УДК 519.6: 539.3

Методи декомпозиції області для задач про односторонній контакт нелінійно пружних тіл

Ігор Прокопишин

к. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3*б*, Львів, e-mail: ihor84@gmail.com

Для розв'язування задач про односторонній контакт багатьох нелінійно пружних тіл запропоновано на континуальному рівні низку схем декомпозиції області, що ґрунтуються на методі штрафу для нелінійних варіаційних нерівностей і деяких ітераційних методах для нелінійних варіаційних рівнянь. Показано існування та єдиність розв'язку варіаційної задачі зі штрафом і збіжність за параметром штрафу. Встановлено умови збіжності методів декомпозиції області.

Ключові слова: методи декомпозиції області, контактні задачі, нелінійна теорія пружності, нелінійні варіаційні нерівності та рівняння, метод штрафу, ітераційні методи.

Вступ. Методи декомпозиції області (МДО) зводять розв'язування крайових задач математичної фізики в усій області до розв'язування послідовності задач в окремих підобластях. Перевагами МДО є можливість поєднання різних математичних моделей і методів у підобластях, а також розпаралелення обчислень.

Значного розвитку МДО отримали для лінійних крайових задач математичної фізики, зокрема, крайових задач для рівняння Пуассона та задач лінійної теорії пружності. Останнім часом активно проводяться дослідження з узагальнення МДО для контактних задач теорії пружності, які є нелінійними.

У роботах [1-4] на континуальному рівні розроблено низку ітераційних алгоритмів МДО для розв'язування задач одностороннього контакту двох лінійно пружних тіл. Ці алгоритми полягають у розв'язуванні на кожній ітерації нелінійної задачі одностороннього контакту з жорсткою поверхнею (задачі Сіньйоріні) для одного тіла, а для іншого — задачі лінійної теорії пружності з умовами Неймана [1] або Діріхле [2, 3] на зоні можливого контакту, або задачі Сіньйоріні [4]. У праці [5] для задачі про контакт двох лінійно пружних тіл запропоновано континуальний метод декомпозиції області, що базується на застосуванні поповненого Лаґранжіана та блочного алгоритму Удзави. Дискретні МДО для розв'язування контактних задач розвинуто у роботах [6-8].

У працях [9-12] нами запропоновано клас континуальних паралельних методів декомпозиції області типу Робіна для розв'язування задач контакту багатьох лінійно пружних тіл. Вони ґрунтуються на методі штрафу для варіаційних нерівностей та ітераційних методах для нелінійних варіаційних рівнянь. На кожному кроці цих МДО необхідно паралельно розв'язувати лише лінійні варіаційні рівняння для окремих тіл, які відповідають задачам теорії пружності з умовами Робіна на зонах можливого контакту. У роботах [10, 11] доведено їхню збіжність.

У пропонованій роботі узагальнено отримані нами МДО на випадок задач про односторонній контакт нелінійно пружних тіл. Здійснено варіаційне формулювання цих задач на основі методу штрафу. Сформульовано теореми про існування та єдиність розв'язку варіаційної задачі зі штрафом, а також збіжність за параметром штрафу. Встановлено умови збіжності побудованих МДО.

1. Постановка задачі

Розглянемо задачу про контакт N нелінійно пружних обмежених тіл $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^3$ з кусково-гладкими межами $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha, \alpha = \overline{1,N}$ (рис. 1). Позначимо $\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^{N} \Omega_\alpha$.

У просторі $\mathbb{R}^3$ введемо декартову систему координат із базисними векторами $\mathbf{e}_i$, $i = \overline{1,3}$. Напружено-деформований стан у точці $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ кожного з тіл Ω_α визначають вектор переміщень $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = u_{\alpha\, i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, симетричні тензори деформацій $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\alpha\, ij}(\mathbf{x})\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ і напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha(\mathbf{x}) = \sigma_{\alpha\, ij}(\mathbf{x})\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$.

Ці величини задовольняють рівняння рівноваги, нелінійні співвідношення між напруженнями і деформаціями та співвідношення Коші [13]

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\sigma_{\alpha\, ij}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + f_{\alpha i}(\mathbf{x}) = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \tag{1}$$

$$\sigma_{\alpha\, ij} = \lambda_\alpha \delta_{ij}\, \Theta_\alpha + 2\mu_\alpha \varepsilon_{\alpha\, ij} - 2\mu_\alpha \omega_\alpha(e_\alpha) e_{\alpha\, ij}, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \tag{2}$$

$$e_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}) - \delta_{ij}\, \Theta_\alpha(\mathbf{x})/3, \; \Theta_\alpha(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\alpha 11}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha 22}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha 33}(\mathbf{x}), \; \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \tag{3}$$

$$e_\alpha(\mathbf{x}) = \sqrt{2}\Big[\big(\varepsilon_{\alpha 11}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{\alpha 22}(\mathbf{x})\big)^2 + \big(\varepsilon_{\alpha 22}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{\alpha 33}(\mathbf{x})\big)^2 + \\ + \big(\varepsilon_{\alpha 33}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{\alpha 11}(\mathbf{x})\big)^2 + 6\big(\varepsilon^2_{\alpha 12}(\mathbf{x}) + \varepsilon^2_{\alpha 23}(\mathbf{x}) + \varepsilon^2_{\alpha 31}(\mathbf{x})\big)\Big]^{1/2} \Big/ 3, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \tag{4}$$

$$\varepsilon_{\alpha\, ij}(\mathbf{x}) = \big(\partial u_{\alpha i}(\mathbf{x})/\partial x_j + \partial u_{\alpha\, j}(\mathbf{x})/\partial x_i\big)\big/2, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \tag{5}$$

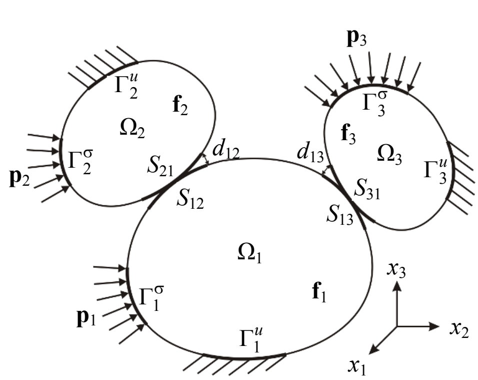

Рис. 1. Контакт кількох нелінійно пружних тіл

де $f_{\alpha i}(\mathbf{x})$ — компоненти вектора об'ємних сил $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}) = f_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, що діють на тіло Ω_α; $\lambda_\alpha(\mathbf{x}), \mu_\alpha(\mathbf{x})$ — параметри Ляме; $\omega_\alpha(z)$ — нелінійна функція Іллюшина; $\Theta_\alpha(\mathbf{x})$ — об'ємна деформація; $e_{\alpha\, ij}(\mathbf{x})$ — компоненти тензора девіації деформацій $\hat{\mathbf{e}}_\alpha(\mathbf{x}) = e_{\alpha\, ij}(\mathbf{x})\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, а $e_\alpha(\mathbf{x})$ — інтенсивність деформацій для тіла Ω_α.

