УДК 539.3

Про один підхід до формулювання крайових задач нелокальної теорії пружності

Тарас Нагірний[1], Зоя Бойко[2]

[1] д. ф.-м. н., професор, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005; Zielena Góra University, 4 Prof. Szafrana St., Poland, 65-516, e-mail: tnagirny@yahoo.com
[2] Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: zoya@cmm.lviv.ua

Запропоновано підхід до формулювання базових співвідношень математичної моделі механіки пружних деформівних систем, яка описує приповерхневу неоднорідність, пов'язану з локальним зміщенням маси. При цьому використано методи термодинаміки нерівноважних процесів і нелінійної механіки. За ізотермічного наближення вільну енергію означено у просторі тензора деформації, вектора локального зміщення маси та дивергенції вектора локального зміщення маси. Параметрами, спряженими до останніх, відповідно є градієнт збурення хімічного потенціалу та збурення хімічного потенціалу. Ключову систему рівнянь моделі записано як відносно вектора переміщення та вектора локального зміщення маси, так і тензора напружень та вектора локального зміщення маси. На цій основі вивчено рівноважний стан розтягнутого шару та досліджено розмірний ефект інтенсивності силового навантаження, що призводить до руйнування шару.

Ключові слова: нелокальна теорія пружності, локальне зміщення маси, приповерхневі явища, розмірний ефект, межа міцності.

Вступ. Експлуатаційні характеристики деформівних тіл вагомо залежать від стану їх приповерхневих областей. Зокрема, під час проведення розрахунків на міцність елементів конструкцій і приладів, що актуально в сучасній механіці деформівних систем [1, 2], важливо враховувати приповерхневі явища. У науковій літературі модельному опису напружено-деформованого стану приповерхневих областей тіла в останній час надається значна увага. Можна виокремити підходи нелокальної теорії пружності [3-6] і локально градієнтний підхід у термомеханіці [7-9]. У першому випадку постулюється, що напруження залежать від значень деформацій у фіксованій точці та сусідніх з нею точок. Локально-градієнтний підхід ґрунтується на принципах термодинаміки нерівноважних процесів. У простір параметрів стану введено вектор локального зміщення маси та градієнт хімічного потенціалу. При цьому збурення хімічного потенціалу ототожнюють зі збуренням енергії взаємодії [10].

У цій роботі з використанням методів термодинаміки нерівноважних процесів побудовано математичну модель, що описує ефекти, пов'язані з приповерхневою неоднорідністю. Простір параметрів стану розширено вектором локального зміщення маси та дивергенцією цього вектора, спряженими параметрами до яких є градієнт збурення хімічного потенціалу та збурення хімічного потенціалу. На цій основі досліджено рівноважний стан шару та вивчено розмірний ефект межі його міцності.

1. Основні співвідношення моделі

Об'єктом дослідження є термопружне деформівне тіло K^*, яке взаємодіє із зовнішнім середовищем K^{*+}. За відліковий стан тіла приймаємо однорідний термодинамічний стан, який відповідає стану необмеженого середовища за відсутності зовнішньої дії. У відліковій конфігурації термодинамічний стан тіла характеризуємо абсолютною температурою T_* і густиною ентропії s_*, хімічним потенціалом η_* і густиною ρ_*, тиском P_* і питомим об'ємом $V_* = \rho_*^{-1}$.

Вихідні співвідношення моделі термопружного тіла формулюємо за підходом Лагранжа з орієнтацією на геометричну конфігурацію тіла у початковому стані.

Інтегральною мірою термопружного стану тіла K^* є його енергія

$$\mathcal{E}\left(K^*,\tau\right) = \mathcal{E}\left[X(\tau)\cup\partial X(\tau)\right], \tag{1}$$

де $X(\tau)$ — область евклідового простору, обмежена поверхнею $\partial X(\tau)$, яку займає тіло K^* в актуальний момент часу τ.

Згідно із законом збереження енергії маємо

$$d\mathcal{E}\left(K^*,\tau\right) = \delta Q_*^{(+)} + \delta A_*^{(+)} . \tag{2}$$

Тут $d\mathcal{E}\left(K^*,\tau\right)$ — лінійна частина приросту енергії $\mathcal{E}\left(K^*,\tau\right)$; $\delta Q_*^{(+)}$ — складник, зумовлений тепловою взаємодією тіла K^* із зовнішнім середовищем K^{*+}; $\delta A_*^{(+)}$ — складник, зумовлений механічною взаємодією тіла K^* із середовищем K^{*+}.

