УДК 539.3

Коливання ортотропної циліндричної оболонки з отворами довільної конфігурації. Частина І. Побудова розв'язку

Тетяна Шопа

К. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Микитинецька, 3, Івано-Франківськ, e-mail: tetyana.sh@gmail.com

У роботі розглянуто задачу про усталені поперечні коливання шарнірно опертої ортотропної циліндричної оболонки з отворами довільної форми та різними типами граничних умов на їх контурах. Використано теорію оболонок, яка враховує поперечні зсуви. Розв'язок ґрунтується на непрямому методі граничних елементів і секвенціальному підході до побудови функції Ґріна. Задачу зведено до систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Ключові слова: ортотропна циліндрична оболонка, отвори, функція Ґріна, секвенціальний підхід, коливання, частоти вільних коливань.

Вступ. Чимало тонкостінних композиційних елементів конструкцій складної геометричної форми з отворами та включеннями різної конфігурації в сучасній техніці працюють в умовах інтенсивного режиму. Такі об'єкти вимагають складних розрахунків згідно уточнених теорій, що потребує розв'язання відповідних крайових задач у багатозв'язних областях. Основні відомі результати про коливання оболонок були отримані згідно класичної теорії [1-5]. Відома низка робіт, у яких знайдені розв'язки задач про коливання анізотропних шарнірно опертих оболонок з отворами згідно теорії, що враховує поперечні зсуви, однак не враховує повороти навколо нормалі до серединної поверхні [6-8]. У цій роботі згідно теорії, яка враховує поперечні зсуви та повороти навколо нормалі до серединної поверхні, розв'язано задачу про коливання ортотропної замкненої циліндричної оболонки з отворами довільної конфігурації та різними крайовими умовами на їх контурах.

1. Формулювання задачі

Розглянемо задачу про усталені поперечні коливання шарнірно опертої ортотропної циліндричної замкненої оболонки з N отворами довільної форми та розташування, контурами яких є криві $L^{(j)}, j=\overline{1,N}$. Нехай осі ортотропії співпадають із поздовжнім і поперечним напрямками оболонки, яка працює в режимі усталених коливань за гармонічним законом у часі.

Використовуємо такі позначення: $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$ — нормальний і дотичний вектор уздовж деякого напрямку; E_i — модулі Юнга, а G_{12}, G_{13}, G_{23} — модулі зсуву матеріалу; ν_{12}, ν_{21} — коефіцієнти Пуассона, а ρ — густина матеріалу; k_1, k_2 — головні кривини оболонки; $l, R, 2h$ — довжина, радіус і товщина оболонки; q_i, m_i — компоненти зовнішнього навантаження; w — прогин оболонки; $u_{in}, u_{i\tau}$ — нормальні та тангенціальні компоненти переміщень точок серединної поверхні; $\gamma_{in}, \gamma_{i\tau}$ — нормальні та тангенціальні компоненти кутів повороту нормалі до серединної поверхні; Q_n — нормальна компонента перерізувальної сили; M_n, N_n — нормальні, а M_τ, N_τ — тангенціальні компоненти моменту й осьової сили.

Крайові умови за шарнірного опирання на торцях оболонки такі:

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad N_n = 0, \quad u_\tau = 0, \quad \gamma_\tau = 0 \quad \text{для} \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_1 = l\,. \tag{1}$$

Розглянемо два типи крайових умов на отворах:

а) Задаються розподілені переміщення

$$\begin{gathered} w^{(i)} = w_0^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t), \quad u_n^{(i)} = u_{n0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t), \quad \gamma_n^{(i)} = \gamma_{n0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t), \\ u_\tau^{(i)} = u_{\tau 0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t), \quad \gamma_\tau^{(i)} = \gamma_{\tau 0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t), \quad i = \overline{1, N}\,. \end{gathered} \tag{2}$$

б) Задаються розподілені зусилля

$$\begin{gathered} Q_n^{(i)} = Q_{n0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t), \quad M_n^{(i)} = M_{n0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t), \quad N_n^{(i)} = N_{n0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t), \\ N_\tau^{(i)} = N_{\tau 0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t), \quad M_\tau^{(i)} = M_{\tau 0}^{(i)}(\alpha)\sin(\omega_0 t), \quad i = \overline{1, N}\,. \end{gathered} \tag{3}$$

2. Вирішувальна система рівнянь

Дослідження проводимо за використання рівнянь теорії непологих оболонок, яка враховує поперечні зсуви та повороти навколо нормалі до серединної поверхні.

Рівняння руху непологої оболонки, що враховують нормальну компоненту інерційної сили для випадку поперечних коливань, мають вигляд [7]

$$\begin{gathered} \frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -m_i, \qquad \frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} - k_i Q_i = -q_i \quad (i = 1, 2), \\ \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) - 2h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q_3\,. \end{gathered} \tag{4}$$

На основі такого розподілу напружень і переміщень

$$U_i = u_i + \gamma_i \alpha_3,\ U_3 = w, \quad \sigma_{33} = \begin{cases} 0, & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{33}^{\pm}, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{2h} + \frac{3M_{ij}}{2h^3}\alpha_3 \left(-h \le \alpha_3 \le h\right),\ \sigma_{i3} = \begin{cases} \dfrac{Q_i}{2h}, & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{i3}^{\pm}, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases} \qquad \left(i, j = 1,2;\ i \ne j\right) \quad (5)$$

фізичні співвідношення набудуть вигляду

$$M_{ii} = D_i \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \nu_{ij} \frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_j} \right), \qquad N_{ii} = B_i \left[\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \nu_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + \left(k_i + \nu_{ij} k_j\right) w \right],$$

$$M_{ij} = M_{ji} = D_{ij} \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_i} \right), \quad N_{ij} = N_{ji} = B_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} \right),$$

$$Q_i = \Lambda_i \left(\gamma_i + \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - k_i u_i \right), \quad D_i = \frac{2h^3 E_i}{3\left(1 - \nu_{ij}\nu_{ji}\right)}, \quad D_{ij} = \frac{2h^3 G_{ij}}{3},$$

$$B_{ij} = 2hG_{ij}, \quad B_i = \left(2hE_i\right) \Big/ \left(1 - \nu_{ij}\nu_{ji}\right), \quad \Lambda_i = 2hG_{i3}, \quad i, j = 1, 2; \quad i \ne j. \quad (6)$$