Уважаємо, що параметри Ляме — обмежені

$$\left(\forall \mathbf{x} \in \Omega_\alpha\right)\left\{\, 0 < \lambda_\alpha(\mathbf{x}) < \infty,\ 0 < \mu_\alpha(\mathbf{x}) < \infty \,\right\}, \quad \alpha = \overline{1,N}, \tag{6}$$

а функція Іллюшина диференційовна та задовольняє умови [13]

$$\left(\forall z\right)\left\{\, 0 \le \omega_\alpha(z) \le \partial\left(z\,\omega_\alpha(z)\right)/\partial z < 1 \,\right\},\ \left(\forall z\right)\left\{\, \partial\left(\omega_\alpha(z)\right)/\partial z \ge 0 \,\right\},\ \alpha = \overline{1,N}. \tag{7}$$

На межі кожного з тіл уведемо ортонормований базис $\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\eta}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha$, де $\mathbf{n}_\alpha$ — одинична зовнішня нормаль. Вектори переміщень і напружень на Γ_α у цьому базисі запишемо так: $\mathbf{u}_\alpha = u_{\alpha\xi}\boldsymbol{\xi}_\alpha + u_{\alpha\eta}\boldsymbol{\eta}_\alpha + u_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha,\ \boldsymbol{\sigma}_\alpha = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = \sigma_{\alpha\xi}\boldsymbol{\xi}_\alpha + \sigma_{\alpha\eta}\boldsymbol{\eta}_\alpha + \sigma_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha$.

Нехай поверхня Γ_α складається з трьох частин: $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^u \cup \Gamma_\alpha^\sigma \cup S_\alpha$, $\Gamma_\alpha^u \cap \Gamma_\alpha^\sigma \cap S_\alpha = \varnothing$, де $\Gamma_\alpha^u \ne \varnothing$, $S_\alpha = \bigcup_{\beta \in B_\alpha} S_{\alpha\beta} \ne \varnothing$. Тут $S_{\alpha\beta} \subset \Gamma_\alpha$ — зона можливого контакту тіла Ω_α з тілом Ω_β, а $B_\alpha \subset \{1, 2, ..., N\}$ — множина індексів усіх тіл, які контактують із тілом Ω_α, $B_\alpha \ne \varnothing$. Вважаємо, що поверхні $S_{\alpha\beta} \subset \Gamma_\alpha$ та $S_{\beta\alpha} \subset \Gamma_\beta$ — достатньо близькі $\left(S_{\alpha\beta} \approx S_{\beta\alpha}\right)$, тому приймаємо, що їхні зовнішні нормалі відрізняються лише знаком [14]: $\mathbf{n}_\alpha(\mathbf{x}) \approx -\mathbf{n}_\beta(\mathbf{x}')$, де $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}$ — проекція точки $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$ на поверхню $S_{\beta\alpha}$. Відстань між тілами Ω_α та Ω_β до деформації вздовж нормалі позначимо $d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \pm\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(x_i - x_i'\right)^2}$.

На частині Γ_α^u поверхні Γ_α задані кінематичні крайові умови (умови Діріхле), а на частині Γ_α^σ — статичні крайові умови (умови Неймана)

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u, \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^\sigma, \tag{8}$$

де $\mathbf{p}_\alpha = \left(p_{\alpha\xi}, p_{\alpha\eta}, p_{\alpha n}\right)^{\mathrm{T}}$ — відомі граничні зусилля.

На поверхнях $S_{\alpha\beta}$ виконуються умови одностороннього контакту без тертя

$$\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') \le 0, \quad \sigma_{\alpha\xi}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\xi}(\mathbf{x}') = 0, \quad \sigma_{\alpha\eta}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\eta}(\mathbf{x}') = 0, \tag{9}$$

$$u_{\alpha n}(\mathbf{x}) + u_{\beta n}(\mathbf{x}') \le d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \tag{10}$$

$$\left(u_{\alpha n}(\mathbf{x}) + u_{\beta n}(\mathbf{x}') - d_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\right)\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta},\ \mathbf{x}' \in S_{\beta\alpha},\ \beta \in B_\alpha,\ \alpha = \overline{1,N}. \tag{11}$$

Зазначимо, що контактна задача (1)-(5), (8)-(11) нелінійна, оскільки співвідношення (2) нелінійні та істинні зони контакту наперед невідомі.

2. Варіаційне формулювання

Для кожного з тіл Ω_α розглянемо простори Соболєва $V_\alpha = \left[H^1(\Omega_\alpha)\right]^3$ та введемо у них замкнуті підпростори $V_\alpha^0 = \left\{\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha : \mathbf{u}_\alpha = 0 \text{ на } \Gamma_\alpha^u\right\}$ зі скалярним добутком $(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0} = $ $= \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_\alpha} \left[u_{\alpha i} v_{\alpha i} + \sum_{j=1}^3 (\partial u_{\alpha i}/\partial x_j)(\partial v_{\alpha i}/\partial x_j)\right] d\Omega$ і нормою $\|\mathbf{u}\|_{V_\alpha^0} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_\alpha^0}^{1/2}$.

Значення елементів просторів V_α та V_α^0 на частинах межі області Ω_α будемо розуміти у сенсі слідів [15, 16] і для простоти позначатимемо їх тими ж символами. Слід елемента $\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha$ на межі Γ_α^u належить класу $\left[H^{1/2}(\Gamma_\alpha^u)\right]^3$, а слід елемента $\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha^0$ на межі $\Xi_\alpha = \operatorname{int}(\Gamma_\alpha \setminus \Gamma_\alpha^u)$ належить $\left[H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)\right]^3$. Надалі будемо вважати, що $\Gamma_\alpha^u = \overline{\Gamma_\alpha^u}$. Тоді $\Xi_\alpha = \Gamma_\alpha \setminus \Gamma_\alpha^u$, $\Gamma_\alpha^\sigma \subset \Xi_\alpha$, $S_{\alpha\beta} \subset \Xi_\alpha$, $\forall \beta \in B_\alpha$. Зазначимо, що рівності та нерівності в класах L_2, H^1, $H^{1/2}$ та $H_{00}^{1/2}$ виконуються майже скрізь.

