

## **Схема методу граничних елементів для моделі жорсткого сферичного включення у полі пружної гармонічної хвилі**

Іван Дияк<sup>1</sup>, Орест Михаськів<sup>2</sup>

<sup>1</sup> к. ф.-м. н., Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів,  
e-mail: dyyak@lnu.edu.ua

<sup>2</sup> Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів,  
e-mail: orestmykhaskiv@gmail.com

*Запропоновано алгоритм прямого методу граничних елементів (ПМГЕ) для задач дифракції тривимірних пружних гармонічних хвиль на сферичному жорсткому масивному включенні, коливання якого у безмежній матриці описується поступальним переміщенням. Задачі зведені до системи граничних інтегральних рівнянь відносно контактних зусиль на межі «матриця–включення». Розроблено алгоритм регуляризації та дискретизації рівнянь на рівномірній сітці чотирикутних граничних елементів, побудованій шляхом центральних проєкцій. Результати обчислень стосуються переміщення включення як жорсткого цілого та розподілів контактних зусиль на його поверхні залежно від частоти падаючої плоскої поздовжньої хвилі. Отримані числові розв'язки співставлено з відомими аналітичними, отриманими за припущення осьової симетрії задачі.*

**Ключові слова:** тривимірна пружна матриця, жорстке сферичне включення, пружна гармонічна хвиля, прямий метод граничних елементів.

**Вступ.** Широке застосування у сучасній інженерній практиці пружних композитних матеріалів із макро-, мікро- та нанорозмірними включеннями зумовлює дослідження їх деформування за ускладнених умов, що передбачають динамічні збурення структури та виникнення хвильових полів. Визначення динамічних властивостей таких структур шляхом їх гомогенізації [1, 2] ґрунтується на розв'язках задач поширення хвиль у матриці з поодиноким включенням-наповнювачем. Останні мають також окреме значення для опису локальної концентрації динамічних напружень у композиті (за нехтування взаємодією віддалених включень) і для діагностування неоднорідностей ультразвуковими методами. Особливо актуальним є розгляд дифракції пружних хвиль на включенні з великою щодо матричної жорсткістю, як найбільш розповсюдженому армувальному елементі.

Придатність до аналізу безмежних матриць, включень довільної форми, визначення розрахункових рівнянь на поверхні включення забезпечили ефективне використання ПМГЕ під час розв'язування вказаних динамічних задач, зокрема у частотній області. Цим методом проаналізовано поширення пружних гармонічних хвиль у безмежній матриці з пружним включенням шляхом розгляду системи граничних інтегральних рівнянь відносно контактних переміщень і напружень на поверхні включення [3, 4]. Однак внаслідок різного порядку осциляції ядер

рівнянь, викликаного відмінністю хвильових чисел матеріалів матриці та включення, достовірні результати вдалось отримати у випадках незначного контрасту пружних модулів компонент системи. Поширити результати на сильно контрастні матеріали вдається з використанням моделі абсолютно жорсткого включення у полі гармонічних пружних хвиль. Тоді поряд із механічним ефектом досягається також пониження розмірності результуючої системи граничних інтегральних рівнянь шляхом виключення з них контактних переміщень через неявне врахування руху включення як жорсткого цілого. Модель абсолютно жорсткого включення вводилася подібно у схему МГЕ у тривимірних задачах статички композитів [5, 6]. Нижче тривимірні формулювання ПМГЕ застосовано для дослідження дифракції пружної гармонічної хвилі на сферичному жорсткому рухомому включенні. Дискретний аналог задачі у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь сконструйовано методом колокацій для регуляризованих граничних інтегральних рівнянь у вузлових точках сформованої центральними проєкціями сітки граничних елементів. Відзначимо, що розв'язки такої задачі в осесиметричному формулюванні, побудовані у вигляді безмежних рядів, наведено у роботах [7, 8].

## 1. Гранично-інтегральне формулювання задачі

Нехай у безмежній ізотропній пружній матриці, яка характеризується густиною  $\rho$ , коефіцієнтом Пуассона  $\nu$  та модулем зсуву  $G$ , міститься абсолютно жорстке сферичне включення з гладкою поверхнею  $S$ , радіусом  $a$  і масою  $M$ . Матриця та включення ідеально контактують, що передбачає неперервну передачу переміщень і зусиль із матриці на включення через поверхню  $S$ . На включення набігає гармонічна за часом  $t$  пружна хвиля із заданою круговою частотою  $\omega$  та відомим розподілом у просторі  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  амплітуди переміщень із компонентами  $u_j^{in}$  ( $j = \overline{1,3}$ ). Надалі спільний експоненціальний часовий множник  $\exp(-i\omega t)$ , де  $i = \sqrt{-1}$ , виключаємо з розв'язку, звівши його до відшукування лише амплітудних значень.