Нормальні та дотичні компоненти переміщень і зусиль визначаються за формулами

$$\gamma_n = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2, \quad \gamma_\tau = \tau_1\gamma_1 + \tau_2\gamma_2,$$
$$u_n = n_1 u_1 + n_2 u_2, \quad u_\tau = \tau_1 u_1 + \tau_2 u_2, \quad Q_n = Q_1 n_1 + Q_2 n_2,$$
$$M_n = M_{11} n_1^2 + 2M_{12} n_1 n_2 + M_{22} n_2^2,$$
$$N_n = N_{11} n_1^2 + 2N_{12} n_1 n_2 + N_{22} n_2^2,$$
$$M_\tau = \left(M_{11} n_1 + M_{12} n_2\right)\tau_1 + \left(M_{21} n_1 + M_{22} n_2\right)\tau_2,$$
$$N_\tau = \left(N_{11} n_1 + N_{12} n_2\right)\tau_1 + \left(N_{21} n_1 + N_{22} n_2\right)\tau_2. \quad (7)$$

Після підстановки фізичних співвідношень (6) у рівняння руху (4) вирішувальна система динамічних рівнянь набуде вигляду

$$\left[\mathbf{L}\right]\{U\} = -\{P\}, \quad \{U\} = \{u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2\}, \quad \{P\} = \{q_1, q_2, q_3, m_1, m_2\}, \quad (8)$$

$$\mathbf{L}_{11} = B_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_1^2 \Lambda_1, \qquad \mathbf{L}_{22} = B_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_2^2 \Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{33} = \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \left[k_1 B_1 \left(k_1 + \nu_{12} k_2\right) + k_2 B_2 \left(k_2 + \nu_{21} k_1\right)\right] - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{44} = D_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_1, \qquad \mathbf{L}_{55} = D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{14} = \mathbf{L}_{41} = k_1 \Lambda_1, \qquad \mathbf{L}_{25} = \mathbf{L}_{52} = k_2 \Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{34} = -\mathbf{L}_{43} = \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \qquad \mathbf{L}_{35} = -\mathbf{L}_{53} = \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{12} = \left(B_1 \nu_{12} + B_{12}\right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{21} = \left(B_{12} + B_2 \nu_{21}\right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{15} = \mathbf{L}_{51} = 0,$$

$$\mathbf{L}_{45} = \left(D_1 \nu_{12} + D_{12}\right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{54} = \left(D_{12} + D_2 \nu_{21}\right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{24} = \mathbf{L}_{42} = 0,$$

$$\mathbf{L}_{13} = \left(k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_1 k_2 \nu_{12}\right) \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \qquad \mathbf{L}_{31} = -\left(k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_2 k_2 \nu_{21}\right) \frac{\partial}{\partial \alpha_1},$$

$$\mathbf{L}_{23} = \left(k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_2 k_2 \nu_{21}\right) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \qquad \mathbf{L}_{32} = -\left(k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_1 k_1 \nu_{12}\right) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}.$$

У результаті отримуємо дві крайові задачі: задачу (1), (2), (8) і задачу (1), (3), (8).

3. Побудова функції Ґріна

Функцію Ґріна для двох згаданих вище крайових задач знайдено за допомогою методу Фур'є та секвенціального подання дельта-функції (у вигляді границі послідовності дельтоподібних функцій).

У системі рівнянь (8) функції q_i та m_j подамо формулами

$$\begin{aligned}
q_i &= \mathrm{T}_i^r \delta_{\varepsilon 1}\left(\alpha_1, \alpha_1^r\right) \delta_{\varepsilon 2}\left(\alpha_2, \alpha_2^r\right) \sin\left(\omega_0 t\right), \quad i = \overline{1,3}, \\
m_j &= \mathrm{T}_{3+j}^r \delta_{\varepsilon 1}\left(\alpha_1, \alpha_1^r\right) \delta_{\varepsilon 2}\left(\alpha_2, \alpha_2^r\right) \sin\left(\omega_0 t\right), \quad j = 1,2, \\
\delta_\varepsilon\left(\xi, \xi^r\right) &= \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} g\left(\left|\xi - \xi^r\right| / \varepsilon\right), & \left|\xi - \xi^r\right| \le \varepsilon, \\ 0, & \left|\xi - \xi^r\right| > \varepsilon, \end{cases}
\end{aligned} \tag{9}$$

де $g(\varepsilon)\left(0 \le \varepsilon \le 1\right)$ — спадна гладка функція, $g(1) = 0,\ \int\limits_0^1 g\left(\xi\right) d\xi = 1$.

Розвинемо співвідношення (9) у ряди Фур'є

$$q_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} T_3^r C_{km}(\varepsilon) \left[\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^r\right) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) + \Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^r\right) \Phi_{km}^{sc}(\alpha) \right],$$

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_4^r \end{Bmatrix} C_{km}(\varepsilon)\left[\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{cs}(\alpha) + \Phi_{km}^{cc}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{cc}(\alpha)\right],$$

$$\begin{Bmatrix} q_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\begin{Bmatrix} T_2^r \\ T_5^r \end{Bmatrix} C_{km}(\varepsilon)\left[\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{sc}(\alpha) + \Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\right], \qquad (10)$$

$$\Phi_{km}^{cs}(\alpha) = \cos\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right)\sin\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right), \qquad \Phi_{km}^{sc}(\alpha) = \sin\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right)\cos\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right),$$

$$\Phi_{km}^{ss}(\alpha) = \sin\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right)\sin\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right), \qquad \Phi_{km}^{cc}(\alpha) = \cos\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right)\cos\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right),$$

$\lambda_{1k} = k\pi/l_1$, $\lambda_{2m} = m\pi/l_2$, $l_2 = R\pi$, $l_1 = l$, $C_{km}(\varepsilon) = 4\varphi\left(\lambda_{1k}\varepsilon\right)\varphi\left(\lambda_{2m}\varepsilon\right)/\left(l_1 l_2\right)$; $\varphi\left(\lambda_{1k}\varepsilon\right)$, $\varphi\left(\lambda_{2m}\varepsilon\right)$ — вагові функції, які визначають тип узагальненого підсумовування.