Внаслідок адитивності енергії аналогічне за формою рівняння балансу енергії можна подати для довільно виділеної підсистеми $K\subset K^*$

$$d\mathcal{E}\left(K,\tau\right) = \delta Q^{(+)} + \delta A^{(+)}, \tag{3}$$

де $\delta Q^{(+)}$ — притік тепла у виділену підсистему K (складник, який характеризує теплові процеси: теплопровідність і теплоперенесення); $\delta A^{(+)}$ — робота сил, яку виконує середовище $K^+ = K^{*+}\cup K^*\setminus K$ над системою K (складник, що характеризує приріст механічної енергії, зумовлений пружним деформуванням і масоперенесенням).

Сконкретизуємо співвідношення (3) для опису локального термодинамічного стану фізично малої підсистеми $\delta K\subset K$

$$d\mathcal{E}\left(\delta K,\tau\right) \equiv d\int\limits_{X(\tau)} E\left(\vec{r},\tau\right)\delta V . \tag{4}$$

У співвідношенні (4) $E\left(\vec{r},\tau\right)$ — енергія фізично малої підсистеми δK, яка віднесена до об'єму $\delta V\left(\vec{r},\tau\right)$ цієї підсистеми у момент часу τ; $\vec{r}$ — радіус-вектор місця довільної матеріальної точки $k\in K$ у довільний момент часу τ.

Подамо рівняння балансу (4) відносно адитивних параметрів, які надалі будемо нормувати за геометричними характеристиками — об'ємом δV_0 фізично малої області і площею $\delta\Sigma_0$ фізично малого елемента граничної поверхні у відліковій конфігурації. У результаті одержуємо

$$d\mathcal{E} = d\int\limits_{X(\tau)} E\delta V = d\int\limits_{X_0} E\frac{\delta V}{\delta V_0}\delta V_0 = d\int\limits_{X_0} E_0\delta V_0 = \int\limits_{X_0} dE_0\delta V_0 . \tag{5}$$

Тут $E_0(\vec{r}_0,\tau) = E(\vec{r},\tau)\delta V/\delta V_0$.

Локальним формулюванням рівняння балансу енергії (5) є

$$d\mathcal{E}(\delta K,\tau) = dE_0\delta V_0 ,$$

де для dE_0 маємо [11, 12]

$$dE_0 = C_V dT + C_V^* d\eta + \hat{\sigma}_0 \cdot\cdot d\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}\right)^{\mathrm{T}} + \left(\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{\sigma}_0 + \vec{f}_0^{\,+}\right)\cdot d\vec{u} . \tag{6}$$

У співвідношенні (6) $E_0 = E_0(\vec{r}_0,\tau)$ — густина енергії фізично малої підсистеми $\delta K \subset K$; $C_V = C_V(\vec{r}_0,\tau)$ — питома теплоємність; $C_V^* = C_V^*(\vec{r}_0,\tau)$ — питома «енергоємність» масової підсистеми; $T = T(\vec{r}_0,\tau)$ — абсолютна температура; $\eta = \eta(\vec{r}_0,\tau)$ — хімічний потенціал; $\hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}_0(\vec{r}_0,\tau)$ — тензор напружень Піоли-Кірхгофа першого роду; $\vec{f}_0^{\,+} = \vec{f}_0^{\,+}(\vec{r}_0,\tau)$ — вектор густини об'ємних сил; $\vec{\nabla}_0$ — диференціальний оператор Гамільтона у відліковій конфігурації; $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}$ — тензор градієнта місця; $\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_0$ — вектор переміщення; $\vec{r}_0$ — радіус-вектор місця довільної матеріальної точки $k \in K$ у початковий момент часу. Крапкою позначено скалярний добуток, $\otimes$ — тензорний добуток, символом «Т» — операцію транспонування тензора; двокрапкою — операцію подвійної згортки тензорів. Надалі для зручності запису будемо опускати нулі, введені для відзначення величин у лагранжевій системі координат, пам'ятаючи при цьому, що вони віднесені до початкової геометричної конфігурації.

За законом збереження енергії [11, 12]

$$C_V dT + C_V^* d\eta = -PdV - \vec{\nabla}\cdot\left[\vec{J}_Q + (\eta - \eta_*)\vec{J}_M\right] d\tau , \tag{7}$$

де P — питомий тиск; $V = \rho^{-1}$ — питомий об'єм; $\vec{J}_Q$ — вектор потоку тепла; $\vec{J}_M$ — вектор потоку маси.

