УДК 519.6:539.3

Розрахунок поля швидкостей руху газу в пластах підземних сховищ на основі методу скінченних елементів

Ярослав П'янило[1], Назарій Лопух[2], Петро Галій[3]

[1] д. т. н., Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005
[2] Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005
[3] ДК «Укртрансгаз» НАК «Нафтогаз України», Кловський Узвіз, 9/1, Київ, Україна, 01021, e-mail pphaliy.utg@naftogaz.net

Досліджується вплив степеня полінома на точність розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Такими рівняннями описуються процеси фільтрації газу в пористих середовищах. Показано, що метод скінченних елементів (МСЕ) можна ефективно використовувати для розрахунку поля швидкостей, на основі якого визначаються режими роботи підземних сховищ газу, зокрема, максимальні відбори.

Ключові слова: фільтрації газу, поле швидкостей, метод скінченних елементів, дискретизація.

Вступ. Функціонування підземних сховищ газу значною мірою залежить від процесів фільтрації газу в пластах. Основними характеристиками роботи є значення пластового тиску та дебіт свердловини. Відбір газу зі сховища визначається депресією тиску між вибоєм свердловини та газозбірним пунктом. Своєю чергою дебіт свердловини визначається швидкістю підтоку газу до вибою, яка обчислюється параметрами газу та пласту сховища. Під час великої депресії тиску між вибоєм свердловини та газозбірним пунктом газ, внаслідок опору середовища, не встигає підтікати до вибою, внаслідок чого відбувається розрив поля швидкостей. Тому є необхідність у моделюванні поля швидкостей руху газу в пластах підземних сховищ. Робіт, які стосуються дослідження цього процесу в складних пористих середовищах, є небагато. Це можна пояснити декількома основними причинами: складністю таких об'єктів; процеси фільтрації описуються нелінійними некласичними диференціальними рівняннями в частинних похідних, що значно утруднює знаходження їх розв'язку; параметри, що входять у ці рівняння, залежать від координат, часу і самого розв'язку.

Метою роботи є побудова алгоритму для розрахунку швидкості підтоку газу до свердловини залежно від параметрів середовища.

Відомо, що рух газу в пластах ПСГ відбувається на основі лінійного закону Дарсі та залежить, в основному, від коефіцієнта проникності та пористості пласту.

Згадані параметри суттєво залежать як від просторових координат, так і від розподілу тиску. Разом із тим в околі робочих свердловин проводять перфорацію пласту, що має наслідком зміну властивостей пласту в цій області, а також там, де проходить основний спад тиску. Тому в загальному випадку пласт доцільно поділити на області, у яких справджується лінійний закон Дарсі та у яких він порушується. Слід зауважити, що за рахунок періодичності роботи сховища та малої швидкості поширення газу в ньому виникають застійні зони, які практично не впливають на процеси фільтрації газу в сховищі.

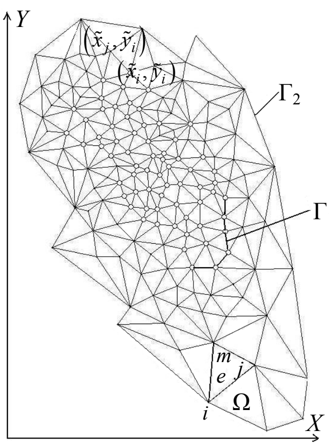
1. Формулювання задачі

Фільтрація газу в пласті ПСГ у нестаціонарному випадку описується нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних [1]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_x h}{\mu\chi}\frac{\partial p^2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{k_y h}{\mu\chi}\frac{\partial p^2}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{k_z h}{\mu\chi}\frac{\partial p^2}{\partial y_2}\right)=2\alpha_n mh\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\chi}\right)+4mhqp_{st}, \quad (1)$$

яке справджується у тривимірній області $\Omega_3 \subset R^3$, що займає пласт ПСГ (рис. 1). На Ω_3 задано множину точок (множину свердловин) із координатами $\{x_i, y_{1i}\}, i=\overline{1,n}$, і значення тисків $p(x_i, y_{1i}, t_0)$ у цих точках у момент часу t_0. У рівнянні (1): k_u — проникність пласту в напрямі u, μ — динамічна в'язкість газу, χ — коефіцієнт стисливості, h — товщина пласту, а m — його пористість, α_n — коефіцієнт газонасиченості, q — густина відбору, p_{st} — значення атмосферного тиску в стандартних умовах.