Оскільки розглядаємо складене тіло, що об'єднує пружний і жорсткий матеріали, то для опису його поведінки за гармонічного збурення необхідно залучити рівняння деформування (руху) обох складників з урахуванням умов їх контакту. Для матеріалу матриці це векторне рівняння Ляме гармонічних коливань у вигляді

$$\omega_1^{-2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \omega_2^{-2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

де  $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$  — вектор переміщень,  $\nabla$  — тривимірний набла-оператор,  $\omega_j = \omega/c_j$  ( $j = 1, 2$ ) хвильові числа,  $c_1 = c_2 \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}$ ,  $c_2 = \sqrt{G/\rho}$  — швидкості поширення поздовжньої та поперечної пружних хвиль відповідно.

У випадку гармонічних коливань векторне рівняння його руху має вигляд

$$\mathbf{u}^0 = -\frac{1}{M\omega^2} \mathbf{P}. \quad (2)$$

Тут  $\mathbf{u}^0(u_1^0, u_2^0, u_3^0)$  — поступальне переміщення включення як жорсткого цілого,  $\mathbf{P}$  — головний вектор діючих на включення зусиль. Для спрощення викладок приймаємо, що повороти жорсткого включення відсутні, що забезпечується зовнішньою дією на включення певного моменту сил  $\mathbf{Z}$ .

З ідеального контакту включення та матриці впливає умова на переміщення точок поверхні  $S$ , зв'язок між величиною  $\mathbf{P}$  та поверхневими зусиллями  $\mathbf{t}(t_1, t_2, t_3)$ , що передаються на матрицю зі сторони включення, та визначення стримуючого повороти моменту  $\mathbf{Z}$  у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0 = \text{const}, \quad \mathbf{x} \in S, \\ \mathbf{P} = -\iint_S \mathbf{t}(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{Z} = \iint_S [\mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \mathbf{t}(\mathbf{x})] dS_{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  — радіус-вектор точки  $\mathbf{x}$ .

Виходячи з принципу суперпозиції, за яким хвильове поле у матриці утворюється полями падаючої та розсіяної включенням хвиль, умов випромінювання на безмежності та співвідношень взаємності, компоненти переміщення  $\mathbf{u}$  подамо у частотній області в інтегральній формі як [9]

$$u_j(\mathbf{x}) = u_j^{in}(\mathbf{x}) + \iint_S [U_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_k(\mathbf{y}) - T_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{y})] dS_{\mathbf{y}}. \quad (4)$$

У формулі (4) та надалі, якщо не вказано інакше, використано «німе» сумування за індексами, що повторюються (індекси змінюються від 1 до 3). Фундаментальні розв'язки  $U_{jk}, T_{jk}$  з урахуванням напрямку зовнішньої, стосовно матриці, нормалі  $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$  до поверхні  $S$  визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} U_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{4\pi G\omega^2} \left[ f_1(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \delta_{jk} - f_2(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \right], \\ T_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{4\pi\omega^2} \left\{ \left[ g_1(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + g_2(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \right] \delta_{jk} - 2 \left[ 2g_2(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + g_3(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \right] \times \right. \\ &\times \frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \left. \right\} \frac{(x_m - y_m)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} n_m(\mathbf{y}) + \frac{2}{1-2\nu} \left\{ \nu \left[ g_1(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) - g_3(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \right] + \right. \\ &\left. + g_2(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \right\} \frac{(x_j - y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} n_k(\mathbf{y}) + \left[ g_1(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + g_2(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \right] \frac{(x_k - y_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} n_j(\mathbf{y}) \left. \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

де  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  — відстань між точкою поля  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  та точкою інтегрування  $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$ ,

