

## Реакція багат шарового півпростору з початковими напруженнями на рухоме навантаження. Нестисливий матеріал

Юрій Глухов

К. ф.-м. н., Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, вул. Нестерова, 3, Київ 57, 03057,  
e-mail: gluchov.uriy@gmail.com

*Досліджено вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь, що відповідають рівнянням руху нестисливих елементів шаруватого півпростору. Проведено оцінку коренів характеристичних рівнянь. Чисельні дослідження наведені для матеріалу з пружним потенціалом типу Бартенєва-Хазановича. Проілюстровано вплив початкових напружень і швидкості руху навантаження на дискримінант характеристичного рівняння.*

**Ключові слова:** багат шаровий півпростір, початкові (залишкові) напруження, рухоме навантаження, характеристичне рівняння.

**Вступ.** Під час розв'язування просторових задач про усталений рух багат шарового попередньо напруженого півпростору за дії рухомого навантаження з використанням інтегрального перетворення Фур'є подання розв'язку залежить від коренів характеристичних рівнянь трансформованих диференціальних рівнянь, що описують рух елементів багат шарового середовища [1-4].

У цій статті у межах лінеаризованої теорії пружності для тіл із початковими напруженнями [5] досліджено вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь для нестисливих елементів шаруватого півпростору. Аналогічну задачу для стисливих елементів шаруватого середовища розглядали у праці [6].

### 1. Аналітичні дослідження характеристичного рівняння

У випадку однорідного початкового напруженого стану

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3, \quad S_0^{11} \neq S_0^{22} \neq S_0^{33} \quad (1)$$

характеристичні рівняння мають вигляд [7]

$$\eta^6 + b_1 \eta^4 + b_2 \eta^2 + b_3 = 0. \quad (2)$$

Якщо матеріал шару є нестисливий, то коефіцієнти рівняння (2) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
b_1 &= q_3^{-2} c_{31}^{-2} c_{32}^{-2} \left\{ k_1^2 \left[ q_3^2 v^2 \cos^2 \varphi (c_{31}^2 + c_{32}^2) - q_3^2 c_{31}^2 c_{12}^2 - c_{32}^2 d_{13} \right] - k_2^2 (q_3^2 c_{21}^2 c_{32}^2 + c_{31}^2 d_{23}) \right\}, \\
b_2 &= q_3^{-2} c_{31}^{-2} c_{32}^{-2} \left\{ k_1^4 \left[ q_1^2 c_{12}^2 c_{23}^2 + c_{13}^2 d_{12} - v^2 \cos^2 \varphi (q_1^2 c_{23}^2 + q_2^2 c_{13}^2 + d_{12}) \right] + \right. \\
&+ k_1^2 k_2^2 q_3^2 v^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + k_2^4 (q_2^2 c_{31}^2 c_{23}^2 + c_{21}^2 d_{23}) - v^2 \sin^2 \varphi (q_1^2 c_{32}^2 + q_3^2 c_{12}^2 + d_{13}) + \\
&+ q_1^2 c_{32}^2 c_{23}^2 - v^2 \cos^2 \varphi (q_2^2 c_{31}^2 + q_3^2 c_{21}^2 + d_{23}) + q_2^2 c_{31}^2 c_{13}^2 + q_3^2 c_{21}^2 c_{12}^2 + d_{13} \left. \right\}, \\
b_3 &= q_3^{-2} c_{31}^{-2} c_{32}^{-2} \left\{ k_1^6 \left[ q_1^2 v^2 \cos^2 \varphi (c_{12}^2 + c_{13}^2) - q_1^6 v^4 \cos^4 \varphi - q_1^2 c_{12}^2 c_{13}^2 \right] + \right. \\
&+ k_2^6 \left[ q_2^2 v^2 \sin^2 \varphi (c_{21}^2 + c_{23}^2) - q_2^2 v^4 \sin^4 \varphi - q_2^2 c_{21}^2 c_{23}^2 \right] + k_1^2 k_2^4 (q_2^2 c_{21}^2 c_{13}^2 + \\
&+ c_{23}^2 d_{12}) + k_1^4 k_2^2 \left[ q_1^2 c_{12}^2 c_{23}^2 + c_{13}^2 d_{12} - (q_1^2 c_{23}^2 + q_2^2 c_{13}^2 + d_{12}) v^2 \cos^2 \varphi \right] \left. \right\}, \quad (3)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho} c_{ij}^2 &= \tilde{\kappa}_{ijji}, \quad \tilde{\rho} d_{ij} = q_i^2 \tilde{\kappa}_{jjij} + q_j^2 \tilde{\kappa}_{iiii} - 2q_i q_j (\tilde{\kappa}_{ijij} + \tilde{\kappa}_{ijji}), \\
\tilde{\rho}^2 d &= 2q_1 q_3 \left[ (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}) (\tilde{\kappa}_{2233} + \tilde{\kappa}_{2323}) - \tilde{\kappa}_{2222} (\tilde{\kappa}_{1313} + \tilde{\kappa}_{1133}) \right] + \\
&+ 2q_2 q_3 \left[ (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}) (\tilde{\kappa}_{1313} + \tilde{\kappa}_{1133}) - \tilde{\kappa}_{1111} (\tilde{\kappa}_{2233} + \tilde{\kappa}_{2323}) \right] + \\
&+ 2q_1 q_2 \left[ (\tilde{\kappa}_{2233} + \tilde{\kappa}_{2323}) (\tilde{\kappa}_{1313} + \tilde{\kappa}_{1133}) - \tilde{\kappa}_{3333} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}) \right] + \\
&+ q_1^2 \left[ \tilde{\kappa}_{2222} \tilde{\kappa}_{3333} - (\tilde{\kappa}_{2233} + \tilde{\kappa}_{2323})^2 \right] + q_2^2 \left[ \tilde{\kappa}_{1111} \tilde{\kappa}_{3333} - \right. \\
&\left. - (\tilde{\kappa}_{1313} + \tilde{\kappa}_{1133})^2 \right] + q_3^2 \left[ \tilde{\kappa}_{1111} \tilde{\kappa}_{2222} - (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212})^2 \right],
\end{aligned}$$