Рівняння (1) є нелінійне за тиском і з розподіленими змінними. Вхідними даними для знаходження його розв'язку на практиці є заміряні значення тиску



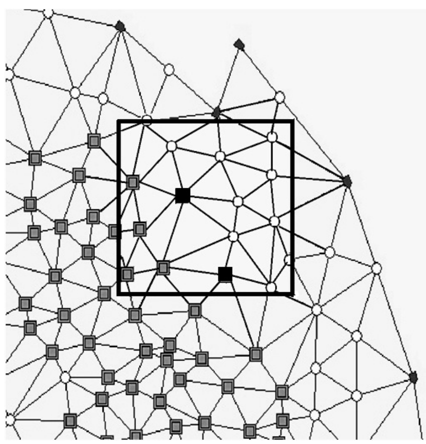


Рис. 1. Структурна схема Мринського ПСГ (*а*) з виділеною підобластю (*б*), в якій розраховується поле швидкостей

у робочих свердловинах. Враховуючи такі особливості, аналітично розв'язати рівняння можна в часткових випадках. У роботах [2-6] запропоновано методику розв'язування такого типу рівнянь МСЕ, яка полягає в наступному. Необхідно знайти розв'язок $p(x, y_1, y_2, t)$ рівняння (1) за відомими значеннями тиску $p(x_i, y_{1i}, y_{2i}, t_0)$ у координатах свердловин. При цьому необхідно, щоб виконувалася така умова

$$M = \int_V \rho dv\,, \tag{2}$$

де M — маса газу в сховищі, ρ — густина газу, а інтегрування проводиться по об'єму сховища V.

Здебільшого товщини пластів порівняно невеликі та в плані близькі до площини. Внаслідок цього зміна тиску газу у вертикальному напрямі невелика та похідною за змінною z можна знехтувати. Разом із тим параметри пласту, наприклад коефіцієнт проникності, в різних напрямах може приймати різні значення.

Якщо ввести позначення $\tilde{k}_x = k_x / k_z\,, \tilde{k}_y = k_y / k_z$ і знехтувати градієнтом тиску за вертикальною координатою, то рівняння (1) запишемо так

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tilde{k}_x h}{\mu\chi}\frac{\partial p^2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tilde{k}_y h}{\mu\chi}\frac{\partial p^2}{\partial y}\right) = 2\alpha_n mh \frac{\partial}{k_z \partial t}\left(\frac{p}{\chi}\right) + \frac{4}{k_z} mhqp_{st}\,. \tag{3}$$

Нехай Γ_2 — зовнішня межа області Ω; Ω_* — підмножина області Ω, яка охоплює координати точок із відомими значеннями тисків p_i^j, j — часовий індекс; ν — зовнішня нормаль до області $\Omega \subset R^2$.

Розв'язок рівняння (3) на межі Γ_2 області Ω задовольняє крайову умову Неймана

$$\Phi p(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in \Gamma_2\,,$$

де $\Phi p \overset{\text{def}}{=} \dfrac{kh}{\mu z}\dfrac{\partial p}{\partial x}\nu_x + \dfrac{kh}{\mu z}\dfrac{\partial p}{\partial y}\nu_y;\ \nu_x = \cos(\nu, x),\ \nu_y = \cos(\nu, y)$,

та умову на Ω_*

$$p\left(x_i, y_i, t^j\right) = p_1\,, \qquad \left(x_i, y_i\right) \in \Omega_*\,.$$

2. Методика розв'язування

Область Ω розбиваємо на скінченні трикутні елементи таким чином, щоб робочі та замірні свердловини попадали у вузли розбиття. Побудована послідовність елементів дозволяє сформувати глобальну матрицю вузлів і локальні матриці для кожного елемента.