Розв'язки шукаємо у такій формі

$$w\left(\alpha,\alpha^r,t\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[w_{\varepsilon km}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{ss}(\alpha) + w_{\varepsilon km}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{sc}(\alpha)\right]\sin\left(\omega_0 t\right),$$

$$\begin{Bmatrix} u_1\left(\alpha,\alpha^r,t\right) \\ \gamma_1\left(\alpha,\alpha^r,t\right) \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\begin{Bmatrix} u_{1\varepsilon km}^{(1)}\left(\alpha^r\right) \\ \gamma_{1\varepsilon km}^{(1)}\left(\alpha^r\right) \end{Bmatrix}\Phi_{km}^{cs}(\alpha) + \begin{Bmatrix} u_{1\varepsilon km}^{(2)}\left(\alpha^r\right) \\ \gamma_{1\varepsilon km}^{(2)}\left(\alpha^r\right) \end{Bmatrix}\Phi_{km}^{cc}(\alpha)\right]\sin\left(\omega_0 t\right),$$

$$\begin{Bmatrix} u_2\left(\alpha,\alpha^r,t\right) \\ \gamma_2\left(\alpha,\alpha^r,t\right) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\begin{Bmatrix} u_{2\varepsilon km}^{(1)}\left(\alpha^r\right) \\ \gamma_{2\varepsilon km}^{(1)}\left(\alpha^r\right) \end{Bmatrix}\Phi_{km}^{sc}(\alpha) + \begin{Bmatrix} u_{2\varepsilon km}^{(2)}\left(\alpha^r\right) \\ \gamma_{2\varepsilon km}^{(2)}\left(\alpha^r\right) \end{Bmatrix}\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\right]\sin\left(\omega_0 t\right) \quad (11)$$

Після підстановки співвідношень (10), (11) у вирішувальну систему рівнянь (8) отримаємо сукупність систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів невідомих функцій. Часової координати вдається позбутись у випадку усталених гармонічних коливань.

У підсумку одержимо функцію Ґріна задачі в аналітичному вигляді

$$U\left(\alpha,\alpha^r,t\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} U\left(\alpha,\alpha^r,\varepsilon,t\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon)\left\langle\left[\mathbf{E}_{km}^{(1)}(\alpha)\right]\left[U_{km}^{(1)}\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\mathbf{E}_{km}^{(2)}(\alpha)\right]\left[\mathbf{U}_{km}^{(2)}\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\right]\right\rangle\left\{T^r\right\}\sin\left(\omega_0 t\right), \qquad (12)$$

$$U\left(\alpha,\alpha^r,t\right) = \left\{u_1(\alpha,\alpha^r,t), u_2(\alpha,\alpha^r,t), w(\alpha,\alpha^r,t), \gamma_1(\alpha,\alpha^r,t), \gamma_2(\alpha,\alpha^r,t)\right\},$$

$$\left[\mathbf{E}_{km}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\right] = \begin{bmatrix} \Phi_{km}^{cs} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{km}^{sc} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{km}^{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{cs} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{sc} \end{bmatrix}, \quad \left[\mathbf{E}_{km}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\right] = \begin{bmatrix} \Phi_{km}^{cc} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{km}^{ss} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{km}^{sc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{cc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{ss} \end{bmatrix},$$

$$\left[\mathbf{U}_{km}^{(j)}\right]=\begin{bmatrix} u_{1km}^{(j)1} & u_{1km}^{(j)2} & u_{1km}^{(j)3} & u_{1km}^{(j)4} & u_{1km}^{(j)5} \\ u_{2km}^{(j)1} & u_{2km}^{(j)2} & u_{2km}^{(j)3} & u_{2km}^{(j)4} & u_{2km}^{(j)5} \\ w_{km}^{(j)1} & w_{km}^{(j)2} & w_{km}^{(j)3} & w_{km}^{(j)4} & w_{km}^{(j)5} \\ \gamma_{1km}^{(j)1} & \gamma_{1km}^{(j)2} & \gamma_{1km}^{(j)3} & \gamma_{1km}^{(j)4} & \gamma_{1km}^{(j)5} \\ \gamma_{2km}^{(j)1} & \gamma_{2km}^{(j)2} & \gamma_{2km}^{(j)3} & \gamma_{2km}^{(j)4} & \gamma_{2km}^{(j)5} \end{bmatrix}, \qquad j=1,2\,,$$

$$u_{1km}^{(j)1}=\frac{1}{\det\left|\mathbf{L}^{(j)km}\right|}\det\begin{vmatrix} \mathbf{L}_{22}^{(j)km} & \mathbf{L}_{23}^{(j)km} & \mathbf{L}_{24}^{(j)km} & \mathbf{L}_{25}^{(j)km} \\ \mathbf{L}_{32}^{(j)km} & \mathbf{L}_{33}^{(j)km} & \mathbf{L}_{34}^{(j)km} & \mathbf{L}_{35}^{(j)km} \\ \mathbf{L}_{42}^{(j)km} & \mathbf{L}_{43}^{(j)km} & \mathbf{L}_{44}^{(j)km} & \mathbf{L}_{45}^{(j)km} \\ \mathbf{L}_{52}^{(j)km} & \mathbf{L}_{53}^{(j)km} & \mathbf{L}_{54}^{(j)km} & \mathbf{L}_{55}^{(j)km} \end{vmatrix} \qquad \left(j=1,2\right),\ ...,$$