$k_1, k_2$  — параметри подвійного перетворення Фур'є,  $v$  — швидкість руху поверхневого навантаження,  $\varphi$  — кут, який утворює траєкторія руху навантаження з позитивним напрямом осі абсцис (навантаження рухається прямолінійно з постійною швидкістю),  $\tilde{\rho}$  — густина відповідного елемента багатшарового середовища в природному стані. Формули для обчислення компонентів тензора  $\tilde{\kappa}$  для різних варіантів теорій кінцевих і малих початкових деформацій наведені в [5].

Оскільки рівняння (2) — бікубічне алгебраїчне рівняння, то його розв'язок можна отримати класичним способом. Виконаємо в рівнянні (2) заміну

$$\eta^2 = \mu^2 - \frac{b_1}{3}. \quad (4)$$

З урахуванням (4) рівняння (2) набуває вигляду

$$\mu^6 + p\mu^2 + q = 0, \quad (5)$$

де

$$p = b_2 - \frac{b_1^2}{3}, \quad q = \frac{2b_1^3}{27} - \frac{b_1 b_2}{3} + b_3.$$

Якщо дискримінант  $\Delta = q^2/4 + p^3/27 = 0$ , то рівняння (5) для  $p \neq 0$ ,  $q \neq 0$  має один простий і двократний корені

$$\mu_1^2 = \frac{3q}{p}, \quad \mu_{2,3}^2 = -\frac{3q}{2p}. \quad (6)$$

Якщо  $\Delta \neq 0$ , то рівняння (5) має три різні корені. Для  $\Delta > 0$  рівняння (5) має один дійсний і два комплексні корені

$$\mu_1^2 = u_0 + v_0, \quad \mu_{2,3}^2 = -\frac{u_0 + v_0}{2} \pm i \frac{(u_0 - v_0)\sqrt{3}}{2}. \quad (7)$$

Тут

$$u_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}, \quad v_0 = -\frac{p}{3u_0}.$$

Для  $\Delta < 0$  всі три корені рівняння (5) будуть дійсні та різні

$$\mu_1^2 = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad \mu_2^2 = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3}, \quad \mu_3^2 = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3}, \quad (8)$$

де

$$\sqrt[3]{r} = \sqrt{\left| -\frac{p}{3} \right|}, \quad \cos \varphi = -\frac{q}{2r}.$$

Якщо  $\Delta = 0$  і величини  $p \neq 0$ ,  $q \neq 0$  мають різні знаки, то рівняння (2) має два дійсні двократні та два чисто уявні корені. Якщо  $p \neq 0$ ,  $q \neq 0$  є величинами однакового знаку, то рівняння (2) має два дійсні та два двократні чисто уявні корені.