У загальному випадку розглянемо рівняння другого порядку відносно невідомої функції p вигляду

$$-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)+gp=f, \qquad x\in\Omega\subset R^2 . \tag{4}$$

Знаходження розв'язку задачі полягає у мінімізації функціонала

$$F(p)=\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\frac{\partial p}{dx_i}\frac{dp}{dx_j}dx+\int_{\Omega}gp^2dx-2\int_{\Omega}fpdx .$$

Наближений розв'язок p_e варіаційної задачі шукаємо у вигляді

$$p_e=N_e q_e ,$$

де $N_e=\left(\varphi_i,\varphi_j,\varphi_m\right)$ — матиця базисних функцій; $q_e=\left(p_i,p_j,p_m\right)^{\mathrm{T}}$ — матриця, яка формується зі значень шуканого розв'язку у вершинах трикутних елементів. Індекс «Т» означає операцію транспонування, а індекс «e» — елементарний трикутник.

У разі поділу області на трикутні елементи базисні функції можна вибирати у вигляді многочленів довільного порядку. Вища степінь полінома повинна приводити до уточнення шуканого розв'язку. У зв'язку з тим, що на практиці вхідна інформація задається в дискретній формі з невисокою точністю, то степінь інтерполяційного полінома можна збільшувати до деякого значення. Подальше збільшення степеня многочлена веде як до втрати точності, так і до зростання машинного часу й оперативної пам'яті. Це важливо враховувати під час розв'язування задач оптимального оперативного керування, оскільки в цьому випадку час отримання розв'язку повинен дозволити приймати необхідні рішення на основі знайденого розв'язку задачі.

Базисні функції, вибрані у вигляді многочленів першого порядку, такі

$$\varphi_i\left(x_1,x_2\right)=\frac{1}{2S_e}\left(a_i+b_ix_1+c_ix_2\right).$$

Тут S_e — площа елемента, а коефіцієнти a_i,b_i,c_i залежать від координат вершин елементів таким чином

$$a_i=x_1^{(j)}x_2^{(m)}-x_2^{(j)}x_1^{(m)}, \quad b_i=x_2^{(j)}-x_2^{(m)}, \quad c_i=x_1^{(m)}-x_1^{(j)}, \quad i,j,m=\overline{1,3} .$$

Верхні індекси у дужках означають номери вершин трикутного елемента.

Дискретизація функціонала $F(p)$ скінченними елементами приводить до СЛАР з урахуванням того, що $\Omega=\sum_{e}\Omega_e$.

Інтерполяційний поліном у вигляді многочлена другого порядку буде

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{2S_e}\left(a_1 + a_2x_1 + a_3x_2 + a_4x_1x_2 + a_5x_1^2 + a_6x_2^2\right).$$

Аналогічно як і вище, для визначення невідомих вузлових значень шуканої функції будуємо СЛАР. Параметри S_e й $a_i, i = \overline{1,6}$ мають такий же ж фізичний зміст, як і у випадку інтерполяційного полінома першого порядку та залежать від координат вершин елементів.

Для зведення рівняння (3) до рівняння (4) використаємо явну схему дискретизації шуканого розв’язку за часом

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{p - p_*}{\Delta t}.$$

Тоді величини у рівнянні (4) сконкретизуємо так

$$g = \frac{mh}{\Delta t\, \tilde{p} z}, \qquad f = \left[-2mhp_{st}q + \left(\frac{\partial p_*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_*}{\partial y}\right)^2 + \frac{mh}{\Delta t\, z} p_* \right] \Big/ \tilde{p},$$

де Δt — крок дискретизації за часом; p_* — значення розв’язку, отримане на попередньому часовому кроці; $\tilde{p}$ — ітераційно-наближене значення розв’язку.