$$\mathbf{L}_{11}^{(1)km}=-B_1\lambda_{1k}^2-B_{12}\lambda_{2m}^2-k_1^2\Lambda_1\,, \qquad \mathbf{L}_{22}^{(1)km}=-B_{12}\lambda_{1k}^2-B_2\lambda_{2m}^2-k_2^2\Lambda_2\,,$$

$$\mathbf{L}_{33}^{(1)km}=-\Lambda_1\lambda_{1k}^2-\Lambda_2\lambda_{2m}^2-\left[k_1B_1\left(k_1+\nu_{12}k_2\right)+k_2B_2\left(k_2+\nu_{21}k_1\right)\right]+2\rho h\omega_0^2\,,$$

$$\mathbf{L}_{44}^{(1)km}=-D_1\lambda_{1k}^2-D_{12}\lambda_{2m}^2-\Lambda_1\,, \qquad \mathbf{L}_{55}^{(1)km}=D_{12}\lambda_{1k}^2-D_2\lambda_{2m}^2-\Lambda_2\,,$$

$$\mathbf{L}_{12}^{(1)km}=-\left(B_1\nu_{12}+B_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m}\,, \qquad \mathbf{L}_{21}^{(1)km}=-\left(B_2\nu_{21}+B_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m}\,,$$

$$\mathbf{L}_{34}^{(1)km}=\mathbf{L}_{43}^{(1)km}=-\Lambda_1\lambda_{1k}\,, \qquad \mathbf{L}_{45}^{(1)km}=-\left(D_1\nu_{12}+D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m}\,,$$

$$\mathbf{L}_{54}^{(1)km}=-\left(D_2\nu_{21}+D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m}\,, \qquad \mathbf{L}_{35}^{(1)km}=\mathbf{L}_{53}^{(1)km}=-\Lambda_2\lambda_{2m}\,,$$

$$\mathbf{L}_{13}^{(1)km}=\left(k_1\Lambda_1+B_1k_1+B_1k_2\nu_{12}\right)\lambda_{1k}\,, \qquad \mathbf{L}_{31}^{(1)km}=\left(k_1\Lambda_1+B_1k_1+B_2k_2\nu_{21}\right)\lambda_{1k}\,,$$

$$\mathbf{L}_{23}^{(1)km}=\left(k_2\Lambda_2+B_2k_2+B_2k_2\nu_{21}\right)\lambda_{2m}\,, \qquad \mathbf{L}_{32}^{(1)km}=\left(k_2\Lambda_2+B_2k_2+B_1k_1\nu_{12}\right)\lambda_{2m}\,,$$

$$\mathbf{L}_{14}^{(1)km}=\mathbf{L}_{41}^{(1)km}=k_1\Lambda_1\,,\ \mathbf{L}_{25}^{(1)km}=\mathbf{L}_{52}^{(1)km}=k_2\Lambda_2\,,\ \mathbf{L}_{15}^{(1)km}=\mathbf{L}_{51}^{(1)km}=\mathbf{L}_{24}^{(1)km}=\mathbf{L}_{42}^{(1)km}=0\,,$$

$$\mathbf{L}_{11}^{(2)km}=-B_1\lambda_{1k}^2-B_{12}\lambda_{2m}^2-k_1^2\Lambda_1\,, \qquad \mathbf{L}_{22}^{(2)km}=-B_{12}\lambda_{1k}^2-B_2\lambda_{2m}^2-k_2^2\Lambda_2\,,$$

$$\mathbf{L}_{33}^{(2)km}=-\Lambda_1\lambda_{1k}^2-\Lambda_2\lambda_{2m}^2-\left[k_1B_1\left(k_1+\nu_{12}k_2\right)+k_2B_2\left(k_2+\nu_{21}k_1\right)\right]+2\rho h\omega_0^2\,,$$

$$\mathbf{L}_{44}^{(2)km}=-D_1\lambda_{1k}^2-D_{12}\lambda_{2m}^2-\Lambda_1\,, \qquad \mathbf{L}_{55}^{(2)km}=D_{12}\lambda_{1k}^2-D_2\lambda_{2m}^2-\Lambda_2\,,$$

$$\mathbf{L}_{12}^{(2)km}=\left(B_1\nu_{12}+B_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m}\,, \qquad \mathbf{L}_{21}^{(2)km}=\left(B_2\nu_{21}+B_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m}\,,$$

$$\mathbf{L}_{34}^{(2)km}=\mathbf{L}_{43}^{(2)km}=-\Lambda_1\lambda_{1k}\,, \qquad \mathbf{L}_{45}^{(2)km}=\left(D_1\nu_{12}+D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m}\,,$$

$$\mathbf{L}_{54}^{(2)km}=\left(D_2\nu_{21}+D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m}\,, \qquad \mathbf{L}_{35}^{(2)km}=\mathbf{L}_{53}^{(2)km}=\Lambda_2\lambda_{2m}\,,$$

$$\mathbf{L}_{13}^{(2)km}=\left(k_1\Lambda_1+B_1k_1+B_1k_2\nu_{12}\right)\lambda_{1k}\,, \qquad \mathbf{L}_{31}^{(2)km}=\left(k_1\Lambda_1+B_1k_1+B_2k_2\nu_{21}\right)\lambda_{1k}\,,$$

$$\mathbf{L}_{23}^{(2)km}=-\left(k_2\Lambda_2+B_2k_2+B_2k_2\nu_{21}\right)\lambda_{2m}\,, \quad \mathbf{L}_{32}^{(2)km}=-\left(k_2\Lambda_2+B_2k_2+B_1k_1\nu_{12}\right)\lambda_{2m}\,,$$

$$\mathbf{L}_{14}^{(2)km}=\mathbf{L}_{41}^{(2)km}=k_1\Lambda_1\,, \qquad \mathbf{L}_{25}^{(2)km}=\mathbf{L}_{52}^{(2)km}=k_2\Lambda_2\,,$$

$$\mathbf{L}_{15}^{(2)km}=\mathbf{L}_{51}^{(2)km}=\mathbf{L}_{24}^{(2)km}=\mathbf{L}_{42}^{(2)km}=0\,,$$

$$\Phi_{km}^{cs}=\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^r\right),\quad \Phi_{km}^{sc}=\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^r\right),\quad \Phi_{km}^{cc}=\Phi_{km}^{cc}\left(\alpha^r\right),\quad \Phi_{km}^{ss}=\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^r\right).$$