Для  $\Delta > 0$ , якщо  $\mu_1^2 > 0$ , то рівняння (2) має два дійсні та чотири комплексні корені, якщо  $\mu_1^2 < 0$  — то шість комплексних коренів.

Якщо  $\Delta < 0$ , то рівняння (2) має шість різних коренів. Дійсні корені будуть відповідати невід'ємним значенням коренів рівняння (5) і визначатися знаком тригонометричної функції у виразах (8).

## 2. Результати чисельних досліджень

Оскільки вирази (3) для коефіцієнтів рівняння (2) доволі громіздкі, то аналітичне дослідження коренів характеристичного рівняння є складне. Чисельні дослідження були проведені для нестисливого матеріалу з пружним потенціалом типу Бартењева-Хазановича

$$\Phi = 2\mu s_1, \quad (9)$$

де  $\mu$  — модуль зсуву, а величина  $s_1$  — перший інваріант тензора деформацій лінійної теорії пружності, віднесений до головних осей

$$s_1 = (\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1) + (\lambda_3 - 1).$$

Для теорії скінченних (великих) початкових деформацій вирази для визначення компонентів тензора  $\tilde{\kappa}$  за умови (1) мають вигляд

$$\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} = \lambda_i \lambda_j \lambda_\alpha \lambda_\beta \left[ \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij}) (\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}) \mu_{ij} + \lambda_j^{-1} \lambda_\alpha^{-1} \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha} S_0^{\beta\beta} \right], \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} A_{i\beta} &= -2\delta_{i\beta} \lambda_\beta^{-4} (\mu \lambda_\beta + p^o), \\ \mu_{ij} &= -\left[ 2\mu \lambda_i \lambda_j + p^o (\lambda_i + \lambda_j) \right] \lambda_i^{-2} \lambda_j^{-2} (\lambda_i + \lambda_j)^{-1}, \\ S_0^{\beta\beta} &= (2\mu \lambda_\beta + p^o) \lambda_\beta^{-2}, \quad q_j = \lambda_j^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Прийmemo, що початкове поверхневе навантаження відсутнє, тобто  $S_0^{33} = 0$ , і врахуємо, що  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ . Тоді з третьої формули системи (11) маємо

$$p^o = -2\mu \lambda_3 = -2\mu \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1}. \quad (12)$$

Використовуючи формули (10)-(12), для компонентів тензора  $\tilde{\kappa}$  отримаємо такі вирази

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{1111} &= \tilde{\kappa}_{2222} = \tilde{\kappa}_{3333} = 2\mu \lambda_1^{-2}, \quad \tilde{\kappa}_{1122} = \tilde{\kappa}_{1133} = \tilde{\kappa}_{2211} = \tilde{\kappa}_{2233} = \tilde{\kappa}_{3311} = \tilde{\kappa}_{3322} = 0, \\ \tilde{\kappa}_{1212} &= \tilde{\kappa}_{2121} = 2\mu \frac{\lambda_1 + \lambda_2 (1 - \lambda_1^3)}{\lambda_1^2 (\lambda_1 + \lambda_2)}, \quad \tilde{\kappa}_{1313} = \tilde{\kappa}_{3131} = 2\mu \frac{1 + \lambda_1^2 (\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 \lambda_2 + 1)}, \\ \tilde{\kappa}_{2323} &= \tilde{\kappa}_{3232} = 2\mu \frac{1 + \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1^2 (\lambda_1 \lambda_2^2 + 1)}, \quad \tilde{\kappa}_{1221} = \frac{2\mu \lambda_1^2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \tilde{\kappa}_{2112} = \frac{2\mu \lambda_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \\ \tilde{\kappa}_{1331} &= \frac{2\mu \lambda_1^3 \lambda_2}{\lambda_1^2 \lambda_2 + 1}, \quad \tilde{\kappa}_{3113} = \frac{2\mu}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 \lambda_2 + 1)}, \quad \tilde{\kappa}_{2332} = \frac{2\mu \lambda_1 \lambda_2^3}{\lambda_2^2 \lambda_1 + 1}, \quad \tilde{\kappa}_{3223} = \frac{2\mu}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2^2 \lambda_1 + 1)}. \end{aligned}$$