3. Обчислювальний експеримент

1. Для аналізу впливу виду полінома на похибку кінцевого результату необхідно мати достатньо точний критерій оцінювання похибки. Одним із таких критеріїв може бути порівняння розрахованих результатів із заміряними. На цей час пластовий тиск визначають через перерахунок заміряних тисків на гирлах свердловин. Середній пластовий тиск визначається як середнє арифметичне з отриманих перерахованих результатів. Внаслідок цього втрачається як точність, так і достовірність результатів. Тому для дослідження впливу степеня інтерполяційного полінома на точність кінцевого результату проводився числовий експеримент на трубопроводі, де є можливість отримати достатньо точні та в необхідній кількості заміри параметрів процесу руху газу. Розрахунки проводилися для трубопроводу довжиною 100 км, діаметром 1,388 м для таких значень параметрів: $\lambda = 0{,}009$, $\rho_0 = 0{,}682$ кг/м^3, $T = 313$ °K, $R = 506{,}7$ Дж/кг·°K, $z = 0{,}87$. Граничні умови задавали на поступлення (відбір) газу, які змінювалися з часом від 1027 до 1222 м^3/с за експоненціальним законом. Вибір трубопроводу як об’єкта дослідження обґрунтовується тим, що для нього можна отримати необхідні дані для контролю достовірності та точності. Крок за часом $dt = 10$ с, кількість елементів розбиття за координатою $n = 10$. Результати обчислень подані в табл. 1.

Аналіз отриманих результатів показує, що інтерполяційні поліноми першого та другого порядку дають у межах точності однакові результати. Однак, у разі використання поліномів другого порядку, час реалізації алгоритму суттєво зростає.

Таблиця 1

Віддаль, км	20		80		100	
Степінь / Час, с	1	2	1	2	1	2
0	56,82	56,82	50,68	50,68	44,83	44,83
100	56,88	55,66	50,72	51,11	44,48	45,47
200	57,04	55,92	50,70	51,07	44,08	45,77
300	57,28	56,36	50,62	50,92	43,69	44,93
400	57,52	56,76	50,54	50,79	43,29	44,34
500	57,74	57,03	50,46	50,70	42,96	43,87
600	57,92	57,29	50,40	50,62	42,69	43,53
700	58,07	57,50	50,35	50,55	42,49	43,23
800	58,17	57,68	50,31	50,49	42,34	42,99
900	58,25	57,83	50,28	50,44	42,23	42,78
1000	58,31	57,96	50,26	50,39	42,14	42,61
1100	58,36	58,07	50,24	50,36	42,08	42,46
1200	58,39	58,16	50,23	50,33	42,03	42,34
1300	58,42	58,23	50,22	50,30	42,00	42,24
1400	58,44	58,29	50,21	50,28	41,97	42,16
1500	58,45	58,35	50,21	50,27	41,95	42,09
1600	58,46	58,39	50,20	50,25	41,93	42,03
1700	58,47	58,43	50,20	50,24	41,92	41,98
1800	58,48	58,46	50,20	50,23	41,91	41,94
1900	58,48	58,48	50,20	50,22	41,91	41,91
2000	58,48	58,51	50,20	50,21	41,90	41,88

2. Стосовно розрахунку поля швидкостей у пластах підземних сховищ газу обчислювальний експеримент проводився за заміряними даними на Мринському ПСГ за таких параметрів: площа пласту $S = 16$ млн м^2; динамічна в'язкість $\mu = 0{,}000011$ Па·с; середня потужність — $h = 18{,}2$ м; температура газу $T = 293$ °K; газова стала $R = 506{,}7$ Дж/кг·°K; коефіцієнт стиску $z = 0{,}87$; пористість $m = 0{,}31$; коефіцієнт проникності $k = 1{,}8 \cdot 10^{-12}$ м^2.

Початковий розподіл пластового тиску задавався значеннями тисків у контрольних, замірних і робочих свердловинах у нейтральний період. Розраховані значення середніх тисків газу порівнювали з відповідними значеннями, отриманими на основі заміряних даних. Одночасно перевірялась умова (2).