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \left[ (1 - i\omega_1 r) \exp(i\omega_1 r) - (1 - i\omega_2 r - \omega_2^2 r^2) \exp(i\omega_2 r) \right] r^{-3}, \\ f_2(r) &= \left[ (3 - 3i\omega_1 r - \omega_1^2 r^2) \exp(i\omega_1 r) - (3 - 3i\omega_2 r - \omega_2^2 r^2) \exp(i\omega_2 r) \right] r^{-3}, \\ g_1(r) &= \left[ (3 - 3i\omega_1 r - \omega_1^2 r^2) \exp(i\omega_1 r) - (3 - 3i\omega_2 r - 2\omega_2^2 r^2 + i\omega_2^3 r^3) \exp(i\omega_2 r) \right] r^{-4}, \\ g_2(r) &= \left[ (3 - 3i\omega_1 r - \omega_1^2 r^2) \exp(i\omega_1 r) - (3 - 3i\omega_2 r - \omega_2^2 r^2) \exp(i\omega_1 r) \right] r^{-4}, \\ g_3(r) &= \left[ (9 - 9i\omega_1 r - 4\omega_1^2 r^2 + i\omega_1^3 r^3) \exp(i\omega_1 r) - \right. \\ &\quad \left. - (9 - 9i\omega_2 r - 4\omega_2^2 r^2 + i\omega_2^3 r^3) \exp(i\omega_2 r) \right] r^{-4}. \end{aligned} \quad (6)$$

Інтегральні подання (4) можна перетворити, підставивши межові значення переміщень на поверхні  $S$  із рівняння (2) з правою частиною (3). У підсумку приходимо до інтегральних подань переміщень у матриці через зусилля на межі «матриця–включення», де контакт із включенням як рухомим жорстким цілим враховується неявно, а саме,

$$u_j(\mathbf{x}) = u_j^{in}(\mathbf{x}) + \iint_S U_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \frac{1}{M\omega^2} F_{jk}(\mathbf{x}) \iint_S t_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}. \quad (7)$$

Тут

$$F_{jk}(\mathbf{x}) = \iint_S T_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}. \quad (8)$$

Співвідношення (7) переводять задачу у площину визначення лише зусиль на поверхні  $S$ , адже напруження у матричному матеріалі отримуються підстановкою виразів (7) у закон Гука, а поступальні переміщення включення — підстановкою цих зусиль у інтеграл (3) та рівняння (2).

Спрямувавши у поданнях (7) точку  $\mathbf{x}$  до поверхні  $S$  і використавши граничні властивості пружних динамічних потенціалів, отримаємо таку систему граничних інтегральних рівнянь відносно поверхневих зусиль  $t_k$  ( $\delta_{jk}$  — символ Кронекера)

$$\frac{1}{M\omega^2} \left( \frac{\delta_{jk}}{2} + F_{jk}(\mathbf{x}) \right) \iint_S t_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \iint_S U_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = u_j^{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S. \quad (9)$$

Рівняння (9) містять слабосингулярні інтегралі з комплексними ядрами  $U_{jk}$  та порядком особливості  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1}$ , а також сингулярні інтегралі з порядком особ-

ливості  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2}$  у комплекснозначних функціях  $F_{jk}$ . З метою адитивного виділення дійсної характеристичної частини рівнянь (9), перетворимо їх тотожно до вигляду

$$\frac{1}{M\omega^2}(\delta_{jk} + \tilde{F}_{jk}(\mathbf{x})) \iint_S t_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \iint_S [\bar{U}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \tilde{U}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] t_k(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = u_j^{in}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S. \quad (10)$$

Тут

$$\tilde{F}_{jk}(\mathbf{x}) = \iint_S [T_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \bar{T}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS_{\mathbf{y}}, \quad \tilde{U}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \bar{U}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (11)$$

а слабосингулярні ядра  $\bar{U}_{jk}$  і сингулярні ядра  $\bar{T}_{jk}$  є статичні аналоги ядер  $U_{jk}$  та  $T_{jk}$ , які отримуються із них граничним переходом  $\omega \rightarrow 0$  і виражаються формулами

$$\begin{aligned} \bar{U}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{16\pi G(1-\nu)|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \left[ (3-4\nu)\delta_{jk} + \frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \right], \\ \bar{T}_{jk}(x, y) &= \frac{1}{8\pi G(1-\nu)|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \left\{ \left[ (1-2\nu)\delta_{jk} + 3 \frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \right] \times \right. \\ &\times \left. \frac{(x_m - y_m)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} n_m(\mathbf{y}) - (1-2\nu) \left[ \frac{(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} n_k(\mathbf{y}) - \frac{(x_k - y_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} n_j(\mathbf{y}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Граничні інтегральні рівняння (10) слід інтерпретувати як регуляризовану (інтегровану) форму вихідних рівнянь (9). Це впливає із наявності у рівняннях (10) лише слабосингулярних ядер  $\bar{U}_{jk}$  та регулярності інтегралів і функцій, що визначаються співвідношеннями (11).