Розглянемо рефлексивний банаховий простір $V_0 = V_1^0 \times \ldots \times V_N^0$. У просторі V_0 означимо скалярний добуток $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_0} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0}$ і норму $\|\mathbf{u}\|_{V_0} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_0}^{1/2}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0$, та введемо опуклу замкнуту множину кінематично допустимих переміщень:

$$K = \left\{\mathbf{u} \in V_0 :\ u_{\alpha n} + u_{\beta n} \le d_{\alpha\beta} \ \text{ на } \ S_{\alpha\beta},\ \{\alpha, \beta\} \in Q\right\}, \tag{12}$$

де $Q = \left\{\{\alpha, \beta\} :\ \alpha \in \{1, \ldots, N\},\ \beta \in B_\alpha\right\}$ — множина всеможливих невпорядкованих пар індексів тіл, що контактують між собою, $u_{\alpha n} = \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$, $d_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$.

Введемо білінійну форму A, що визначає енергію лінійної деформації тіл

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^N a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \tag{13}$$

$$a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \left(\lambda_\alpha \Theta_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) \Theta_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) + 2\mu_\alpha \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{u}_\alpha) \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{v}_\alpha)\right) d\Omega, \tag{14}$$

лінійну форму L, рівну роботі заданих зовнішніх сил

$$L(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^N l_\alpha(\mathbf{u}_\alpha), \quad \mathbf{u} \in V_0, \quad l_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \, d\Omega + \int_{\Gamma_\alpha^\sigma} \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \, dS, \tag{15}$$

де $\mathbf{f}_\alpha \in \left[L_2(\Omega_\alpha)\right]^3$, $\mathbf{p}_\alpha \in \left[H_{00}^{-1/2}(\Xi_\alpha)\right]^3$, а також неквадратичний функціонал H, що відповідає енергії нелінійної деформації тіл [14, 17]

$$H(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha\right), \quad \mathbf{u} \in V_0, \quad h_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha\right) = 3 \int_{\Omega_\alpha} \mu_\alpha \left(\int_0^{e_\alpha(\mathbf{u}_\alpha)} z\, \omega_\alpha(z)\, dz \right) d\Omega . \tag{16}$$

Лема 1. [10] Нехай межі тіл $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha, \alpha = \overline{1,N}$, кусково-гладкі, $\Gamma_\alpha^u \neq \varnothing$, $\mathbf{f}_\alpha \in \left[L_2\left(\Omega_\alpha\right)\right]^3$, $\mathbf{p}_\alpha \in \left[H_{00}^{-1/2}\left(\Xi_\alpha\right)\right]^3$, та виконується умова (6). Тоді білінійна форма A — симетрична, коерцитивна та неперервна, а лінійна форма L — неперервна:

$$\left(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0\right)\left\{A(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{v},\mathbf{u})\right\}, \ \left(\exists B_A \in (0;\infty)\right)\left(\forall \mathbf{u} \in V_0\right)\left\{A(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq B_A \|\mathbf{u}\|_{V_0}^2\right\}, \tag{17}$$

$$\left(\exists M_A \in (0;\infty)\right)\left(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0\right)\left\{\left|A(\mathbf{u},\mathbf{v})\right| \leq M_A \|\mathbf{u}\|_{V_0} \|\mathbf{v}\|_{V_0}\right\}, \tag{18}$$

$$\left(\exists T_L \in (0;\infty)\right)\left(\forall \mathbf{u} \in V_0\right)\left\{\left|L(\mathbf{u})\right| \leq T_L \|\mathbf{u}\|_{V_0}\right\}. \tag{19}$$

Розглянемо властивості неквадратичного функціонала $H(\mathbf{u})$. Цей функціонал двічі диференційовний за Ґато [14, 17]

$$H'(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^{N} h'_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha\right), \ H''(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{\alpha=1}^{N} h''_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha\right), \ \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V_0, \tag{20}$$

$$h'_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha\right) = 2 \int_{\Omega_\alpha} \mu_\alpha\, \omega_\alpha\left(e_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha\right)\right) \sum_{i,j=1}^{3} e_{\alpha\, ij}\left(\mathbf{u}_\alpha\right) e_{\alpha\, ij}\left(\mathbf{v}_\alpha\right) d\Omega, \tag{21}$$

$$h''_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha\right) = 2 \int_{\Omega_\alpha} \mu_\alpha\, \omega_\alpha\left(e_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha\right)\right) e_\alpha\left(\mathbf{v}_\alpha\right) e_\alpha\left(\mathbf{w}_\alpha\right) d\Omega +$$

$$+ \frac{4}{3} \int_{\Omega_\alpha} \mu_\alpha \frac{\omega'_\alpha\left(e_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha\right)\right)}{e_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha\right)} \left(\sum_{i,j=1}^{3} e_{\alpha ij}\left(\mathbf{u}_\alpha\right) e_{\alpha ij}\left(\mathbf{v}_\alpha\right) \right) \left(\sum_{k,l=1}^{3} e_{\alpha kl}\left(\mathbf{u}_\alpha\right) e_{\alpha kl}\left(\mathbf{w}_\alpha\right) \right) d\Omega . \tag{22}$$

Диференціали Ґато $H'(\mathbf{u},\mathbf{v})$ і $H''(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ нелінійні по $\mathbf{u}$ та лінійні по інших аргументах. Окрім цього, ми довели таке твердження:

Лема 2. Нехай межі тіл $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha, \alpha = \overline{1,N}$, кусково-гладкі, $\Gamma_\alpha^u \neq \varnothing$ та виконуються умови (6) і (7). Тоді справджуються властивості

$$\left(\exists C \in (0;\infty)\right)\left(\forall \mathbf{u} \in V_0\right) \left\{ (1 - C)\, A(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq 2\, H(\mathbf{u}) \right\}, \tag{23}$$

$$\left(\forall \mathbf{u} \in V_0\right)\left(\exists R \in (0;\infty)\right)\left(\forall \mathbf{v} \in V_0\right)\left\{\left|H'(\mathbf{u},\mathbf{v})\right| \leq R \|\mathbf{v}\|_{V_0}\right\}, \tag{24}$$

$$\left(\exists D \in (0;\infty)\right)\left(\forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V_0\right)\left\{\left|H''(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\right| \leq D \|\mathbf{v}\|_{V_0} \|\mathbf{w}\|_{V_0}\right\}, \tag{25}$$

$$\left(\exists B \in (0;\infty)\right)\left(\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0\right)\left\{\left|A(\mathbf{v},\mathbf{v}) - H''(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v})\right| \geq B \|\mathbf{v}\|_{V_0}^2\right\}. \tag{26}$$

Результати робіт [14, 17] дозволяють сформулювати теорему.