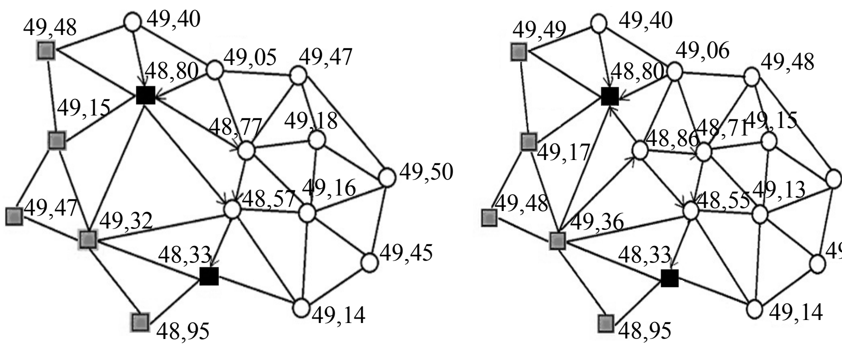
Алгоритм дослідження полягає в наступному.

- За заданими значеннями тиску $p\left(x_i, y_i, t_0\right)$ будуємо початково-граничні умови.
- Знаходимо початковий розподіл тиску.
- Розв’язуємо нестаціонарну задачу з умовами на відбір газу з ПГС.

На рис. 1*б* квадратиками позначені свердловини, кружечками — сіткові вузли області. Темнішим кольором позначені 2 свердловини, в яких задавався відбір газу 1 млн м^3/добу. Початкове значення пластового тиску p = 49,50 атм. Обчислення розподілу пластового тиску проводилося упродовж перших 10 днів відбору газу зі сховища.

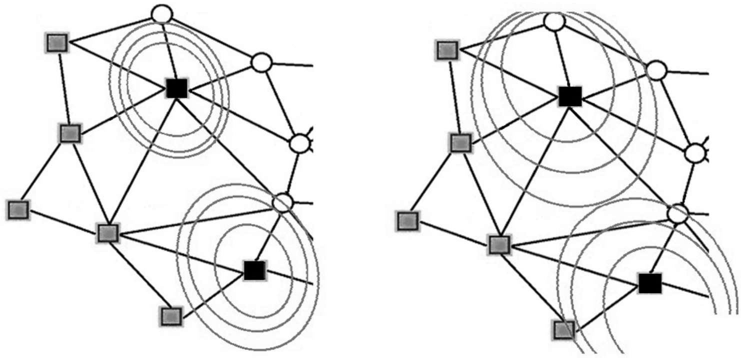
На рис. 2 зображено розподіл тиску на ділянці пласту (рис. 1*б*) в околі робочих свердловин і напрями потоків газу. Аналіз отриманих результатів показує, що поле швидкостей суттєво залежить від вибраної сітки дискретизації. Вузли дискретизації потрібно вибирати достатньо близько один від одного, щоби врахувати вплив особливостей пласту на розподіл поля швидкостей. З іншого боку, відомо, що збільшення густини сітки веде до нестійкості обчислювального процесу. Тому дуже важливо правильно побудувати вузлову сітку щодо розміщення та кількості вузлів. Наприклад, у разі такого розміщення вузлів, як на рис. 2*а*, газ рухатиметься в напрямку від свердловини, з якої він відбирається, чого насправді не може бути. Додавання одного вузла з тиском 48,86 Па між двома свердловинами, з яких відбирається газ (рис. 2*а*), веде до фізично обґрунтованого напряму руху газу до свердловини, з якої він відбирається.

На рис. 3 побудовано поле швидкостей руху газу в пласті в околах робочих свердловин. На рис. 3*а* показано поле швидкостей на 2-ий день після початку відбирання газу, на рис. 3*б* — на 10-ий день. Овальні лінії показують неоднорідний характер поведінки швидкості руху газу в пласті. Відображення на рисунках узгоджується з фізичним змістом процесу: зменшення у часі перепаду тисків на ділянці, що лежить між робочими свердловинами.