Пронормуємо всі параметри за величиною  $c_s = \mu/\tilde{\rho}$ . Чисельні розрахунки проводилися для  $\varphi = 0$  і  $v = 0, 1, c_s$ . Початкові видовження змінювалися в діапазоні від 0,8 до 1,2. Метою дослідження була оцінка можливих значень коренів характеристичного рівняння (2) та впливу початкових деформацій і швидкості руху поверхневого навантаження на ці значення.

На рис. 1, 2 наведені графіки функцій  $p, q$  та  $\Delta$  для фіксованих значень параметрів  $\lambda_i (i = 1, 3), v$  та  $\varphi$ .

Аналіз числових значень функцій  $p, q$  та  $\Delta$  дозволяє стверджувати, що в області, яка досліджується, ці функції можуть набувати як від'ємних, так і додатних значень, тобто корені рівнянь (5) і відповідно (2) можуть бути як дійсні, так і комплексні.

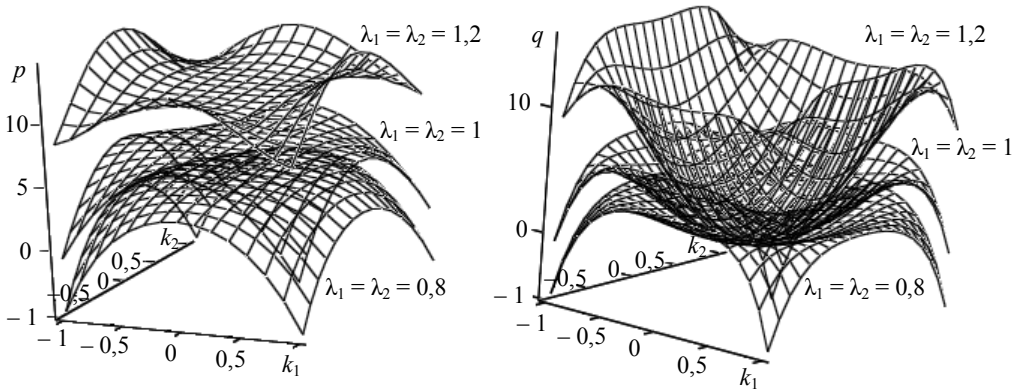


Рис. 1. Графіки функцій  $p$  та  $q$  ( $\varphi = 0, v = 0,1 c_s$ )

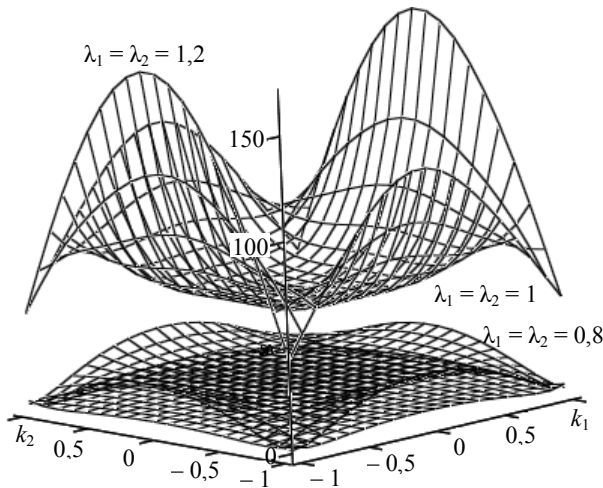


Рис. 2. Графіки функції  $\Delta$  ( $\varphi = 0, v = 0,1 c_s$ )