Енергетичне співвідношення (7) можна перетворити до вигляду

$$C_V dT + C_V^* d\eta = -PdV + \Big\{ T\left(-\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_s\right) + (\eta - \eta_*)\left(-\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_M\right) +$$
$$+ \left(-\vec{\nabla}T\right)\cdot\vec{J}_s + \left[-\vec{\nabla}(\eta - \eta_*)\right]\cdot\vec{J}_M \Big\} d\tau .$$

Тут $\vec{J}_s = \vec{J}_Q / T$ — вектор потоку ентропії.

У зв'язку з цим рівняння балансу енергії (6) набуває такої форми

$$dE = -PdV + \hat{\sigma}^{\mathbf{s}} \cdot\cdot d\hat{e} + \left(\vec{\nabla}\cdot\hat{\sigma} + \vec{f}^{\,+}\right)\cdot d\vec{u} - \hat{\sigma}^{\mathbf{a}} \cdot\cdot d\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\right)^{\mathbf{a}} +$$
$$+ \Big\{ T\left(-\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_s\right) + (\eta - \eta_*)\left(-\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_M\right) + \left(-\vec{\nabla}T\right)\cdot\vec{J}_s + \left[-\vec{\nabla}(\eta - \eta_*)\right]\cdot\vec{J}_M \Big\} d\tau , \tag{8}$$

де $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^{\mathbf{s}} + \hat{\sigma}^{\mathbf{a}}$; $\hat{\sigma}^{\mathbf{s}}$, $\hat{\sigma}^{\mathbf{a}}$ — симетричний та антисиметричний складники тензора напружень $\hat{\sigma}$; $\hat{e} = \left[\vec{\nabla} \otimes \vec{u} + \left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\right)^{\mathrm{T}}\right] \Big/ 2$ — тензор деформації; $\left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\right)^{\mathbf{a}} = \left[\vec{\nabla} \otimes \vec{u} - \left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\right)^{\mathrm{T}}\right] \Big/ 2$ — антисиметричний складник тензора градієнта місця.

З урахуванням рівняння балансу ентропії

$$ds/d\tau = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s + \sigma_s ,$$

($\sigma_s \geq 0$ — виникнення ентропії), енергетичне співвідношення (8) можна подати так

$$dE = Tds - PdV + \hat{\sigma}^{\mathbf{s}} \cdot\cdot d\hat{e} + \left(\eta - \eta_*\right) d\left(-\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_M\right) + \vec{\nabla}\left(\eta - \eta_*\right) \cdot d\left(-\vec{\Pi}_M\right) +$$
$$+ \left(\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \vec{f}^{+}\right) \cdot d\vec{u} - \hat{\sigma}^{\mathbf{a}} \cdot\cdot d\left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\right)^{\mathbf{a}} + \left[-T\sigma_s + \left(-\vec{\nabla} T\right) \cdot \vec{J}_s\right] d\tau . \tag{9}$$

Тут $\vec{\Pi}_M = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \vec{J}_M d\tau$ — вектор локального зміщення маси.

Для виробництва ентропії σ_s приймаємо класичний для термопружного тіла вигляд [13]

$$\sigma_s = -\frac{\vec{\nabla} T}{T} \cdot \vec{J}_s .$$

Відповідно до такого подання з (9) у квазістатичному наближенні отримуємо рівняння для приросту внутрішньої енергії U

$$dU = Tds - PdV + \hat{\sigma}^{\mathbf{s}} \cdot\cdot d\hat{e} - \hat{\sigma}^{\mathbf{a}} \cdot\cdot d\left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\right)^{\mathbf{a}} +$$
$$+ \left(\eta - \eta_*\right) d\left(-\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_M\right) + \vec{\nabla}\left(\eta - \eta_*\right) \cdot d\left(-\vec{\Pi}_M\right) . \tag{10}$$

При цьому враховано рівняння рівноваги

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \vec{f}^{+} = 0 . \tag{11}$$

За функцію локального термодинамічного стану приймемо вільну енергію (функцію Гельмгольца), яка пов'язана з U співвідношенням $F = U - TS$. Обмежимося надалі розглядом ізотермічних процесів ($T = T_* = const$). Тоді диференціальна 1-форма (10) набуває вигляду

$$dF = -Pd\left(1/\rho\right) + \frac{1}{3}\sigma de + \left(\hat{\sigma}^{\mathbf{s}}\right)^{\mathbf{d}} \cdot\cdot d\hat{e}^{\mathbf{d}} - \hat{\sigma}^{\mathbf{a}} \cdot\cdot d\left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\right)^{\mathbf{a}} +$$
$$+ \left(\eta - \eta_*\right) d\left(-\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_M\right) + \vec{\nabla}\left(\eta - \eta_*\right) \cdot d\left(-\vec{\Pi}_M\right) , \tag{12}$$

де $\left(\hat{\sigma}^{\mathbf{s}}\right)^{\mathbf{d}} = \hat{\sigma}^{\mathbf{s}} - \sigma\hat{I}/3$ — девіатор тензора напружень $\hat{\sigma}^{\mathbf{s}}$; $\hat{e}^{\mathbf{d}} = \hat{e} - e\hat{I}/3$ — девіатор тензора деформації $\hat{e}$; $\sigma = \hat{\sigma}^{\mathbf{s}} \cdot\cdot \hat{I}$; $e = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ — об'ємна деформація; $\hat{I}$ — одиничний тензор.