Теорема 1. Вихідна контактна задача (1)-(5), (8)-(11) у слабкому розумінні еквівалентна задачі мінімізації на множині (12) неквадратичного функціонала

$$F(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u},\mathbf{u})/2 - H(\mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \to \min_{\mathbf{u}\in K}. \tag{27}$$

Застосовуючи результати праці [18], ми довели й таке твердження:

Теорема 2. Нехай виконуються умови *леми 1* і *леми 2*, а також $d_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$. Тоді задача (27) має єдиний розв'язок та її розв'язання еквівалентне розв'язанню на множині (12) нелінійної варіаційної нерівності

$$F'(\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u}) - H'(\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u}) - L(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \ge 0, \quad \forall\, \mathbf{v}\in K, \quad \mathbf{u}\in K. \tag{28}$$

3. Варіаційне формулювання на основі методу штрафу

Застосуємо метод штрафу [15, 16, 18, 19] для зведення задачі мінімізації (27) на опуклій замкнутій множині $K \subset V_0$ до задачі безумовної мінімізації у вихідному просторі V_0. За порушення умов (10) уведемо штраф у такій формі [9-12, 16]

$$J_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\theta} \sum_{\{\alpha,\,\beta\}\in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} \left[\left(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n}\right)^-\right]^2 dS\,, \tag{29}$$

де $\theta > 0$ — параметр штрафу, $y^- = \min\{0,\, y\}$.

Розглянемо задачу мінімізації функціонала зі штрафом у просторі V_0:

$$F_\theta(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) + J_\theta(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u},\mathbf{u})/2 - H(\mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) + J_\theta(\mathbf{u}) \to \min_{\mathbf{u}\in V_0}. \tag{30}$$

Штрафний доданок $J_\theta(\mathbf{u})$ — невід'ємний і диференційовний за Ґато

$$J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\frac{1}{\theta} \sum_{\{\alpha,\,\beta\}\in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} \left(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n}\right)^- \left(v_{\alpha n} + v_{\beta n}\right) dS\,. \tag{31}$$

Зазначимо, що диференціал Ґато $J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})$ — лінійний по **v**, однак нелінійний по **u**.

Лема 3. [10] Нехай поверхні $S_{\alpha\beta}$ кусково-гладкі та $d_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$. Тоді

$$\left(\forall \mathbf{u}\in V_0\right)\left(\exists \tilde{R}\in(0;\infty)\right)\left(\forall \mathbf{v}\in V_0\right)\left\{\left|J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})\right| \le \tilde{R}\|\mathbf{v}\|_{V_0}\right\}, \tag{32}$$

$$\left(\exists \tilde{D}\in(0;\infty)\right)\left(\forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V_0\right)\left\{\left|J'_\theta(\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})\right| \le \tilde{D}\|\mathbf{v}\|_{V_0}\|\mathbf{w}\|_{V_0}\right\}, \tag{33}$$

$$\left(\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0\right)\left\{J'_\theta(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) \ge 0\right\}. \tag{34}$$

Ці властивості дали змогу довести наступні дві теореми.

Теорема 3. Нехай виконуються умови *леми 1*, *леми 2* та *леми 3*. Тоді задача (30) має єдиний розв'язок та її розв'язання еквівалентне розв'язанню в просторі V_0 нелінійного по **u** варіаційного рівняння

$$F'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) - H'(\mathbf{u},\mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) = 0, \quad \forall\, \mathbf{v}\in V_0, \quad \mathbf{u}\in V_0. \tag{35}$$

Теорема 4. Нехай виконуються умови *леми 1*, *леми 2* та *леми 3*. Окрім цього, нехай $\bar{\mathbf{u}}_\theta \in V_0$ — розв'язок задачі (30) (варіаційного рівняння (35)) для $\theta > 0$, а $\bar{\mathbf{u}}_* \in K$ — розв'язок задачі (27) (варіаційної нерівності (28)). Тоді $\left\|\bar{\mathbf{u}}_\theta - \bar{\mathbf{u}}_*\right\|_{V_0} \underset{\theta\to 0}{\to} 0$.

4. Ітераційні методи для нелінійних варіаційних рівнянь

У рефлексивному банаховому просторі V розглянемо абстрактне варіаційне рівняння

$$\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = Y(\mathbf{v}), \quad \forall\, \mathbf{v} \in V, \quad \mathbf{u} \in V, \tag{36}$$

де $\Phi: V \times V \to \mathbb{R}$ — деякий функціонал, лінійний по $\mathbf{v}$, але нелінійний по $\mathbf{u}$, а $Y: V \to \mathbb{R}$ — неперервна лінійна форма.

Для наближеного розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (36) застосуємо наступний стаціонарний ітераційний метод [10-12]

$$G\left(\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{v}\right) = G\left(\mathbf{u}^{k},\mathbf{v}\right) - \gamma\left[\, \Phi\left(\mathbf{u}^{k},\mathbf{v}\right) - Y(\mathbf{v})\,\right], \quad \forall\,\mathbf{v}\in V, \quad k = 0,1,\ldots, \tag{37}$$

де $G(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — деяка білінійна форма, задана у V, $\gamma \in \mathbb{R}$ — ітераційний параметр, $\mathbf{u}^k \in V$, $k = 1, 2, \ldots$ — k-е наближення до точного розв'язку рівняння (36), а $\mathbf{u}^0 \in V$ — початкове наближення. Ми довели таке твердження про збіжність методу (37):

Теорема 5. Нехай виконуються умови

$$\left(\forall \mathbf{u} \in V\right)\left(\exists R_\Phi \in (0;\infty)\right)\left(\forall \mathbf{v} \in V\right)\left\{ \left|\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})\right| \le R_\Phi \left\|\mathbf{v}\right\|_V \right\}, \tag{38}$$

$$\left(\exists D_\Phi \in (0;\infty)\right)\left(\forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V\right)\left\{ \left|\Phi(\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})\right| \le D_\Phi \left\|\mathbf{v}\right\|_V \left\|\mathbf{w}\right\|_V \right\}, \tag{39}$$

$$\left(\exists B_\Phi \in (0;\infty)\right)\left(\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V\right)\left\{ \Phi(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) \ge B_\Phi \left\|\mathbf{v}\right\|_V^2 \right\}. \tag{40}$$