4. Зведення задачі до систем інтегральних рівнянь

Для побудови інтегральних рівнянь крайової задачі у разі задання на отворі оболонки розподілених переміщень розглянемо узагальнений контур $L = L^{(1)} \cup L^{(2)} \cup ... \cup L^{(N)}$ і такі функції на ньому

$$T(\xi) = \begin{cases} T^{(1)}(\xi),\ \xi \in L^{(1)}, \text{де } T^{(1)\mathrm{T}}(\xi) = \left\{T_1^{(1)},...,T_5^{(1)}\right\}, \\ .... \\ T^{(N)}(\xi),\ \xi \in L^{(N)},\ \text{де } T^{(2)\mathrm{T}}(\xi) = \left\{T_1^{(N)},...,T_5^{(N)}\right\}; \end{cases}$$

$$U_0(\alpha) = \begin{cases} \left\{u_{n0}^{(1)}(\alpha),\ u_{\tau 0}^{(1)}(\alpha),\ w_0^{(1)}(\alpha),\ \gamma_{n0}^{(1)}(\alpha),\ \gamma_{\tau 0}^{(1)}(\alpha)\ \right\}^{\mathrm{T}},\ \alpha \in L^{(1)}, \\ .... \\ \left\{u_{n0}^{(N)}(\alpha),\ u_{\tau 0}^{(N)}(\alpha),\ w_0^{(N)}(\alpha),\ \gamma_{n0}^{(N)}(\alpha),\ \gamma_{\tau 0}^{(N)}(\alpha)\ \right\}^{\mathrm{T}},\ \alpha \in L^{(N)}. \end{cases}$$

На основі знайденої функції Ґріна, граничних умов на отворах (2), фізичних співвідношень (6), виразів для нормальних і дотичних компонент переміщень і зусиль (7) отримано систему $5N$ інтегральних рівнянь

$$U_0(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) \Big\langle \left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(1)(U)}(\alpha)\right] \left[\mathbf{E}_{km}^{(1)}(\xi)\right] +$$

$$+ \left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(2)(U)}(\alpha)\right] \left[\mathbf{E}_{km}^{(2)}(\xi)\right] \Big\rangle \left\{T(\xi)\right\} dl(\xi), \tag{13}$$

$$\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(j)(U)}(\alpha)\right] = \begin{bmatrix} u_{1n}^{(j)}(\alpha) & u_{2n}^{(j)}(\alpha) & u_{3n}^{(j)}(\alpha) & u_{4n}^{(j)}(\alpha) & u_{5n}^{(j)}(\alpha) \\ u_{1\tau}^{(j)}(\alpha) & u_{2\tau}^{(j)}(\alpha) & u_{3\tau}^{(j)}(\alpha) & u_{4\tau}^{(j)}(\alpha) & u_{5\tau}^{(j)}(\alpha) \\ w_1^{(j)}(\alpha) & w_2^{(j)}(\alpha) & w_3^{(j)}(\alpha) & w_4^{(j)}(\alpha) & w_5^{(j)}(\alpha) \\ \gamma_{1n}^{(j)}(\alpha) & \gamma_{2n}^{(j)}(\alpha) & \gamma_{3n}^{(j)}(\alpha) & \gamma_{4n}^{(j)}(\alpha) & \gamma_{5n}^{(j)}(\alpha) \\ \gamma_{1\tau}^{(j)}(\alpha) & \gamma_{2\tau}^{(j)}(\alpha) & \gamma_{3\tau}^{(j)}(\alpha) & \gamma_{4\tau}^{(j)}(\alpha) & \gamma_{5\tau}^{(j)}(\alpha) \end{bmatrix}, \qquad j = 1, 2\,,$$

$$u_{jn}^{(1)}(\alpha) = n_1(\alpha) u_{1km}^{(1)j} \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + n_2(\alpha) u_{2km}^{(1)j} \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\,,$$

$$u_{1\tau}^{(1)}(\alpha) = \tau_1(\alpha) u_{1km}^{(1)j} \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + \tau_2(\alpha) u_{2km}^{(1)j} \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\,,$$

$$\gamma_{1n}^{(1)}(\alpha) = n_1(\alpha) \gamma_{1km}^{(1)j} \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + n_2(\alpha) \gamma_{2km}^{(1)j} \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\,,$$

$$\gamma_{j\tau}^{(1)}(\alpha) = \tau_1(\alpha) \gamma_{1km}^{(1)j} \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + \tau_2(\alpha) \gamma_{2km}^{(1)j} \Phi_{km}^{sc}\,,$$

$$w_j^{(1)}(\alpha) = w_{km}^{(1)j} \Phi_{km}^{ss}(\alpha)\,,$$

$$u_{jn}^{(2)}(\alpha) = n_1(\alpha) u_{1km}^{(2)j} \Phi_{km}^{cc}(\alpha) + n_2(\alpha) u_{2km}^{(2)j} \Phi_{km}^{ss}(\alpha)\,,$$

$$u_{1\tau}^{(2)}(\alpha) = \tau_1(\alpha) u_{1km}^{(2)j} \Phi_{km}^{cc}(\alpha) + \tau_2(\alpha) u_{2km}^{(2)j} \Phi_{km}^{ss}(\alpha)\,,$$

$$\gamma_{1n}^{(2)}(\alpha)=n_1(\alpha)\gamma_{1km}^{(2)j}\Phi_{km}^{cc}(\alpha)+n_2(\alpha)\gamma_{2km}^{(2)j}\Phi_{km}^{ss}(\alpha),$$
$$\gamma_{j\tau}^{(2)}(\alpha)=\tau_1(\alpha)\gamma_{1km}^{(2)j}\Phi_{km}^{cc}(\alpha)+\tau_2(\alpha)\gamma_{2km}^{(2)j}\Phi_{km}^{ss}(\alpha),$$
$$w_j^{(2)}(\alpha)=w_{km}^{(2)j}\Phi_{km}^{sc}(\alpha),\quad j=\overline{1,5}.$$