У наведених вище співвідношеннях введено у розгляд питомий тиск P та питомий об'єм V, які, зазвичай, використовуються під час опису ідеального газу. Це зумовлено бажанням одержати наближення ідеального газу у разі прямування до нуля пружних характеристик деформівного твердого тіла. Тому у диференціальній 1-формі (12) приймемо

$$\rho = \rho_* \left(1 - e\right), \quad P = P\left(\frac{1}{\rho_* \left(1 - e\right)}\right).$$

Тоді, групуючи перші два складники у (12), це співвідношення можемо записати у вигляді

$$dF = \frac{1}{3}\sigma^* de + \left(\hat{\sigma}^{\mathbf{s}}\right)^{\mathbf{d}} \cdot\cdot d\hat{e}^{\mathbf{d}} + \left(-\vec{\sigma}^{\mathbf{a}}\right) \cdot d\vec{\phi} +$$
$$+ \left(\eta - \eta_*\right) d\left(-\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_M\right) + \vec{\nabla}\left(\eta - \eta_*\right) \cdot d\left(-\vec{\Pi}_M\right). \qquad (13)$$

Тут $\sigma^* = \sigma - 3P_*/\rho_*$; $\vec{\sigma}^a$, $\vec{\phi} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)/2$ — супутні вектори до антисиметричних тензорів $\hat{\sigma}^{\mathbf{a}}$, $\left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\right)^{\mathbf{a}}$ відповідно.

Бачимо, що енергію F означено у просторі параметрів $e, \hat{e}^{\mathbf{d}}, \vec{\phi}, -\vec{\Pi}_M, -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_M$, спряженими до яких відповідно є $\sigma^*/3, \left(\hat{\sigma}^{\mathbf{s}}\right)^{\mathbf{d}}, \vec{\sigma}^{\mathbf{a}}, \vec{\nabla}\left(\eta - \eta_*\right), \eta - \eta_*$. На основі диференціальної 1-форми (13) записуємо таку систему визначальних співвідношень моделі

$$\sigma^* = 3\frac{\partial F}{\partial e} = \sigma^*\left(B_*\right), \quad \left(\hat{\sigma}^{\mathbf{s}}\right)^{\mathbf{d}} = \frac{\partial F}{\partial \hat{e}^{\mathbf{d}}} = \left(\hat{\sigma}^{\mathbf{s}}\right)^{\mathbf{d}}\left(B_*\right), \quad \vec{\sigma}^{\mathbf{a}} = -\frac{\partial F}{\partial \vec{\phi}} = \vec{\sigma}^{\mathbf{a}}\left(B_*\right),$$

$$\eta - \eta_* = \frac{\partial F}{\partial\left(-\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_M\right)} = \left(\eta - \eta_*\right)\left(B_*\right), \; \vec{\nabla}\left(\eta - \eta_*\right) = \frac{\partial F}{\partial\left(-\vec{\Pi}_M\right)} = \vec{\nabla}\left(\eta - \eta_*\right)\left(B_*\right),$$

де B_* означає множину параметрів $\left\{e, \hat{e}^{\mathbf{d}}, \vec{\phi}, -\vec{\Pi}_M, -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_M\right\}$.

Приймемо, що однорідний початковий стан тіла є ізотропний і в околі цього стану енергія $F = F\left(e, \hat{e}^{\mathbf{d}}, \vec{\phi}, -\vec{\Pi}_M, -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_M\right)$ є аналітична функція інваріантів вказаних параметрів стану. Обмежимося надалі таким квадратичним наближенням її розкладу в околі початкового стану

$$F = F_* - \frac{P_*}{\rho_*}e + \frac{1}{2}Ke^2 + \frac{1}{2}\alpha\left(-\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_M\right)^2 + G\hat{e}^{\mathbf{d}} \cdot\cdot \hat{e}^{\mathbf{d}} + \frac{1}{2}G'\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} +$$
$$+ \frac{1}{2}\gamma\vec{\Pi}_M \cdot \vec{\Pi}_M - \beta e\left(-\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_M\right) - \chi\vec{\phi} \cdot \left(-\vec{\Pi}_M\right),$$

де $K, \alpha, G, G', \gamma, \beta, \chi$ — характеристики матеріалу.