## 2. Граничноелементна побудова дискретного аналога рівнянь

У випадку сферичного включення для числового розв'язання рівняння (10) поверхня  $S$  покривається компактною неперервною сіткою  $N$  чотирикутних граничних елементів  $S^q$  ( $q = \overline{1, N}$ ) шляхом центральних проєкцій [10] (рис. 1). Тоді граничні елементи утворюються перетином сфери площинами, що проходять через її центр і дві точки з рівномірного поділу ребер вписаного у сферу куба. Перевага такого розбиття, порівняно з класичною геодезичною сіткою «паралелей і меридіанів», полягає в однотипності форми елементів (відсутності трикутних елементів на полюсах сфери) та відносній еквівалентності розмірів елементів. Для апроксимації геометрії поверхні та невідомих використовуємо ізопараметричні

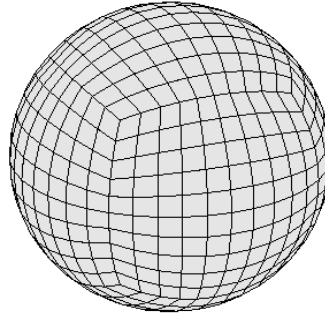


Рис. 1. Центральньо-проекційна сітка граничних елементів на поверхні сферичного включення

лінійні елементи. Тоді координати точки  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  на елементі  $S^q$  подаються через координати чотирьох його вузлових точок  $\mathbf{x}^{w(q,n)}(x_1^{w(q,n)}, x_2^{w(q,n)}, x_3^{w(q,n)})$ ,  $n = \overline{1, 4}$ , а компоненти контактних зусиль  $\mathbf{t}(t_1, t_2, t_3)$  — через вузлові значення цих зусиль  $t_j^{w(q,n)}$  ( $n = \overline{1, 4}$ ) формулами

$$\begin{aligned} x_j &= f_j^q(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=1}^4 x_j^{w(q,n)} M_n(\xi_1, \xi_2), \quad \mathbf{x} \in S^q, \quad q = \overline{1, N}, \\ t_j(\mathbf{x}) \Big|_{x_k = f_k^q(\xi_1, \xi_2)} &= \sum_{n=1}^4 t_j^{w(q,n)} M_n(\xi_1, \xi_2), \quad \mathbf{x} \in S^q, \quad q = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (13)$$

де  $w(q, n)$  ( $w = \overline{1, W}$ ) — глобальний номер вузлової точки,  $W$  — загальна кількість вузлових точок,  $M_n$  ( $n = \overline{1, 4}$ ) — визначені на стандартному елементі  $-1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1$  білінійні базові функції

$$\begin{aligned} M_1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2), & M_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2), \\ M_3(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2), & M_4(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2). \end{aligned} \quad (14)$$

Задовольнивши рівняння (10) у вузлових точках  $\mathbf{x}^w$  ( $w = \overline{1, W}$ ) і замінивши інтеграл по поверхні  $S$  сумою інтегралів по елементарних поверхнях  $S^q$  ( $q = \overline{1, N}$ ) із залученням апроксимацій (14), прийдемо до такої комплексної системи  $3W$  лінійних алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень зусиль

$$\sum_{q=1}^N \sum_{n=1}^4 \left[ a^{qn} t_j^{p(q,n)} + (b_{jk}^{qnw} - c_{jk}^{qnw} - d_{jk}^{qnw}) t_k^{p(q,n)} \right] = u_j^{in}(\mathbf{x}^w), \quad w = \overline{1, W}. \quad (15)$$