Аналогічно на основі знайденої функції Ґріна отримуємо систему інтегральних рівнянь у випадку, якщо на отворі задаються зусилля. Для цього вводимо в розгляд функцію на узагальненому контурі L

$$F_0(\alpha)=\begin{cases}\left\{N_{n0}^{(1)}(\alpha),\ N_{\tau0}^{(1)}(\alpha),\ Q_{n0}^{(1)}(\alpha),\ M_{n0}^{(1)}(\alpha),\ M_{\tau0}^{(1)}(\alpha)\right\}^{\mathrm{T}}, & \alpha\in L^{(1)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \left\{N_{n0}^{(N)}(\alpha),\ N_{\tau0}^{(N)}(\alpha),\ Q_{n0}^{(N)}(\alpha),\ M_{n0}^{(N)}(\alpha),\ M_{\tau0}^{(N)}(\alpha)\right\}^{\mathrm{T}}, & \alpha\in L^{(N)}.\end{cases}$$

Отримуємо систему $5N$ інтегральних рівнянь у вигляді

$$\left\{F_0(\alpha)\right\}=\frac{1}{2}\left\{T(\alpha)\right\}+\lim_{\varepsilon\to0}\int_L\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{km}(\varepsilon)\Big\langle\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(1)(P)}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(1)}(\xi)\right]+$$
$$+\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(2)(P)}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(2)}(\xi)\right]\Big\rangle\left\{T(\xi)\right\}dl(\xi),\qquad(14)$$

де

$$\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(j)(P)}(\alpha)\right]=\begin{bmatrix}N_{1n}^{(j)}(\alpha) & N_{2n}^{(j)}(\alpha) & N_{3n}^{(j)}(\alpha) & N_{4n}^{(j)}(\alpha) & N_{5n}^{(j)}(\alpha)\\ N_{1\tau}^{(j)}(\alpha) & N_{2\tau}^{(j)}(\alpha) & N_{3\tau}^{(j)}(\alpha) & N_{4\tau}^{(j)}(\alpha) & N_{5\tau}^{(j)}(\alpha)\\ Q_{1n}^{(j)}(\alpha) & Q_{2n}^{(j)}(\alpha) & Q_{3n}^{(j)}(\alpha) & Q_{4n}^{(j)}(\alpha) & Q_{5n}^{(j)}(\alpha)\\ M_{1n}^{(j)}(\alpha) & M_{2n}^{(j)}(\alpha) & M_{3n}^{(j)}(\alpha) & M_{4n}^{(j)}(\alpha) & M_{5n}^{(j)}(\alpha)\\ M_{1\tau}^{(j)}(\alpha) & M_{2\tau}^{(j)}(\alpha) & M_{3\tau}^{(j)}(\alpha) & M_{4\tau}^{(j)}(\alpha) & M_{5\tau}^{(j)}(\alpha)\end{bmatrix},\quad j=1,2,$$

$$N_{in}^{(1)}=B_1n_1^2\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left[-\lambda_{1k}u_{1km}^{(1)i}-\nu_{12}\lambda_{2m}u_{2km}^{(1)i}+\left(k_1+\nu_{12}k_2\right)w_{km}^{(1)i}\right]+$$
$$+2B_{12}n_1n_2\Phi_{km}^{cc}(\alpha)\left(\lambda_{2m}u_{1km}^{(1)i}+\lambda_{1k}u_{2km}^{(1)i}\right)+$$
$$+B_2n_2^2\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left[-\lambda_{2m}u_{2km}^{(1)i}-\nu_{21}\lambda_{1k}u_{1km}^{(1)i}+\left(k_2+\nu_{21}k_1\right)w_{km}^{(1)i}\right],$$
$$N_{i\tau}^{(1)}=B_1n_1\tau_1\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left[-\lambda_{1k}u_{1km}^{(1)i}-\nu_{12}\lambda_{2m}u_{2km}^{(1)i}+\left(k_1+\nu_{12}k_2\right)w_{km}^{(1)i}\right]+$$
$$+B_{12}\left(n_1\tau_2+n_2\tau_1\right)\Phi_{km}^{cc}(\alpha)\left(\lambda_{2m}u_{1km}^{(1)i}+\lambda_{1k}u_{2km}^{(1)i}\right)+$$
$$+B_2n_2\tau_2\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left[-\lambda_{2m}u_{2km}^{(1)i}-\nu_{21}\lambda_{1k}u_{1km}^{(1)i}+\left(k_2+\nu_{21}k_1\right)w_{km}^{(1)i}\right],$$

$$M_{in}^{(1)} = D_1 n_1^2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left(-\lambda_{1k}\gamma_{1km}^{(1)i} - \nu_{12}\lambda_{2m}\gamma_{2km}^{(1)i}\right) + 2D_{12}n_1 n_2 \Phi_{km}^{cc}(\alpha)\times$$

$$\times\left(\lambda_{2m}\gamma_{1km}^{(1)i} + \lambda_{1k}\gamma_{2km}^{(1)i}\right) + D_2 n_2^2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left(-\lambda_{2m}\gamma_{2km}^{(1)i} - \nu_{21}\lambda_{1k}\gamma_{1km}^{(1)i}\right),$$

$$M_{i\tau}^{(1)} = D_1 n_1 \tau_1 \Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left(-\lambda_{1k}\gamma_{1km}^{(1)i} - \nu_{12}\lambda_{2m}\gamma_{2km}^{(1)i}\right) + D_{12}\left(n_1\tau_2 + n_2\tau_1\right)\Phi_{km}^{cc}(\alpha)\times$$

$$\times\left(\lambda_{2m}\gamma_{1km}^{(1)i} + \lambda_{1k}\gamma_{2km}^{(1)i}\right) + D_2 n_2 \tau_2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left(-\lambda_{2m}\gamma_{2km}^{(1)i} - \nu_{21}\lambda_{1k}\gamma_{1km}^{(1)i}\right),$$

