх рівноваги

$$\iint_S p(\eta, \delta) d_\eta S = P. \quad (44)$$

З огляду на симетрію задачі відносно осі Ox_2 подамо розв'язок рівняння (43) у вигляді

$$p(\eta) = (b_{00} + b_{01}\eta_2 + b_{20}\eta_1^2 + b_{02}\eta_2^2) / \sqrt{L(\eta)}, \quad (45)$$

де $L(\eta)$ задаємо виразом (6₂). Коефіцієнти визначаємо співвідношеннями (33), поклавши в них $\lambda = G/2(1-\nu)$, $t_{00} = \delta$, $t_{10} = t_{01} = t_{11} = t_{20} = t_{02} = 0$. Тоді з точністю до ε^3 контактний тиск знаходимо за формулою (45), у якій

$$b_{00} = \frac{G(10\pi - 3\varepsilon^3)}{\pi(1-\nu)(5\pi + 5\varepsilon - \varepsilon^3)} \delta, \quad b_{01} = -\frac{12G\varepsilon^2}{5\pi(1-\nu)(2\pi + 2\varepsilon - \varepsilon^3)} \delta, \\ b_{20} = b_{02} = \frac{3G\varepsilon^3}{\pi(1-\nu)(5\pi + 5\varepsilon - 2\varepsilon^3)} \delta. \quad (46)$$

Переміщення штампа визначаємо з рівняння (44) з урахуванням подання (45)

$$\delta = \frac{(1-\nu)(5\pi + 5\varepsilon - 2\varepsilon^3)}{2G(10\pi - 3\varepsilon^3)} P. \quad (47)$$

Підставивши вираз (47) у (46), маємо

$$b_{00} = \frac{5\pi + 5\varepsilon - 2\varepsilon^3}{2\pi(5\pi + 5\varepsilon - \varepsilon^3)} P, \quad b_{01} = -\frac{3\varepsilon^2(\pi + \varepsilon)}{2\pi^2(5\pi + 5\varepsilon - 4\varepsilon^3)} P, \\ b_{20} = b_{02} = \frac{3\varepsilon^3}{2\pi(10\pi - 3\varepsilon^3)} P. \quad (48)$$

Із використанням співвідношень (45) і (48) за формулою

$$p(y_2) = (b_{00} + b_{01}\eta_2 + b_{02}\eta_2^2) / \sqrt{1 - y_2^2}$$

знаходимо контактний тиск під штампом на осі Ox_2 .

Таблиця 2

Контактний тиск під штампом $2\pi p(y_2)/P$ на осі Ox_2
для різних віддалей $\varepsilon = a/h$ між штампами

ε	$y_2 = x_2/a$									
	-0,9	-0,7	-0,5	-0,3	-0,1	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
0,9	2,7206	1,5764	1,2375	1,0730	0,9863	0,9500	0,9593	1,0287	1,2220	1,9741
0,8	2,6101	1,5319	1,2175	1,0681	0,9925	0,9650	0,9823	1,0600	1,2645	2,0468
0,7	2,5235	1,4968	1,2017	1,0641	0,9972	0,9770	1,0007	1,0853	1,2993	2,1073
0,5	2,4021	1,4470	1,1786	1,0576	1,0031	0,9933	1,0267	1,1219	1,3508	2,1994
0,4	2,3613	1,4298	1,1702	1,0548	1,0046	0,9983	1,0353	1,1344	1,3690	2,2332

Наведені в табл. 2 результати свідчать, що контактний тиск зі сторони сусіднього штампа ($y_2 > 0$) менший, а з протилежної сторони ($y_2 < 0$) — більший, ніж для одного штампа. Для $h > 2,5a$ штампи практично не взаємодіють.

Висновки. Формули (28) і (34) для $k = 2$ описують також температурне поле у півбезмежному тілі $x_3 \geq 0$, якщо у двох однакових областях S його межі $x_3 = 0$ із центрами на віддалі $2h$ одна від одної задано температуру або тепловий потік, а решта частини межі теплоізолювана або перебуває за нульової температури.

Розв'язки рівнянь (4) і (30) можна використати під час розв'язування задач електростатики для півбезмежного простору з тонкою круговою пластинкою, на якій задано електричний потенціал, а на межі — нульовий потенціал ($k = 1$) або електроізоляція ($k = 2$). Розв'язки рівнянь (18) і (35) годяться для такого ж півпростору з електроізолюваною пластинкою. Тоді функція $\gamma(\eta)$ описує різницю потенціалів на пластинці, а $q(y)$ — напруженість електричного поля.