Коефіцієнти системи (15) визначаються формулами

$$\begin{aligned}
 a^{qn} &= \frac{1}{M\omega^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_n(\xi_1, \xi_2) J^q(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \\
 b_{jk}^{qmw} &= \frac{a^{qn}}{M\omega^2} \sum_{l=1}^N \sum_{m=-1}^4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ T_{jk}(\mathbf{x}^w, \mathbf{y}) - \bar{T}_{jk}(\mathbf{x}^w, \mathbf{y}) \right] \Big|_{y_i=f_i'(\xi_1, \xi_2)} \times \\
 &\times M_m(\xi_1, \xi_2) J^l(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \\
 c_{jk}^{qmw} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{U}_{jk}(\mathbf{x}^w, \mathbf{y}) \Big|_{y_i=f_i^q(\xi_1, \xi_2)} \delta_{wp(q,n)} M_n(\xi_1, \xi_2) J^q(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \\
 d_{jk}^{qmw} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left[ U_{jk}(\mathbf{x}^w, \mathbf{y}) - \bar{U}_{jk}(\mathbf{x}^w, \mathbf{y}) \right] \Big|_{y_i=f_i^q(\xi_1, \xi_2)} \delta_{wp(q,n)} + \right. \\
 &\left. + U_{jk}(\mathbf{x}^w, \mathbf{y}) \Big|_{y_i=f_i^q(\xi_1, \xi_2)} (1 - \delta_{wp(q,n)}) \right\} M_n(\xi_1, \xi_2) J^q(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Тут  $J^q$  — якобіан перетворення (13) на  $q$ -ому елементі.

За винятком слабосингулярних інтегралів у коефіцієнтах  $c_{jk}^{qmw}$ , решта інтегралів у співвідношеннях (16) регулярні й обчислюються за допомогою квадратурних формул Гауса. Для коректного визначення коефіцієнтів  $c_{jk}^{qmw}$  застосовуємо процедуру розбиття діагоналю квадратної області інтегрування на дві трикутні з подальшим усуненням полярної особливості шляхом заміни змінних із регуляризуючим якобіаном [11].

### 3. Числові результати

Як приклад застосування запропонованої граничноелементної схеми, досліджуємо реакцію сферичного жорсткого включення на падіння плоскої поздовжньої гармонічної хвилі, яка поширюється вздовж осі  $Ox_3$  та супроводжується переміщеннями зі заданою амплітудою  $U_0$ . Тоді

$$u_3^{in}(\mathbf{x}) = U_0 \exp(i\omega_1 x_3), \quad u_1^{in} = u_2^{in} = 0. \quad (17)$$

Виходячи із специфіки геометрії включення аналізували радіальні  $\sigma_{rr}$  і тангенціальні  $\sigma_{r\theta}$ ,  $\sigma_{r\varphi}$  контактні напруження на поверхні  $S$  у сферичній системі координат, які пов'язані з розв'язками системи граничних інтегральних рівнянь (10) співвідношеннями

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= t_1 \sin \theta \cos \varphi + t_2 \sin \theta \sin \varphi + t_3 \cos \theta, \\
 \sigma_{r\theta} &= t_1 \cos \theta \cos \varphi + t_2 \cos \theta \sin \varphi - t_3 \sin \theta, \\
 \sigma_{r\varphi} &= -t_1 \sin \theta \sin \varphi + t_2 \sin \theta \cos \varphi,
 \end{aligned} \quad (18)$$

де  $\theta$ ,  $\varphi$  — азимутальний і полярний кути, відповідно.

Для зручної параметризації результатів використовували нормовану масу включення або відношення густини матеріалу включення до густини матеріалу матриці  $\bar{\rho} = 3M / (4\pi a^3 \rho)$  та нормалізоване хвильове число  $\chi = \omega_2 a$ . Розрахунки стосувалися безрозмірних поступальних переміщень включення  $\bar{u}_k^0 = u_k^0 / U_0$  і безрозмірних контактних напружень  $\bar{\sigma}_{r\beta} = a\sigma_{r\beta} / (GU_0)(\beta = r, \theta, \varphi)$  для коефіцієнта Пуассона  $\nu = 0,3$ . Поверхню включення покривали сіткою із 600 граничних елементів.

Для перевірки точності результатів використовували два підходи. Перший ґрунтується на природній осевій відносно  $Ox_3$  симетрії задачі. Тоді відсутній момент сил, що діють на включення, тобто  $\mathbf{Z} = 0$ , контактні напруження не залежать від кутової координати  $\varphi$ , а  $\sigma_{r\varphi} = 0$  і  $u_1^0 = u_2^0 = 0$ . Зафіксовано відносне відхилення від вказаних умов менше, ніж 0,1%. Окрім того, здійснювали порівняльний аналіз числових результатів із аналітичними для низьких частот коливань [7] (замкнуту форму розв'язку наведено в Додатку) та для фіксованої нормованої маси  $\bar{\rho} = 3$  і ширшого діапазону частот із роботи [8]. У першому випадку встановлено добру узгодженість результатів для різних нормованих мас включення у частотному діапазоні  $0 < \chi < 0,2$  (рис. 2, 3), у другому — у широкому діапазоні частот для наведеної у [8] нормованої маси  $\bar{\rho} = 3$ . Слід зазначити, що вузький діапазон точності аналітичного розв'язку [7] зумовлений утриманням у ньому членів до другого порядку за частотою.