Тоді одержимо такі визначальні співвідношення

$$\frac{1}{3}\sigma^{*}=-\frac{P_*}{\rho_*}+Ke-\beta\left(-\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_M\right),\quad \left(\hat{\sigma}^{\mathbf{s}}\right)^{\mathbf{d}}=2G\hat{e}^{\mathbf{d}},\quad \vec{\sigma}^{\mathbf{a}}=-G'\vec{\phi}+\chi\left(-\vec{\Pi}_M\right),$$

$$\eta-\eta_*=\alpha\left(-\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_M\right)-\beta e,\quad \vec{\nabla}\left(\eta-\eta_*\right)=\gamma\left(-\vec{\Pi}_M\right)-\chi\vec{\phi}. \tag{14}$$

Якщо прийняти, що енергія F не залежить від вектора $\vec{\phi}$, то ця система рівнянь спрощується до вигляду

$$\frac{1}{3}\sigma^{*}=-\frac{P_*}{\rho_*}+Ke-\beta\left(-\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_M\right),\quad \left(\hat{\sigma}^{\mathbf{s}}\right)^{\mathbf{d}}=2G\hat{e}^{\mathbf{d}},$$

$$\eta-\eta_*=\alpha\left(-\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_M\right)-\beta e,\quad \vec{\nabla}\left(\eta-\eta_*\right)=\gamma\left(-\vec{\Pi}_M\right). \tag{15}$$

На основі (14) для симетричної частини $\hat{\sigma}^{\mathbf{s}}$ тензора напружень $\hat{\sigma}$ маємо

$$\hat{\sigma}^{\mathbf{s}}=\left[-\frac{P_*}{\rho_*}+Ke+\beta\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_M\right)\right]\hat{I}+2G\hat{e}^{\mathbf{d}}. \tag{16}$$

З двох останніх рівнянь системи (14) отримуємо

$$\alpha\vec{\nabla}\left(-\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_M\right)+\gamma\vec{\Pi}_M=\beta\vec{\nabla}e-\chi\vec{\phi}. \tag{17}$$

Зазначимо, що співвідношення (17) є рівняння балансу маси, записане відносно вектора локального зміщення маси $\vec{\Pi}_M$. Дійсно, загальною формою рівняння балансу маси за локально градієнтного підходу та прийнятих вище наближень є

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_M+\rho'-\rho'_*=0,$$

де ρ' — густина деформівного твердого тіла. На цій основі, враховуючи (14), для густини отримуємо співвідношення

$$\rho'-\rho'_*=\frac{1}{\alpha}\left(\eta-\eta_*\right)+\frac{\beta}{\alpha}e,$$

яке слід трактувати як рівняння стану для густини.

Таким чином для опису рівноважного стану деформівного тіла маємо рівняння рівноваги (11) і співвідношення (14). Якщо за ключові функції вибрати вектор переміщення $\vec{u}$ та вектор локального зміщення маси $\vec{\Pi}_M$, то з використанням співвідношень (11), (15), (16), система рівнянь моделі за відсутності масових сил має вигляд

$$G\Delta\vec{u}+\left(K+\frac{1}{3}G\right)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)=-\beta\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_M\right), \tag{18}$$

$$\alpha\vec{\nabla}\left(-\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}_M\right)+\gamma\vec{\Pi}_M=\beta\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right). \tag{19}$$

Тут Δ — оператор Лапласа.

Якщо граничні умови записано на напруження, зручніше замість вектора переміщення за ключову функцію прийняти тензор напружень. Тоді ключова система рівнянь моделі така

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = 0\,, \tag{20}$$

$$\vec{\nabla} \times \left\{ \hat{\sigma} + \frac{1}{3K}\left[2G\frac{P_*}{\rho_*} - \left(K - \frac{2}{3}G \right)\sigma - 2G\beta\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_M \right) \right]\hat{I} \right\} \times \vec{\nabla} = 0\,, \tag{21}$$

$$3\left(\beta^2 - \alpha K \right)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_M \right) + 3K\gamma\vec{\Pi}_M - \beta\vec{\nabla}\sigma = 0\,. \tag{22}$$

Під час розв’язування задач математичної фізики, для забезпечення однозначності розв’язків, ключову систему рівнянь (18), (19) чи (20)-(22) слід доповнити відповідними граничними умовами та за необхідності умовами обмеженості розв’язку. Використаємо отримані співвідношення для вивчення рівноважного стану шару. При цьому нехтуватимемо відмінністю між лагранжевими й ейлеровими змінними.