Тоді існує єдиний розв'язок $\bar{\mathbf{u}} \in V$ нелінійного варіаційного рівняння (36). Окрім цього, нехай білінійна форма G симетрична, коерцитивна та неперервна, тобто

$$\left(\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V\right)\left\{G(\mathbf{u},\mathbf{v}) = G(\mathbf{v},\mathbf{u})\right\}, \ \left(\exists B_G \in (0;\infty)\right)\left(\forall \mathbf{u} \in V\right)\left\{ G(\mathbf{u},\mathbf{u}) \ge B_G \left\|\mathbf{u}\right\|_V^2 \right\}, \tag{41}$$

$$\left(\exists M_G \in (0;\infty)\right)\left(\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V\right)\left\{ \left|G(\mathbf{u},\mathbf{v})\right| \le M_G \left\|\mathbf{u}\right\|_V \left\|\mathbf{v}\right\|_V \right\}, \tag{42}$$

а параметр γ належить інтервалу $\left(0;2\gamma^*\right)$, де $\gamma^* = B_\Phi B_G \big/ D_\Phi^2$. Тоді для будь-якого $\mathbf{u}^k \in V$ задача, що розв'язується на кроці $k \in \mathbb{N}_0$ методу (37), має єдиний розв'язок $\mathbf{u}^{k+1} \in V$, а послідовність $\left\{\mathbf{u}^k\right\}$, отримана цим методом, збігається сильно у V до розв'язку $\bar{\mathbf{u}}$ задачі (36), тобто $\left\|\mathbf{u}^k - \bar{\mathbf{u}}\right\|_V \underset{k\to\infty}{\to} 0$. При цьому справджується оцінка

$$\left\|\mathbf{u}^{k+1} - \bar{\mathbf{u}}\right\|_G \le q \left\|\mathbf{u}^k - \bar{\mathbf{u}}\right\|_G, \quad q = \sqrt{1 - \gamma\left(2B_\Phi - \gamma\, D_\Phi^2 \big/ B_G\right) \big/ M_G} < 1, \tag{43}$$

де $\|\cdot\|_G = \sqrt{G(\cdot,\cdot)}$, а найвища швидкість збіжності в нормі $\|\cdot\|_G$ досягається для $\gamma = \gamma^*$.

Для розв'язування (36) також запропоновано нестаціонарний ітераційний метод [10], де білінійна форма G та параметр γ змінюються на кожній ітерації

$$G^k\left(\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{v}\right)=G^k\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}\right)-\gamma^k\left[\Phi\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}\right)-Y(\mathbf{v})\right],\quad \forall\,\mathbf{v}\in V,\quad k=0,1,\ldots\ . \qquad (44)$$

Встановлено умови збіжності цього методу.

Теорема 6. Нехай нелінійний функціонал Φ володіє властивостями (38)-(40), а білінійні форми G^k, $k=0,1,\ldots$, симетричні, коерцитивні з константою $B_G^*\in(0;\infty)$ і неперервні з константою $M_G^*\in(0;\infty)$. Окрім цього, нехай виконуються умови

$$\left(\exists k_0\in\mathbb{N}_0\right)\left(\forall k\ge k_0\right)\left(\forall\mathbf{u}\in V\right)\left\{G^k(\mathbf{u},\mathbf{u})\ge G^{k+1}(\mathbf{u},\mathbf{u})\right\}, \qquad (45)$$

$$\left(\exists\varepsilon\in(0;\,\overline{\gamma}^*),\ \overline{\gamma}^*=B_\Phi B_G^*\big/D_\Phi^2\right)\left(\exists k_1\in\mathbb{N}_0\right)\left(\forall k\ge k_1\right)\left\{\gamma^k\in[\varepsilon;\,2\overline{\gamma}^*-\varepsilon]\right\}. \qquad (46)$$

Тоді $\left\|\mathbf{u}^k-\overline{\mathbf{u}}\right\|_V \underset{k\to\infty}{\to} 0$, де $\left\{\mathbf{u}^k\right\}$ — послідовність, отримана методом (44), а $\overline{\mathbf{u}}\in V$ — єдиний розв'язок задачі (36).

5. Методи декомпозиції області

Тепер застосуємо описані вище ітераційні методи до розв'язування варіаційного рівняння зі штрафом (35) задачі контакту багатьох нелінійно пружних тіл. Це варіаційне рівняння можна записати у вигляді (36), де

$$\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})=A(\mathbf{u},\mathbf{v})-H'(\mathbf{u},\mathbf{v})+J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \ Y(\mathbf{v})=L(\mathbf{v}),\ \ \mathbf{u},\mathbf{v}\in V,\ \ V=V_0. \qquad (47)$$

Однак, у загальному випадку ітераційні методи (37) і (44), застосовані до розв'язування варіаційного рівняння (35), не призводять до декомпозиції задачі по підобластях. Тому запропонуємо такі варіанти цих методів, які на кожному кроці ітераційного процесу реалізують декомпозицію по підобластях.

Виберемо білінійну форму G у методі (37) наступним чином [10, 12]:

$$G(\mathbf{u},\mathbf{v})=A(\mathbf{u},\mathbf{v})+X(\mathbf{u},\mathbf{v}),\quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0, \qquad (48)$$

де $X:\,V_0\times V_0\to\mathbb{R}$ — білінійна форма, що визначається так [10, 12]:

$$X(\mathbf{u},\mathbf{v})=\frac{1}{\theta}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}^1}u_{\alpha n}v_{\alpha n}\,dS=\frac{1}{\theta}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}u_{\alpha n}v_{\alpha n}\,\psi_{\alpha\beta}\,dS,\quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0. \qquad (49)$$

Тут $S_{\alpha\beta}^1\subseteq S_{\alpha\beta}$ — деякі задані підмножини зон можливого контакту $S_{\alpha\beta}$, а $\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x})=\left\{0,\,\mathbf{x}\in S_{\alpha\beta}\setminus S_{\alpha\beta}^1\right\}\vee\left\{1,\,\mathbf{x}\in S_{\alpha\beta}^1\right\}$ — функції, які визначають ці підмножини.

Лема 4. [10] Нехай поверхні $S_{\alpha\beta}$ кусково-гладкі. Тоді виконуються умови

$$\left(\forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0\right)\left\{X(\mathbf{u},\mathbf{v})=X(\mathbf{v},\mathbf{u})\right\},\quad \left(\forall\mathbf{u}\in V_0\right)\left\{X(\mathbf{u},\mathbf{u})\ge 0\right\}, \qquad (50)$$

$$\left(\exists M_X\in(0;\infty)\right)\left(\forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0\right)\left\{\left|X(\mathbf{u},\mathbf{v})\right|\le M_X\left\|\mathbf{u}\right\|_{V_0}\left\|\mathbf{v}\right\|_{V_0}\right\}. \qquad (51)$$

Ітераційний метод (37) із білінійною формою (48) можна переписати так

$$A\left(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1},\mathbf{v}\right)+X\left(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1},\mathbf{v}\right)=L(\mathbf{v})+X\left(\mathbf{u}^{k},\mathbf{v}\right)+H'\left(\mathbf{u}^{k},\mathbf{v}\right)-J'_{\theta}\left(\mathbf{u}^{k},\mathbf{v}\right),\ \forall\mathbf{v}\in V_0\,, \quad (52)$$

$$\mathbf{u}^{k+1}=\gamma\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}+(1-\gamma)\mathbf{u}^{k}, \quad k=0,1,\ldots\ . \quad (53)$$

Із *теореми 5* отримуємо твердження про збіжність методу (52), (53).