Зі збільшенням хвильового числа амплітуда поступальних переміщень  $\bar{u}_3^0$  зростає від одиниці (статичне значення) до максимуму, а потім спадає до нуля

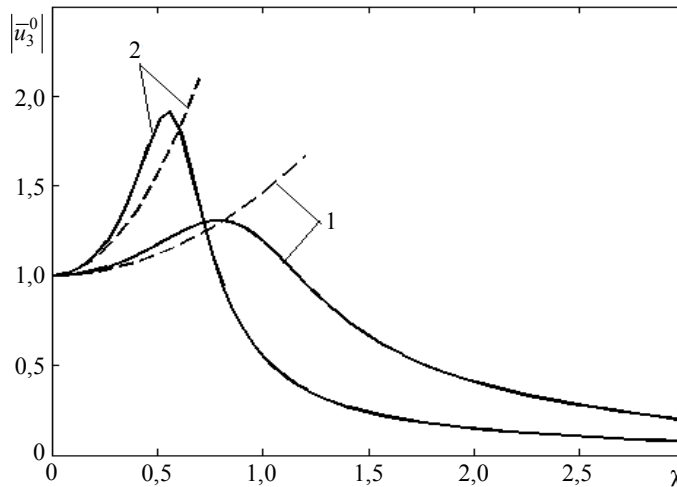


Рис. 2. Залежності безрозмірних амплітуд поступальних переміщень включення із різними нормованими масами (1 —  $\bar{\rho} = 3$ , 2 —  $\bar{\rho} = 10$ ) від нормалізованого хвильового числа (штрихові криві відповідають низькочастотному наближенню [7])



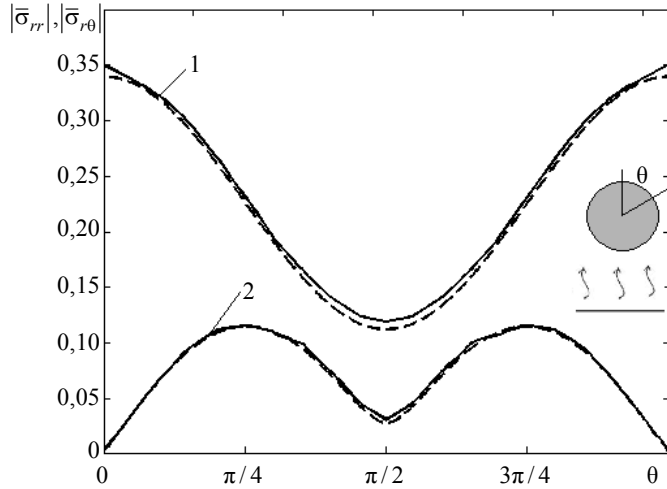


Рис. 3. Залежності безрозмірних амплітуд радіальних (криві 1) і тангенціальних (криві 2) контактних напружень від кугової координати для  $\bar{\rho} = 10; \chi = 0,1$  (штрихові криві відповідають низькочастотному наближенню [7])

(рис. 2). Вказана закономірність виразніша для масивніших включень, для яких резонансні амплітуди переміщень більші та фіксуються за менших хвильових чисел. Бачимо (див. рис. 3), що максимуми амплітуд радіальних напружень спостерігаються у точках набігу ( $\theta = \pi$ ) хвилі на включення та її сходу ( $\theta = 0$ ) із включення. Амплітуди радіальних напружень для  $\theta = \pi$  та  $\theta = 0$  також значно перевищують амплітуди тангенціальних напружень на поверхні включення, тому рис. 4 стосується аналізу  $|\sigma_{rr}|$  саме у цих точках. У початковому діапазоні