2. Рівноважний стан пружного шару. Розмірний ефект межі міцності

Розглянемо необмежений пружний шар, що займає область $|x| \le l$ у прямокутній декартовій системі координат (x, y, z). Вважаємо, що для $y \to \pm\infty$ до шару прикладено силове навантаження сталої інтенсивності σ_a. Поверхні шару $x = \pm\, l$ вільні від силового навантаження, і на них задано постійні значення хімічного потенціалу η_a.

Оскільки задано зовнішнє силове навантаження, то за вихідну вибираємо систему рівнянь (20)-(22). Тоді компоненти тензора напружень σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} і вектора локального зміщення маси $\vec{\Pi}_M = \left(\Pi_M, 0, 0 \right)$ є функції лише координати x, а ключова система рівнянь (20)-(22) набуває вигляду

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} = 0\,, \qquad \frac{d^2\sigma_{yy}}{dx^2} = \frac{d^2\sigma_{zz}}{dx^2} = \frac{2G\beta}{K + 4/3G}\frac{d^3\Pi_M}{dx^3}\,,$$

$$3\left(\beta^2 - \alpha K \right)\frac{d^2\Pi_M}{dx^2} + 3K\gamma\Pi_M - \beta\frac{d}{dx}\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz} \right) = 0\,. \tag{23}$$

Поля напружень та локального зміщення маси повинні справджувати такі граничні умови

$$\sigma_{xx}\big|_{x=\pm l} = 0\,, \tag{24}$$

$$\eta_* - \frac{\beta}{K}\frac{P_*}{\rho_*} - \frac{\beta}{3K}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \right) - \frac{\alpha K - \beta^2}{K}\frac{d\Pi_M}{dx}\bigg|_{x=\pm l} = \eta_a\,, \tag{25}$$

а також умови у довільних поперечних перерізах $y = const$, $z = const$ шару

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\sigma_{yy}dx = \sigma_a\,, \quad \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\sigma_{zz}dx = 0\,, \quad \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}x\sigma_{yy}dx = 0\,, \quad \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}x\sigma_{zz}dx = 0\,. \tag{26}$$

Розв’язок задачі (23)-(26) такий

$$\sigma_{yy}(x) = \sigma_a + \frac{6KG\beta}{D(kl)}\left[\eta_* - \eta_a - \frac{\beta}{3K}\left(3\frac{P_*}{\rho_*} + \sigma_a \right) \right]\left[\frac{\mathrm{ch}(kx)}{\mathrm{ch}(kl)} - \frac{\mathrm{th}(kl)}{kl} \right],$$

$$\sigma_{zz}(x)=\sigma_{yy}-\sigma_a\,,\qquad \sigma_{xx}(x)=0\,,$$

$$\Pi_M(x)=\frac{3K\left(K+4/3G\right)l}{D(kl)}\left[\eta_*-\eta_a-\frac{\beta}{3K}\left(3\frac{P_*}{\rho_*}+\sigma_a\right)\right]\frac{\operatorname{th}(kl)}{kl}\frac{\operatorname{sh}(kx)}{\operatorname{sh}(kl)},$$

$$\eta(x)=\eta_*-\frac{\beta}{3K}\left(3\frac{P_*}{\rho_*}+\sigma_a\right)-\frac{1}{D(kl)}\left[\eta_*-\eta_a-\frac{\beta}{3K}\left(3\frac{P_*}{\rho_*}+\sigma_a\right)\right]\times$$

$$\times\left\{3K\left[\alpha\left(K+4/3G\right)-\beta^2\right]\frac{\operatorname{ch}(kx)}{\operatorname{ch}(kl)}-4G\beta^2\frac{\operatorname{th}(kl)}{kl}\right\}. \tag{27}$$

Тут $D(kl)=3K\left[\alpha\left(K+\dfrac{4}{3G}\right)-\beta^2\right]-4G\beta^2\dfrac{\operatorname{th}(kl)}{kl}$, $k=\sqrt{\dfrac{\left(K+4/3G\right)\gamma}{\alpha\left(K+4/3G\right)-\beta^2}}$.