$$Q_{in}^{(1)} = \Lambda_1 n_1 \Phi_{km}^{cs}(\alpha)\left(\gamma_{1km}^{(1)i} + \lambda_{1k}w_{km}^{(1)i} - k_1 u_{1km}^{(1)i}\right) +$$

$$+\Lambda_2 n_2 \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left(\gamma_{2km}^{(1)i} + \lambda_{2m}w_{km}^{(1)i} - k_2 u_{2km}^{(1)i}\right);$$

$$N_{in}^{(2)} = B_1 n_1^2 \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left[-\lambda_{1k}u_{1km}^{(2)i} + \nu_{12}\lambda_{2m}u_{2km}^{(2)i} + \left(k_1 + \nu_{12}k_2\right)w_{km}^{(2)i}\right] +$$

$$+2B_{12}n_1 n_2 \Phi_{km}^{cs}(\alpha)\left(-\lambda_{2m}u_{1km}^{(2)i} + \lambda_{1k}u_{2km}^{(2)i}\right) +$$

$$+B_2 n_2^2 \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left[\lambda_{2m}u_{2km}^{(2)i} + \nu_{21}\lambda_{1k}u_{1km}^{(2)i} + \left(k_2 + \nu_{21}k_1\right)w_{km}^{(2)i}\right],$$

$$N_{i\tau}^{(2)} = B_1 n_1 \tau_1 \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left[-\lambda_{1k}u_{1km}^{(2)i} + \nu_{12}\lambda_{2m}u_{2km}^{(2)i} + \left(k_1 + \nu_{12}k_2\right)w_{km}^{(2)i}\right] +$$

$$+B_{12}\left(n_1\tau_2 + n_2\tau_1\right)\Phi_{km}^{cs}(\alpha)\left(-\lambda_{2m}u_{1km}^{(2)i} + \lambda_{1k}u_{2km}^{(2)i}\right) +$$

$$+B_2 n_2 \tau_2 \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left[\lambda_{2m}u_{2km}^{(2)i} - \nu_{21}\lambda_{1k}u_{1km}^{(2)i} + \left(k_2 + \nu_{21}k_1\right)w_{km}^{(2)i}\right],$$

$$M_{in}^{(2)} = D_1 n_1^2 \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left(-\lambda_{1k}\gamma_{1km}^{(2)i} + \nu_{12}\lambda_{2m}\gamma_{2km}^{(2)i}\right) + D_2 n_2^2 \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\times$$

$$\times\left(\lambda_{2m}\gamma_{2km}^{(2)i} - \nu_{21}\lambda_{1k}\gamma_{1km}^{(2)i}\right) + 2D_{12}n_1 n_2 \Phi_{km}^{cs}(\alpha)\left(-\lambda_{2m}\gamma_{1km}^{(2)i} + \lambda_{1k}\gamma_{2km}^{(2)i}\right),$$

$$M_{i\tau}^{(2)} = D_1 n_1 \tau_1 \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left(-\lambda_{1k}\gamma_{1km}^{(2)i} + \nu_{12}\lambda_{2m}\gamma_{2km}^{(2)i}\right) + D_2 n_2 \tau_2 \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\times$$

$$\times\left(\lambda_{2m}\gamma_{2km}^{(2)i} - \nu_{21}\lambda_{1k}\gamma_{1km}^{(2)i}\right) + D_{12}\left(n_1\tau_2 + n_2\tau_1\right)\Phi_{km}^{cs}(\alpha)\left(-\lambda_{2m}\gamma_{1km}^{(2)i} + \lambda_{1k}\gamma_{2km}^{(2)i}\right),$$

$$Q_{in}^{(2)} = \Lambda_1 n_1 \Phi_{km}^{cc}(\alpha)\left(\gamma_{1km}^{(2)i} + \lambda_{1k}w_{km}^{(2)i} - k_1 u_{1km}^{(2)i}\right) +$$

$$+\Lambda_2 n_2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left(\gamma_{2km}^{(2)i} - \lambda_{2m}w_{km}^{(2)i} - k_2 u_{2km}^{(2)i}\right).$$

Для знаходження розв’язку систем інтегральних рівнянь використаємо метод колокацій. Для цього контури узагальненої кривої L замінюємо ламаними ($S^{(j)}$ — кількість відрізків розбиття j-ого контуру, $\alpha^{(j)r}$ — середини відрізків розбиття j-ого контуру, $r = \overline{1, S^{(j)}}$). На кожному з прямолінійних відрізків контурів задаємо такий розподіл фіктивних зусиль $T^{(j)r}(\xi) = T^{(j)r}\delta\left(\alpha^{(j)r}, \xi\right)$ та мінімізуємо нев’язку в контрольних точках колокацій α^q.

Звідси система, що відповідає системі інтегральних рівнянь (13), міститиме $5\sum_{j=1}^{N} S^{(j)}$ лінійних алгебраїчних рівнянь і матиме такий вигляд

$$\left\{U_0\left(\alpha^q\right)\right\} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon)\Big\langle\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(1)(U)}\left(\alpha^q\right)\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\right]+$$
$$+\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(2)(U)}\left(\alpha^q\right)\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\right]\Big\rangle\left\{T^{(j)r}\right\}, \qquad q=\overline{1,\sum_{j=1}^{N} S^{(j)}}\,.$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь, що відповідає системі інтегральних рівнянь (14), буде така

$$\left\{F_0\left(\alpha^q\right)\right\} = \frac{1}{2}\left\{T\left(\alpha^q\right)\right\} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon)\Big\langle\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(1)(P)}\left(\alpha^q\right)\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\right]+$$
$$+\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(2)(P)}\left(\alpha^q\right)\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\right]\Big\rangle\left\{T^{(j)r}\right\}, \qquad q=\overline{1,\sum_{j=1}^{N} S^{(j)}}\,.$$