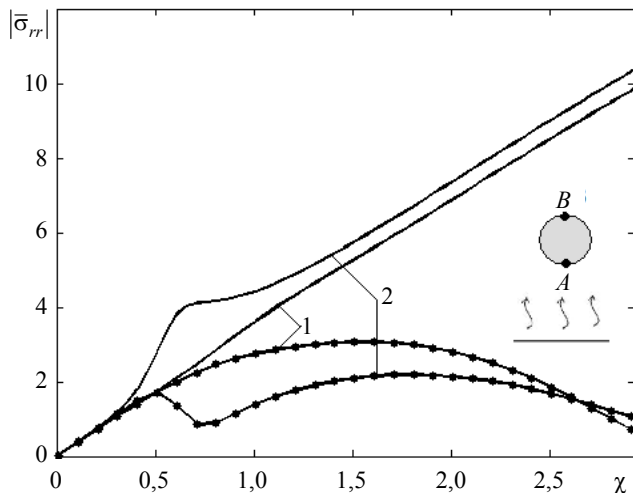


Рис. 4. Залежності безрозмірних амплітуд радіальних контактних напружень у полюсах  $A$  (суцільні криві) та  $B$  (марковані криві) включень із різними приведеними масами ( $1 - \bar{\rho} = 3, 2 - \bar{\rho} = 10$ ) від нормалізованого хвильового числа

хвильових чисел амплітуди радіальних напружень зростають від нуля і є близькі у розглянутих точках, що пояснюється ефектом довгохвильової дифракції. Подальше збільшення хвильового числа призводить до виникнення піків амплітуд радіальних напружень, за винятком точки набігу хвилі на включення малої маси, якщо залежність  $|\sigma_{rr}|$  від  $\chi$  залишається монотонною. Радіальні напруження у точці  $\theta = \pi$  є більші, ніж у точці  $\theta = 0$ . У області ще вищих хвильових чисел характерне зближення значень  $|\sigma_{rr}|$  для включень різних мас. Так, у точці сходу хвилі з включення вони наближаються до нуля, а у точці набігу хвилі на включення — виходять на лінійну залежність, зумовлену відповідним ростом напружень у падаючій хвилі.

#### 4. Додаток

Аналітичний низькочастотний розв'язок задачі про сферичне жорстке включення у полі пружної хвилі (18) із точністю до  $O(\chi^3)$  має вигляд [7]

$$\begin{aligned} \bar{u}_3^0 &= 1 - \frac{1}{9}\chi^2 \left[ \left( \frac{5}{2} - \bar{\rho} \right) \gamma^2 + 2(1 - \bar{\rho}) \right], \\ \bar{\sigma}_{rr}(\theta) &= i\gamma\chi \left[ \frac{1}{\gamma^2} + \frac{10}{3+2\gamma^2} P_2^0(\cos\theta) \right] + \chi^2 \left[ \frac{1}{3}(1 - \bar{\rho}) P_1^0(\cos\theta) - \frac{7\gamma^2}{4+3\gamma^2} P_3^0(\cos\theta) \right], \\ \bar{\sigma}_{r\theta}(\theta) &= -\frac{5i\gamma\chi}{3+2\gamma^2} P_2^1(\cos\theta) - \chi^2 \left[ \frac{1}{3}(1 - \bar{\rho}) P_1^1(\cos\theta) - \frac{7\gamma^2}{3(4+3\gamma^2)} P_3^1(\cos\theta) \right]. \end{aligned}$$

Тут  $\gamma = \sqrt{(1-2\nu)/[2(1-\nu)]}$ ,  $P_k^j$  — поліноми Лежандра  $j$ -ого порядку  $k$ -ої степені.

**Висновки.** Схему методу граничних елементів розвинуто щодо моделі рухомого жорсткого сферичного включення за тривимірного гармонічного збурення. Тоді досягається зменшення розмірності результуючої системи граничних інтегральних рівнянь та їх дискретного аналога порівняно з випадком пружного включення. Числові результати у частотній області отримані на сітці чотирикутних граничних елементів, побудованих шляхом центральних проєкцій. Цим забезпечено достатню гладкість розв'язку навіть за невеликої густини сітки лінійних ізопараметричних елементів. Можливість поєднання запропонованого граничноелементного підходу з алгоритмом швидкого мультиполю («fast multipole method» [12]) і його перенесення на множинні жорсткі розсіювачі хвиль відкриває перспективу ефективного числового дослідження динамічних властивостей тривимірних пружних композитних структур.