Бачимо, що величина $1/k$ є характерний розмір приповерхневої неоднорідності. Аналіз формул (27) для ненульових напружень $\sigma_{yy}=\sigma_{zz}$ за відсутності силового навантаження показує, що вони монотонно зменшуються при відході від поверхонь шару $x=\pm l$ від своїх максимальних значень, досягаючи мінімального значення на серединній поверхні $x=0$. Для тонких плівок, товщина яких співвимірна з розміром області приповерхневої неоднорідності, «напруженим» є увесь шар, тоді як для товстих шарів напруженими є лише вузькі приповерхневі області. Напруження σ_{yy}, σ_{zz} у глибинних областях товстого шару практично дорівнюють нулю.

Якщо прийняти, що зовнішнє силове навантаження є розтягуюче ($\sigma_a>0$), то найбільшими розтягуючими напруженнями є напруження на поверхнях шару

$$\sigma_{yy}(\pm l)=\sigma_a+6KG\beta\left[\eta_*-\eta_a-\frac{\beta}{3K}\left(3\frac{P_*}{\rho_*}+\sigma_a\right)\right]D_1(kl), \tag{28}$$

де $D_1(kl)=\left[1-\operatorname{th}(kl)/(kl)\right]/D(kl)$. Зазначимо також, що поверхневим напруженням властивий розмірний ефект, оскільки вони залежать від товщини шару.

Для розрахунку міцності шару використаємо критерій першої класичної теорії міцності [14] і методику, наведену у роботі [15]. Приймаючи, що шар зруйнується миттєво, якщо хоча б в одній точці головне максимальне напруження досягне значення теоретичної межі міцності σ_p, на основі співвідношення (28), отримуємо критичне значення інтенсивності зовнішнього силового навантаження σ_a^{kr}, що призводить до руйнування шару

$$\sigma_a^{kr}=\frac{\sigma_p-6KG\beta\left[\eta_*-\eta_a-\beta P_*/\left(K\rho_*\right)\right]D_1(kl)}{1-2G\beta^2D_1(kl)}. \tag{29}$$

Для $l\to\infty$ значення σ_a^{kr} прямує до сталої величини σ_+, яка відповідає інтенсивності критичного силового навантаження для півпростору

$$\sigma_+=\frac{3K\left\{\sigma_p\left[\alpha\left(K+4/3G\right)-\beta^2\right]-2G\beta\left[\eta_*-\eta_a-\beta P_*/\left(K\rho_*\right)\right]\right\}}{3K\left[\alpha\left(K+4/3G\right)-\beta^2\right]-2G\beta^2}. \tag{30}$$

Величина σ_+ є межа міцності, що визначається на основі експериментальних досліджень на товстих зразках.

Із використанням (30) співвідношення (29) набуває вигляду

$$\sigma_a^{kr} = \frac{1}{1-2G\beta^2 D_1(kl)}\left\{\sigma_+\left[1-\frac{2G\beta^2}{3K\left[\alpha\left(K+4/3G\right)-\beta^2\right]}\right]+\right.$$

$$\left.+2G\beta\left[\eta_*-\eta_a-\frac{\beta P_*}{K\rho_*}\right]\left[\frac{1}{\alpha\left(K+4/3G\right)-\beta^2}-3KD_1(kl)\right]\right\}. \quad (31)$$

Праву сторону співвідношення (31) можна трактувати як таку, що описує вплив розмірів шару на межу міцності (розмірний ефект межі міцності). Бачимо, що зі збільшенням товщини шару, величина прикладеного до шару силового навантаження, що призводить до його руйнування σ_a^{kr}, зменшується, прямуючи до σ_+.

Висновки. Запропоновано підхід до формулювання базових співвідношень математичної моделі механіки пружних деформівних систем, яка описує приповерхневу неоднорідність, пов'язану з локальним зміщенням маси. Ключову систему рівнянь моделі подано як відносно вектора переміщення та вектора локального зміщення маси, так і тензора напружень і вектора локального зміщення маси. На цій основі вивчено рівноважний стан розтягнутого деформівного твердого шару. Показано, зокрема, що поверхневим напруженням властивий розмірний ефект. З використанням першої класичної теорії міцності та положення про те, що шар зруйнується миттєво, якщо хоча б в одній його точці головне максимальне напруження досягне значення теоретичної межі міцності, досліджено розмірний ефект інтенсивності силового навантаження, що призводить до руйнування шару.

Література

[1] *Третьяченко, Г. Н.* Прочность и долговечность материалов при циклических тепловых воздействиях / *Г. Н. Третьяченко, Б. С. Карпинос*. — Киев: Наук. думка, 1990. — 256 с.

[2] *Бартенев, Г. М.* Прочность и разрушение высокоэластических материалов / *Г. М. Бартенев, Ю. С. Зуев*. — Москва-Ленинград: Химия, 1964. — 388 с.