а *б*

Рис. 2. Залежність розподілу пластового тиску і напрямів потоків газу від кількості вузлів на виділеній ділянці пласту (див. рис. 1*б*) в околах робочих свердловин (17 вузлів — рис. 2*а*, 18 вузлів — рис. 2*б*)



а *б*

Рис. 3. Розподіл поля швидкостей руху газу в пласті в околах робочих свердловин через 2 (рис. 3*а*) та 10 (рис. 3*б*) днів від початку відбирання газу

Висновки. Аналіз результатів числового експерименту показує, що для обчислення параметрів руху газу в трубопроводах і пластах ПГС із застосуванням МСЕ достатньо обмежитися вибором базисних функцій у вигляді многочленів першого ступеня.

Для визначення напряму руху на основі МСЕ в околах свердловин важливим параметром є густина вузлів дискретизації. На основі отриманого розподілу поля швидкості поширення газу до робочих свердловин можна судити про достовірність отриманих результатів (побудоване поле швидкостей повинно бути фізично обґрунтованим).

Критерієм максимального відбору газу в такому формулюванні є нерозривність поля швидкостей. У разі відбирання газу його об’єм залежить від депресії тиску між пластом сховища та пунктом збору газу. Вибрана депресія визначає швидкість газу в технологічних об’єктах ПСГ. Для визначення умов відбирання газу швидкості руху газу в пласті та робочій колоні повинні бути узгодженими.

Література

[1] *Лапук, Б. Б.* Теоретические основы разработки месторождений природних газов / *Б. Б. Лапук*. — Москва-Иижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. — 296 с.

[2] *П’янило, Я. Д.* Дослідження впливу параметрів пласту та привибійної області свердловини на розрахунок дебіту свердловини / *Я. Д. П’янило, М. Г. Притула* // Комп’ютерна інженерія та інформаційні технології. — 2002. — № 392. — С. 45-49.

[3] Розрахунок початково-граничних умов у задачах фільтрації газу в пористих середовищах / *Н. Лопух, Я. П’янило, М. Притула, Н. Притула* // Вісник Державного університету «Львівська політехніка». Комп’ютерна інженерія та інформаційні технології. — 2009. — № 638. — С. 239-243.

[4] Алгоритми розрахунку гідродинамічних параметрів течії газу в трубопроводах (2) / *Н. Лопух, М. Притула, Я. П’янило, Я. Савула* // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Комп’ютерні науки та інформаційні технології. — 2008. — № 616. — С. 159-165.

[5] Алгоритми розрахунку гідродинамічних параметрів течії газу в трубопроводах (1) / *Н. Лопух, М. Притула, Я. П’янило, Я. Савула* // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. — 2007. — Вип. 12. — С. 108-117.

[6] Вплив тиску на швидкість фільтрації газу в пористих середовищах / *Я. П’янило, П. Галій, Н. Лопух, Г. П’янило* // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2010. — Вип. 12. — С. 144-151.

Calculation of the velocity field of gas motion in underground storage layers based on the finite element method

Yaroslav Pyanylo, Nazariy Lopuh, Petro Haliy

The effect of the degree of the polynomial on the accuracy of nonlinear partial differential equations solution is investigated. Such equations describe the processes of gas flow in porous media. It is shown that the finite element method (FEM) can be effectively used for the calculation of the velocity field, thence defined modes of operation of underground gas storage facilities, in particular, the maximum extraction.

Расчет поля скоростей движения газа в пластах подземных хранилищ на основании метода конечных элементов

Ярослав Пяныло, Назарий Лопух, Пётр Галий

Исследуется влияние степени полинома на точность решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Такими уравнениями описываются процессы фильтрации газа в пористых средах. Показано, что метод конечных элементов можно эффективно использовать для расчета поля скоростей, на основании которого определяются режимы работы подземных хранилищ газа, в частности, максимальные отборы.

Отримано 30.05.11