## Література

- [1] *Kanaun, S. K.* Propagation of longitudinal elastic waves in composites with a random set of spherical inclusions (effective field approach) / *S. K. Kanaun, V. M. Levin* // *Archive of Applied Mechanics*. — 2007. — Vol. 77, No 9. — P. 627-651.
- [2] *Conoir, J. M.* Effective wavenumbers and reflection coefficients for an elastic medium containing random configurations of cylindrical scatterers / *J. M. Conoir, A. N. Norris* // *Wave Motion*. — 2010. — 47, No 3. — P. 183-197.
- [3] *Kitahara, M.* Boundary-integral equation method for elastodynamic scattering by a compact inhomogeneity / *M. Kitahara, K. Nakagawa, J. D. Achenbach* // *Computational Mechanics*. — 1989. — Vol. 5, No 2-3. — P. 129-144.
- [4] *Ємець, В. Ф.* Моделювання та інтерпретація даних розсіяння ультразвуку локальними об'єктами / *В. Ф. Ємець*. — Львів: Фенікс, 2001. — 253 с.
- [5] A fast boundary element method for the analysis of fiber-reinforced composites based on a rigid-inclusion model / *Y. J. Liu, N. Nishimura, Y. Otani et al.* // *Journal of Applied Mechanics*. — 2005. — Vol. 72, No 1. — P. 115-128.
- [6] A boundary element method for the analysis of CNT/polymer composites with a cohesive interface model based on molecular dynamics / *Y. J. Liu, N. Nishimura, D. Qian et al.* // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2008. — Vol. 32, No 4. — P. 299-308.
- [7] *Jain, D. L.* Scattering of P and S waves by spherical inclusions and cavities / *D. L. Jain, R. P. Kanwal* // *Journal of Sound and Vibration*. — 1978. — Vol. 57, No 2. — P. 171-202.
- [8] *Гузь, А. Н.* Дифракция упругих волн / *А. Н. Гузь, В. Д. Кубенко, М. А. Черевко*. — Київ: Наук. думка, 1978. — 308 с.
- [9] *Balas, J.* Stress analysis by boundary element method / *J. Balas, J. Sladek, V. Sladek*. — Amsterdam: Elsevier, 1989 — 686 p.
- [10] *Ronchi, C.* The «cubed sphere»: a new method for the solution of partial differential equations in spherical geometry / *C. Ronchi, R. Iacono, P. S. Paolucci* // *Journal of Computational Physics*. — 1996. — Vol. 124, No 1. — P. 93-114.
- [11] *Aliabadi, M. H.* The boundary element method: applications in solids and structures / *M. H. Aliabadi*. — Boston: John Wiley & Sons, 2002. — 598 p.
- [12] *Gumerov, N. A.* Fast multipole methods for the Helmholtz equation in three dimensions / *N. A. Gumerov, R. Duraiswami*. — Amsterdam: Elsevier, 2005. — 520 p.

## Boundary element method scheme for the model of rigid spherical inclusion in time-harmonic elastic wave field

Ivan Dyyak, Orest Mykhaskiv

*The direct boundary element method is developed for the 3-D time-harmonic elastic wave diffraction problems for a spherical rigid massive inclusion, the vibration of which in an infinite matrix by the translation is described. The problems are reduced to a system of boundary integral equations relative to the contact tractions on the interface between a matrix and an inclusion. An algorithm for the regularization and discretization of equations on the continuous quadrilateral boundary elements mesh, constructed by the gnomonic equiangular central projections technique, is proposed. Numerical results concern the displacements of inclusion as a rigid unit and the distributions of contact tractions on the interface, depending on the frequency of impinged plane longitudinal wave. Numerical solutions are compared with the known analytical ones, which are obtained within axisymmetrical statement of the problem.*

## **Схема метода граничных элементов для модели жесткого сферического включения в поле упругой гармонической волны**

Иван Дьяк, Орест Мыхаськив

*Предложен алгоритм прямого метода граничных элементов для задач дифракции трехмерных упругих гармонических волн на сферическом жестком массивном включении, колебания которого в бесконечной матрице описываются поступательными перемещениями. Задачи сведены к системе граничных интегральных уравнений относительно контактных усилий на границе «матрица–включение». Разработан алгоритм регуляризации и дискретизации уравнений на непрерывной сетке четырехугольных граничных элементов, построенной путем центральных проекций. Численные результаты касаются перемещений включения как жесткого целого и распределений контактных усилий по поверхности включения в зависимости от частоты набегающей плоской продольной волны. Проведено сопоставление полученных численных решений с известными аналитическими, полученными в предположении осевой симметрии задачи.*

Представлено доктором фізико-математичних наук Р. Мартиняком

Отримано 21.09.11