[3] *Kröener, E.* Elasticity theory of materials with long range cohesive forces / *E. Kröener* // Int. J. of Solids and Structures. — 1967. — Vol. 3, No 5. — P. 731-742.

[4] *Eringen, A. C.* Nonlocal continuum field theories / *A. C. Eringen*. — Springer-Verlag, 2002. — 376 p.

[5] *Santaoja, K.* Gradient theory from the thermomechanics point of view / *K. Santaoja* // Engineering Fracture Mechanics. — 2004. — Vol. 71, Issues 4-6. — P. 557-566.

[6] *Lazar, M.* A note on line forces in gradient elasticity / *M. Lazar, G. A. Maugin* // Mechanics Research Communications. — 2006. — Vol. 33, Issue 5. — P. 674-680.

[7] *Бурак, Я. И.* Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах / *Я. И. Бурак, Т. С. Нагирный* // Прикл. механика. — 1992. — Т. 28, № 12. — С. 3-23.

[8] *Нагірний, Т. С.* Термодинамічні моделі та методи у локально градієнтній термомеханіці з врахуванням приповерхневих явищ: автореферат дис. ... д. ф.-м. н.: 01.02.04 / *Нагірний Тарас Семенович*. — Львів, 1998. — 32 с. — Рукопис.

[9] *Нагірний, Т. С.* Локально-градієнтний підхід у термомеханіці / *Т. С Нагірний, О. Р. Грицина, К. А. Червінка* // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2006. — Вип. 3. — С. 72-83.

[10] Фізико-математичне моделювання складних систем / *Я. Бурак, Є. Чапля, Т. Нагірний* та ін.; під ред. *Я. Бурака, Є. Чаплі.* — Львів: СПОЛОМ, 2004. — 264 с.
[11] *Бурак, Я. Й.* Про термодинамічні аспекти приповерхневих явищ у термопружних системах / *Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2006. — Т. 42, № 1. — С. 39-44.
[12] *Бурак, Я. Й.* Про енергетичний підхід і термодинамічні засади варіаційного формулювання крайових задач термомеханіки з урахуванням приповерхневих явищ / *Я. Й. Бурак, Г. І. Мороз, З. В. Бойко* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2009. — Т. 52, № 2. — С. 55-65.
[13] *Дьярмати, И.* Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы / *И. Дьярмати.* — Москва: Мир, 1974. — 304 с.
[14] Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие; под ред. *В. В. Панасюка*; в 4 т. Т. 1. Основы механики разрушения материалов / *В. В. Панасюк, А. Е. Андрейкив, В. С. Партон.* — Киев: Наук. думка, 1988. — 488 с.
[15] *Нагірний, Т. С.* Поверхневі напруження в шарі. Поверхневий натяг та міцність шару / *Т. С. Нагірний* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1999. — Т. 42, № 4. — С. 111-115.

On one approach to formulation of boundary value problems of nonlocal elasticity theory

Taras Nahirnyj, Zoya Boiko

The approach to the formulation of basic correlations of the mathematical model of elastic deformable systems mechanics which describes a near-surface inhomogeneity, related with a local mass displacement, is proposed. Methods of nonequilibrium thermodynamics and nonlinear mechanics are used. In the case of isothermal approximation the free energy is determined in space of strain tensor, a vector of local mass displacement and divergence of the vector of local mass displacement. The parameters conjugated to the last ones are the gradient of chemical potential disturbance and disturbance of chemical potential. The key system of the model is entered relatively to both a displacement vector and a vector of local mass displacement, and also a stress tensor and vector of local mass displacement. On this basis the equilibrium state of a stretched layer is studied, and the size effect of the intensity of power load that causes the layer fracture is investigated.

Об одном подходе к формулированию краевых задач нелокальной теории упругости

Тарас Нагирный, Зоя Бойко

Предложен подход к формулированию базовых соотношений математической модели механики упругих деформируемых систем, которая описывает приповерхностную неоднородность, связанную с локальным смещением массы. При этом использованы методы термодинамики неравновесных процессов и нелинейной механики. При изотермическом приближении свободная энергия определена в пространстве тензора деформаций, вектора локального смещения массы и дивергенции вектора локального смещения массы. Сопряженными параметрами являются соответственно градиент возмущения химического потенциала и возмущение химического потенциала. Ключевая система уравнений модели записана как относительно вектора перемещения и вектора локального смещения массы, так и тензора напряжений и вектора локального смещения массы. На этом основании изучено равновесное состояние растянутого слоя и исследован размерный эффект интенсивности силовой нагрузки, приводящей к разрушению слоя.

Отримано 28.09.11