Теорема 7. Нехай виконуються умови *леми 1*, *леми 2*, *леми 3* та *леми 4.* Тоді, якщо параметр γ вибрано з інтервала $\left(0;2\gamma^*\right)$, де $\gamma^*=B_\Phi B_G\big/D_\Phi^2$, $B_G=B_A$, $B_\Phi=B,\ D_\Phi=M_A+D+\tilde{D}$, то послідовність $\left\{\mathbf{u}^k\right\}$, отримана методом (52), (53), збігається сильно у V_0 до точного розв'язку $\overline{\mathbf{u}}\in V_0$ варіаційного рівняння (35).

Тепер запишемо ітераційний метод (52), (53) у розширеному вигляді

$$\sum_{\alpha=1}^{N}a_\alpha\left(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1},\mathbf{v}_\alpha\right)+\frac{1}{\theta}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}\tilde{u}_{\alpha n}^{k+1}v_{\alpha n}\psi_{\alpha\beta}\,dS=\sum_{\alpha=1}^{N}h'_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha^{k},\mathbf{v}_\alpha\right)+\sum_{\alpha=1}^{N}l_\alpha\left(\mathbf{v}_\alpha\right)+$$

$$+\frac{1}{\theta}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}u_{\alpha n}^{k}v_{\alpha n}\psi_{\alpha\beta}\,dS+\frac{1}{\theta}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}\left(d_{\alpha\beta}-u_{\alpha n}^{k}-u_{\beta n}^{k}\right)^{-}v_{\alpha n}\,dS\,, \quad (54)$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1}=\gamma\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}+(1-\gamma)\mathbf{u}_\alpha^{k}, \quad \alpha=\overline{1,N}, \quad k=0,1,\ldots\ . \quad (55)$$

Оскільки спільні величини для підобластей відомі з попередньої ітерації, то варіаційне рівняння (54) розпадається на N паралельних варіаційних рівнянь у підобластях Ω_α , і метод (54), (55) еквівалентний ітераційному процесу [20]

$$a_\alpha\left(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1},\mathbf{v}_\alpha\right)+\frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}\psi_{\alpha\beta}\tilde{u}_{\alpha n}^{k+1}v_{\alpha n}\,dS=l_\alpha\left(\mathbf{v}_\alpha\right)+\frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}\psi_{\alpha\beta}u_{\alpha n}^{k}v_{\alpha n}\,dS+$$

$$+\frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}\left(d_{\alpha\beta}-u_{\alpha n}^{k}-u_{\beta n}^{k}\right)^{-}v_{\alpha n}\,dS+h'_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha^{k},\mathbf{v}_\alpha\right), \quad \forall\mathbf{v}_\alpha\in V_\alpha^0\,, \quad (56)$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1}=\gamma\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}+(1-\gamma)\mathbf{u}_\alpha^{k}, \quad \alpha=\overline{1,N}, \quad k=0,1,\ldots\ . \quad (57)$$

На кожній ітерації k методу (56), (57) потрібно паралельно розв'язувати N лінійних варіаційних задач (56) в окремих тілах Ω_α , які відповідають задачам теорії пружності з додатковими об'ємними силами у тілах і з умовами Робіна на зонах $S_{\alpha\beta}$

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^{k+1}+\psi_{\alpha\beta}\tilde{u}_{\alpha n}^{k+1}\big/\theta=\left(d_{\alpha\beta}-u_{\alpha n}^{k}-u_{\beta n}^{k}\right)^{-}\big/\theta+\psi_{\alpha\beta}u_{\alpha n}^{k}\big/\theta, \quad \mathbf{x}\in S_{\alpha\beta}\,, \quad (58)$$

де $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^{k+1}$ — невідомі нормальні напруження. Тому ітераційний метод (56), (57) належить до *паралельних схем Робіна декомпозиції області* [10, 12, 20].

Вибираючи різні характеристичні функції $\psi_{\alpha\beta}=\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}),\ \beta\in B_\alpha,\ \alpha=\overline{1,N}$, тобто різні підмножини $S_{\alpha\beta}^1\subseteq S_{\alpha\beta}$ у білінійній формі (49), отримаємо різні варіанти методу декомпозиції області (56), (57). Так, покладаючи $\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\equiv 0$, тобто $S^1_{\alpha\beta} = \varnothing,\ \forall \alpha, \beta$, отримаємо *паралельну схему Неймана* [20]. Інший граничний випадок відповідає $\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv 1$, тобто $S^1_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta},\ \forall \alpha, \beta$. Таку схему декомпозиції області ми назвали *повною паралельною схемою Робіна.* Окрім цього, функції $\psi_{\alpha\beta}$ можна вибирати по різному на кожній ітерації *k*, тобто

$$\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \psi^k_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \left\{0,\ \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta} \setminus S^k_{\alpha\beta}\right\} \vee \left\{1,\ \mathbf{x} \in S^k_{\alpha\beta}\right\},\ \ \beta \in B_\alpha,\ \ \alpha = \overline{1,N}, \qquad (59)$$

де $S^k_{\alpha\beta} \subseteq S_{\alpha\beta}$ — деякі задані підмножини зон можливого контакту. Тоді отримаємо нестаціонарні схеми декомпозиції області [20], які еквівалентні нестаціонарному методу (44) для рівняння (35) з $\gamma^k = \gamma,\ k = 0,1,\ldots$, та білінійними формами

$$G^k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + X^k(\mathbf{u},\mathbf{v}),\quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0,\quad k = 0,1,\ldots, \qquad (60)$$

$$X^k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{\theta}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S^k_{\alpha\beta}} u_{\alpha n} v_{\alpha n}\, dS = \frac{1}{\theta}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}} u_{\alpha n} v_{\alpha n}\, \psi^k_{\alpha\beta}\, dS,\ \ \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0. \qquad (61)$$