Власні частоти знаходимо з умови існування нетривіального розв’язку відповідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, прирівнюючи визначник системи до нуля. Характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напрямку з нормаллю $\mathbf{n}(\alpha)=\left(n_1(\alpha),n_2(\alpha)\right)$ та дотичною $\boldsymbol{\tau}(\alpha)=\left(\tau_1(\alpha),\tau_2(\alpha)\right)$ на основі знайдених дискретних значень фіктивних зусиль на контурі отвору отримуємо з таких виразів

$$\begin{Bmatrix} u_n(\alpha,t)\\ u_\tau(\alpha,t)\\ w\ (\alpha,t)\\ \gamma_n(\alpha,t)\\ \gamma_\tau(\alpha,t)\end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon)\Big\langle\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(1)(U)}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\right]+$$
$$+\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(2)(U)}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\right]\Big\rangle\left\{T^{(j)r}\right\}\sin\left(\omega_0 t\right), \qquad \alpha^r\in L\,;$$

$$\begin{Bmatrix} N_n(\alpha,t)\\ N_\tau(\alpha,t)\\ Q_n(\alpha,t)\\ M_n(\alpha,t)\\ M_\tau(\alpha,t)\end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon)\Big\langle\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(1)(P)}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\right]+$$
$$+\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(2)(P)}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\right]\Big\rangle\left\{T^{(j)r}\right\}\sin\left(\omega_0 t\right), \qquad \alpha^r\in L\,.$$

Висновки.

1. У межах знайденого розв'язку можна розглядати випадки, якщо контур отвору містить кутові точки та вироджується в тріщину, оскільки на етапі числового розв'язування методом колокацій проводиться дискретизація його контуру.

2. Комбінуючи відповідні отримані в роботі інтегральні рівняння, можна розглядати випадки різних типів крайових умов на довільних контурах, а також будь-які випадки мішаних крайових умов у межах одного контуру.

3. Під час розрахунку оболонок з отворами вищеописаним методом важливими є дослідження збіжності й оптимального вибору параметрів апроксимації функцій $S^{(j)}, K, M, \varepsilon$. Слід зазначити, що деякою мірою ці питання висвітлені у працях [9-11]. Однак для реальних розрахунків із бажаною точністю необхідно для конкретного випадку проводити дослідження збіжності й оптимізації вибору параметрів апроксимації функцій, оскільки для складної конфігурації отворів і яскраво вираженої ортотропії матеріалу розв'язки будуть чутливіші.

Література

[1] *Poore, A. L.* Free vibration of laminated cylindrical shells with a circular cutout / *A. L. Poore, A. Barut, E. Madenci* // J. Sound Vib. — 2008. — Vol. 312. — P. 55-73.

[2] *Toda, S.* Vibrations of circular cylindrical shells with cutouts/ *S. Toda, K. Komatsu* // J. Sound Vib. — 1977. — Vol. 52, No 4. — P. 497-510.

[3] *Ramamurti, V.* Dynamic behavior of a cylindrical shell with a cutout / *V. Ramamurti, J. Pattabiraman* // J. Sound Vib. — 1977. — Vol. 52, No 2. — P. 193-200.

[4] *Mahabaliraja*, Vibration of stiffened cylinders with cutouts / *Mahabaliraja, D. E. Boyd* // J. Sound Vib. — 1977. — Vol. 52, No 1. — P. 65-78.

[5] *Sivasubramonian, B.* Free vibration of longitudinally stiffened curved panels with cutout / *B. Sivasubramonian, G. V. Rao, A. Krishnan* // J. Sound Vib. — 1999. — Vol. 226, No 1, 9. — P. 41-55.

[6] *Шопа, Т.* Дослідження частот власних коливань трансверсально-ізотропної циліндричної панелі з круговим отвором / *Т. Шопа* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2009. — Т. 52, № 2. — С. 128-137.

[7] *Сухорольський, М.* Поперечні коливання трансверсально-ізотропної циліндричної оболонки з круговим отвором / *М. Сухорольський, Т. Шопа* // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2008. — Вип. 8. — С. 162-172.

[8] *Бурак, Я. Й.* Усталені коливання трансверсально-ізотропної циліндричної оболонки з масивним включенням / *Я. Й. Бурак, М. А. Сухорольський, Т. В. Шопа* // Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій: тези доповідей Міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського. — Дніпропетровськ: ДНУ, 2007. — С. 241-243.

[9] *Сухорольський, М. А.* Функціональні послідовності та ряди / *А. М. Сухорольський*. — Львів: Растр-7, 2010. — 344 с.

[10] Рівняння математичної фізики. Узагальнені розв'язки крайових задач / *Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, А. М. Сухорольський* та ін. — Львів: Видавництво НУ «ЛП», 2002. — 235 с.

[11] *Бурак, Я. Й.* Аналітична механіка локально навантажених оболонок / *Я. Й. Бурак, Ю. К. Рудавський, М. А. Сухорольський.* — Львів: Інтелект-Захід, 2007. — 239 с.

Vibration of the orthotropic cylindrical shell with the cutouts of the arbitrary configuration. Part I. Construction of the solution

Tetiana Shopa

In the framework of the shell theory that takes into consideration the shear displacements the problem on the steady state flexure vibration of a simply supported orthotropic cylindrical shell with the cutouts of the arbitrary form and different types of boundary conditions on their contours is considered. Solution is built on the base of the indirect boundary element method and the sequential approach to the construction of the Green function. The problem is reduced to the systems of linear algebraic equations.

Колебания ортотропной цилиндрической оболочки с отверстиями произвольной конфигурации. Часть I. Построение решения

Татьяна Шопа

В работе рассмотрена задача об установившихся поперечных колебаниях шарнирно закрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с отверстиями произвольной формы и граничными условиями различного типа на их контурах. Использована теория оболочек, которая учитывает поперечные сдвиги. Решение базируется на непрямом методе граничных элементов и секвенциальном подходе к построению функции Грина. Задача сведена к системам линейных алгебраических уравнений.

Представлено професором М. Сухорольським

Отримано 11.10.10