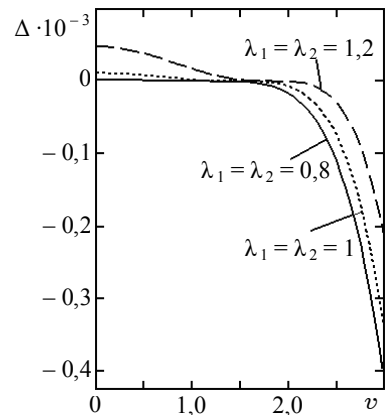


Рис. 3. Залежність дискримінанта характеристичного рівняння від швидкості руху навантаження

Криві на рис. 3 ілюструють вплив швидкості руху навантаження на значення дискримінанта рівняння (5). Як видно з рис. 3, початкові напруження і швидкість руху навантаження суттєво впливають на значення функції  $\Delta$ . Очевидно, що за певної швидкості руху навантаження вплив початкових напружень зменшується.

**Висновки.** Оцінено можливі значення коренів характеристичних рівнянь. Для конкретного типу нестисливого матеріалу (із пружним потенціалом типу Бартенєва-Хазановича) проведені чисельні розрахунки. Отримані результати можна використати під час дослідження напружено-деформованого стану елементів багаточастинкового попередньо напруженого півпростору за дії рухомого навантаження.

## Література

- [1] *Бабич, С. Ю.* Об одной динамической задаче для слоистого сжимаемого полупространства с начальными напряжениями / *С. Ю. Бабич, Ю. П. Глухов, А. Н. Гузь* // Прикл. механика. — 2008. — Т. 44, № 3. — С. 36-54.
- [2] *Бабич, С. Ю.* Динамика слоистого несжимаемого полупространства с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки / *С. Ю. Бабич, Ю. П. Глухов, А. Н. Гузь* // Прикл. механика. — 2008. — Т. 44, № 4. — С. 35-55.
- [3] *Гузь, А. Н.* Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями / *А. Н. Гузь, С. Ю. Бабич, Ю. П. Глухов.* — Кременчуг: «Кременчуг», 2007. — 795 с.
- [4] *Эмироглу, И.* Задача Лэмба для полупространства, покрытого слоем, подвергнутому предварительному двухосному растяжению / *И. Эмироглу, Ф. Таши, С. Д. Акбаров* // Мех. композит. матер. — 2004. — Т. 40, № 3. — С. 355-368.
- [5] *Гузь, А. Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями / *А. Н. Гузь.* — Киев: «А. С. К», 2004. — 672 с.
- [6] *Глухов, Ю. П.* Представление решения задачи о реакции многослойного полупространства с начальными напряжениями на подвижную нагрузку. Сжимаемый материал / *Ю. П. Глухов* // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. — Дніпропетровськ, 2009. — Вип. 3(62). — С. 105-110.
- [7] *Глухов, Ю. П.* Динамика многослойного предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки / *Ю. П. Глухов* // Доповіді НАН України. — 2010. — № 2. — С. 53-58.

## Reaction of multi-layered semispace with the initial stresses on the moving load. Incompressible material

Yuriy Glukhov

*The influence of initial stresses and speed of surface load on the values of the characteristic roots of equations, which correspond to the equations of motion of incompressible elements of layered semispace is studied. The assessment of possible values of the roots of characteristic equations was estimated. Numerical researches are carried out for the material with an elastic potential of the type of Bartenev-Khazanovich. The influence of initial stresses and speed of load on the discriminant of the characteristic equation is illustrated.*

## Реакция многослойного полупространства с начальными напряжениями на подвижную нагрузку. Несжимаемый материал

Юрий Глухов

*Исследовано влияние начальных напряжений и скорости движения поверхностной нагрузки на значение корней характеристических уравнений, соответствующих уравнениям движения несжимаемых элементов слоистого полупространства. Проведена оценка возможных значений корней характеристических уравнений. Для материала с упругим потенциалом типа Бартенева-Хазановича проведены численные исследования. Проиллюстрировано влияние начальных напряжений и скорости движения нагрузки на дискриминант характеристического уравнения.*

Представлено професором Я. Савулою

Отримано 22.02.11