Зокрема, запропоновано такий вибір характеристичних функцій [9, 10, 12]

$$\psi^k_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \chi^k_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0,\ d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - u^k_{\alpha n}(\mathbf{x}) - u^k_{\beta n}(\mathbf{x}') \ge 0 \\ 1,\ d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - u^k_{\alpha n}(\mathbf{x}) - u^k_{\beta n}(\mathbf{x}') < 0 \end{cases},\ \ \mathbf{x}' = P(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}. \qquad (62)$$

Тоді одержимо нестаціонарну ітераційну схему

$$a_\alpha\left(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha\right) + \frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}} \chi^k_{\alpha\beta}\left[\tilde{u}^{k+1}_{\alpha n} - \left(d_{\alpha\beta} - u^k_{\beta n}\right)\right] v_{\alpha n}\, dS = l_\alpha\left(\mathbf{v}_\alpha\right) + h'_\alpha\left(\mathbf{u}^k_\alpha, \mathbf{v}_\alpha\right), \qquad (63)$$

$$\mathbf{u}^{k+1}_\alpha = \gamma\,\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}_\alpha + (1-\gamma)\mathbf{u}^k_\alpha,\quad \alpha = \overline{1,N},\quad k = 0,1,\ldots\ . \qquad (64)$$

Тут на кожному кроці необхідно розв'язувати задачі зі заданими через штраф переміщеннями. Тому цю схему ми умовно назвали *нестаціонарною схемою Діріхле* [20].

У працях [10, 12] за допомогою числового експерименту показано, що нестаціонарна схема (63), (64) для задач контакту лінійно пружних тіл ($\omega_\alpha = 0,\ \alpha = \overline{1,N}$) збігається за ширшого діапазону ітераційних параметрів γ, ніж стаціонарні схеми декомпозиції області (56), (57), та її швидкість збіжності вища.

Зазначимо, що під час побудови описаних вище схем декомпозиції області ми застосовували лише перший диференціал Ґато $H'(\mathbf{u},\mathbf{v})$ неквадратичного функціонала $H(\mathbf{u})$. Однак цей функціонал має ще й другий диференціал Ґато $H''(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$, застосування якого в ітераційних методах для розв'язування варіаційного рівняння (35) може поліпшити їх швидкість збіжності. Тому ми запропонували ще один клас ітераційних методів і схем декомпозиції області для розв'язування (35), під час побудови яких використовується другий диференціал Ґато функціонала $H(\mathbf{u})$.

Виберемо білінійні форми G^k у методі (44) для розв'язування (35) у вигляді

$$G^k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \partial^2 F_\theta\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}\right) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) - H''\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}\right) + \partial^2 J_\theta\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}\right),\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0, \quad (65)$$

$$\partial^2 J_\theta\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}\right) = \frac{1}{\theta}\sum_{\{\alpha,\beta\}\in Q}\ \int_{S_{\alpha\beta}} \chi_{\alpha\beta}^k\left(u_{\alpha n}+u_{\beta n}\right)\left(v_{\alpha n}+v_{\beta n}\right)dS, \quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0, \quad (66)$$

де $\partial^2 J_\theta\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}\right)$ та $\partial^2 F_\theta\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}\right)$ — другі субдиференціали функціоналів J_θ та F_θ у точці $\mathbf{u}^k\in V_0$ за напрямками $\mathbf{u}\in V_0$ та $\mathbf{v}\in V_0$, а $\chi_{\alpha\beta}^k$ — функції, що мають вигляд (62).

Ітераційний метод (44) із білінійними формами (65) для $\gamma^k = 1$, $k = 0,1,\ldots$, відповідає напівгладкому методу Ньютона для розв'язування варіаційного рівняння (35). Однак нестаціонарний ітераційний метод (44), (65) не призводить до декомпозиції задачі (35) по підобластях.

Тепер білінійні форми G^k у методі (44) виберемо таким чином [20]

$$G^k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) - H''\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}\right) + X^k(\mathbf{u},\mathbf{v}), \quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0, \quad (67)$$

де X^k має вигляд (61). Покажемо, що такий вибір G^k призведе до декомпозиції.

Ітераційний метод (44) із білінійними формами (67) можна записати у вигляді

$$A\left(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1},\mathbf{v}\right) - H''\left(\mathbf{u}^k,\tilde{\mathbf{u}}^{k+1},\mathbf{v}\right) + X^k\left(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1},\mathbf{v}\right) = L(\mathbf{v}) - H''\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{u}^k,\mathbf{v}\right) +$$

$$+ H'\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}\right) + X^k\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}\right) - J'_\theta\left(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}\right), \quad \forall\mathbf{v}\in V_0, \quad (68)$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \gamma^k\,\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + \left(1-\gamma^k\right)\mathbf{u}^k, \quad k = 0,1,\ldots\ . \quad (69)$$

Варіаційне рівняння (68) розпадається на N паралельних варіаційних рівнянь у підобластях Ω_α, і метод (68), (69) еквівалентний ітераційному процесу

$$a_\alpha\left(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1},\mathbf{v}_\alpha\right) - h''_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha^k,\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1},\mathbf{v}_\alpha\right) + \frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in B_\alpha}\ \int_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta}^k \tilde{u}_{\alpha n}^{k+1} v_{\alpha n}dS = l_\alpha\left(\mathbf{v}_\alpha\right) + h'_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha^k,\mathbf{v}_\alpha\right) -$$

$$- h''_\alpha\left(\mathbf{u}_\alpha^k,\mathbf{u}_\alpha^k,\mathbf{v}_\alpha\right) + \frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in B_\alpha}\ \int_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta}^k u_{\alpha n}^k v_{\alpha n}dS + \frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in B_\alpha}\ \int_{S_{\alpha\beta}} \left(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k\right)^- v_{\alpha n}dS, \quad (70)$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \gamma^k\,\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + \left(1-\gamma^k\right)\mathbf{u}_\alpha^k, \quad \alpha = \overline{1,N}, \quad k = 0,1,\ldots\ . \quad (71)$$

Отже отримали ще один клас *схем Робіна* декомпозиції області (70), (71) для розв'язування задачі (35), в якому, на відміну від схем Робіна (56), (57), використовуються другі диференціали Ґато неквадратичних функціоналів h_α.

Вибираючи різні функції $\psi_{\alpha\beta}^k$, отримаємо різні часткові випадки методу декомпозиції області (70), (71). Зокрема, вибираючи $\psi_{\alpha\beta}^k$ у вигляді (62), одержимо *нестаціонарну схему Діріхле*, що містить другі диференціали Ґато функціоналів h_α.