Інтегральне рівняння типу (30) для $k = 2$ виконується також у контактних задачах теорії пружності за дії двох однакових гладких штампів на пружний півпростір $x_3 \leq 0$. Тоді функції $w_2(\eta)$ відповідає контактний тиск під штампами, а функція $T_2(y)$ визначається геометрією основи штампів та їх переміщенням.

Рівняння вигляду (35) для $k = 2$ можна використати під час дослідження концентрації напружень у тілі з двома однаковими компланарними тріщинами. Тоді функція $\gamma(\eta)$ описує стрибок нормальних переміщень поверхонь тріщин, а $q(y)$ — зусилля на тріщинах.

Література

- [1] Barber, J. R. Steady-state thermal stresses caused by an imperfectly conducting penny-shaped crack in an elastic solid / J. R. Barber // J. Therm. Stresses. — 1980. — Vol. 3 — P. 77-83.
- [2] Deutch, E. The distribution of axisymmetric thermal stress in an infinite elastic medium containing a penny-shaped crack / E. Deutch // Int. J. Eng. Sci. — 1965. — Vol. 3, No 5. — P. 485-490.
- [3] Florence, A. L. The linear thermoelastic problem of uniform heat flow disturbed by a penny-shaped crack / A. L. Florence, J. N. Goodier // Int. J. Engng. Sci. — 1963. — Vol. 1, No 6. — P. 533-540.
- [4] Fu, W. S. Thermal stresses in an elastic solid weakened by two complanar circular cracks / W. S. Fu // Int. J. Engng. Sci. — 1973 — Vol. 11, No 3. — P. 317-330.

- [5] *Kassir, M. K.* Thermal stresses in a solid containing a parallel circular cracks / *M. K. Kassir, A. Bregman* // *Appl. Sci. Res.* — 1971. — Vol. 25, No 3-4.
- [6] *Olesiak, Z.* Thermal stresses in an infinite elastic solid containing a penny-shaped crack / *Z. Olesiak, J. N. Sneddon* // *Arch. Ration. Mech. and Analysis.* — 1960 — Vol. 4, No 3. — P. 238-254.
- [7] *Kim, G. C.* Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області (тріщині) / *G. C. Kim* // *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* — 2008. — Т. 51, № 4. — С. 120-128.
- [8] *Kim, G. C.* Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплопроникним дисковим включенням (тріщиною) / *G. C. Kim, O. P. Sushko* // *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* — 2009. — Т. 52, № 4. — С. 150-159.
- [9] *Kim, G. C.* Розподіл стаціонарної температури та напружень у тілі з теплопроникним дисковим включенням / *G. C. Kim, O. P. Sushko* // *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла.* — 2009. — Вип. 10. — С. 145-153.
- [10] *Kim, G. C.* Осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізолюваним дисковим включенням (тріщиною) / *G. C. Kim, O. P. Sushko* // *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* — 2010. — Т. 53, № 1. — С. 150-159.
- [11] *Kim, G. C.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами / *G. C. Kim, M. B. Hai.* — Киев: Наук. думка, 1989. — 284 с.
- [12] *Лурье, А. И.* Теория упругости / *А. И. Лурье.* — Москва: Наука, 1970. — 940 с.

Stationary temperature field in a semi-infinite solid with thermally active or thermally insulated disk inclusion

Hryhoriy Kit, Olga Sushko

The problem of stationary heat conductivity for a semi-infinite solid with a parallel or perpendicular to its boundary thermally active disk inclusion (on which temperature or heat flow is given) and also a thermally insulated inclusion is solved. At the solid boundary a zero temperature or thermal insulation is given. The problem is reduced to integral equations with singular and regular kernels. If the distance of the circular inclusion centre from the boundary is larger than its radius, the regular kernels are replaced by the degenerated ones and the exact solutions of equations, the right-hand parts of which are polynomials of the second degree, are obtained. For the small distance of inclusion from the boundary the equations are solved by an analytical — numerical method.

Стационарное температурное поле в полубесконечном теле с теплоактивным или теплоизолированным дисковым включением

Григорий Кит, Ольга Сушко

Решены задачи стационарной теплопроводности для полубесконечного тела с параллельным или перпендикулярным к его границе теплоактивным дисковым включением (на котором задана температура или тепловой поток), а также теплоизолированным включением. Граница тела теплоизолирована или же на ней поддерживается нулевая температура. Задачи сведены к интегральным уравнениям с сингулярными и регулярными ядрами. Если расстояние центра кругового включения от границы больше, чем его радиус, то регулярные ядра заменены вырожденными и получены точные решения уравнений, правые части которых являются полиномами второй степени. При малом расстоянии включения от границы уравнения решаются аналитически — численным методом.

Отримано 22.11.10