Аналіз числової ефективності розроблених методів декомпозиції області здійснено для низки плоских задач про односторонній контакт лінійно пружних тіл ($\omega_\alpha = 0$) [9, 10, 12]. При цьому для числового розв'язування лінійних задач теорії пружності в окремих тілах застосовано метод скінченних елементів. Досліджено вплив вибору ітераційних параметрів, параметра штрафу та згущення скінченно-елементного розбиття на збіжність схем МДО. Встановлено, що найширшу область ефективної збіжності для параметра γ мають нестаціонарна схема Діріхле та стаціонарна схема Робіна з поверхнями $S^1_{\alpha\beta}$, близькими до істинних зон контакту.

Висновки. Для розв'язування задач про односторонній контакт багатьох нелінійно пружних тіл запропоновано на континуальному рівні два класи паралельних методів декомпозиції області, що ґрунтуються на методі штрафу для нелінійних варіаційних нерівностей та стаціонарних і нестаціонарних ітераційних методах для нелінійних варіаційних рівнянь. В алгоритмах МДО першого класу використано лише перші диференціали Ґато енергії нелінійної деформації кожного з тіл, а в алгоритмах другого класу застосовано ще й другі диференціали Ґато цієї енергії.

Сформульовано теореми про існування та єдиність розв'язку варіаційної задачі зі штрафом, збіжність за параметром штрафу і збіжність схем МДО.

Перевагами запропонованих МДО є простота алгоритмів і регуляризація вихідної контактної задачі завдяки застосуванню варіаційного формулювання зі штрафом. Ці методи містять лише один ітераційний цикл, у якому ітерація по підобластях поєднується з ітерацією для врахування контактних умов та з ітерацією для врахування нелінійності співвідношень між деформаціями і напруженнями.

Література

[1] *Bayada, G.* Algorithme de Neumann-Dirichlet pour des problèmes de contact unilatéral: Résultat de convergence / *G. Bayada, J. Sabil, T. Sassi* // C. R. Acad. Sci. Paris. — 2002. — Ser. I 335. — P. 381-386.

[2] *Bayada, G.* A Neumann-Neumann domain decomposition algorithm for the Signorini problem / *G. Bayada, J. Sabil, T. Sassi* // Appl. Math. Lett. — 2004. — Vol. 17, No 10. — P. 1153-1159.

[3] *Koko, J.* An optimization-bazed domain decomposition method for a two-body contact problem / *J. Koko* // Num. Func. Anal. Optim. — 2003. — Vol. 24, No 5-6. — P. 586-605.

[4] *Sassi, T.* Generalization of Lion's nonoverlapping domain decomposition method for contact problems / *T. Sassi, M. Ipopa, F.-X. Roux* // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. — 2008. — Vol. 60. — P. 623-630.

[5] *Koko, J.* Uzawa block relaxation domain decomposition method for a two-body frictionless contact problem / *J. Koko* // Appl. Math. Lett. — 2009. — Vol. 22, No 10. — P. 1534-1538.

[6] *Avery, P.* The FETI family of domain decomposition methods for inequality-constrained quadratic programming: Application to contact problems with conforming and nonconforming interfaces / *P. Avery, C. Farhat* // Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. — 2009. — Vol. 198. — P. 1673-1683.

[7] *Dostal, Z.* A scalable FETI–DP algorithm with non-penetration mortar conditions on contact interface / *Z. Dostal, D. Horak, D. Stefanica* // J. Comp. Appl. Math. — 2009. — Vol. 231, Issue 2. — P. 577-591.

[8] *Schöberl, J.* Efficient contact solvers based on domain decomposition techniques / *J. Schöberl* // Computers & Mathematics with Applications. — 2001. — Vol. 42, Issues 8-9. — P. 1217-1228.

[9] *Прокопишин, І. І.* Паралельні схеми методу декомпозиції області для контактних задач теорії пружності без тертя / *І. І. Прокопишин* // Вісник Львівського університету. Сер. прикл. математика та інформатика. — 2008. — Вип. 14. — С. 123-133.

[10] *Прокопишин, І. І.* Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач контакту пружних тіл: дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фіз.-мат. наук: спеціальність 01.05.02 — «Мат. моделювання та обчисл. методи». — Львів, 2010. — 163 с.
[11] *Dyyak, I. I.* Convergence of the Neumann parallel scheme of the domain decomposition method for problems of frictionless contact between several elastic bodies / *I. I. Dyyak, I. I. Prokopyshyn* // J. Math. Sci. — 2010. — Vol. 171, No 4. — P. 516-533.
[12] *Dyyak, I. I.* Domain decomposition schemes for frictionless multibody contact problems of elasticity / *I. I. Dyyak, I. I. Prokopyshyn* // Numerical Mathematics and Advanced Applications 2009: Proceedings of ENUMATH 2009, the 8th European Conference on Numarical Mathematics and Advanced Applications, Uppsala, July 2009. — Springer-Verlag, 2010. — P. 297-305.
[13] *Ильюшин, А. А.* Пластичность / *А. А. Ильюшин*. — Москва-Ленинград: ОГИЗ, 1948. — 376 с.
[14] *Кравчук, А. С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования / *А. С. Кравчук* // ПММ. — 1978. — Т. 42, № 3. — С. 467-473.
[15] *Лионс, Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Ж.-Л. Лионс*. — Москва: Мир, 1972. — 588 с.
[16] *Kikuchi, N.* Contact Problem in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods / *N. Kikuchi, J. T. Oden*. — Philadelphia: SIAM, 1988. — 489 p.
[17] *Кузьменко, В. И.* О вариационном подходе к теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел / *В. И. Кузьменко* // ПММ. — 1979. — Т. 43, № 5. — С. 893-901.
[18] *Сеа, Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы / *Ж. Сеа*. — Москва: Мир, 1973. — 244 с.
[19] *Гловински, Р.* Численное исследование вариационных неравенств / *Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер*. — Москва: Мир, 1979. — 574 с.
[20] Penalty Robin-Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elastic bodies / *I. I. Prokopyshyn, I. I. Dyyak, R. M. Martynyak, I. A. Prokopyshyn* // Proceedings of DD20, the 20th International Conference on Domain Decomposition Methods, University of California at San Diego, February 2011. — 8 p. (у друці).

Domain decomposition methods for problems of unilateral contact between nonlinear elastic bodies

Ihor I. Prokopyshyn

We have proposed on continuous level several domain decomposition methods to solve unilateral multibody contact problems of nonlinear elasticity. They are based on the penalty method for nonlinear variational inequalities and some iterative methods for nonlinear variational equations. We have shown the existence and uniqueness of a solution of the penalty variational equation and have established the convergence conditions of domain decomposition methods and the penalty method.

Методы декомпозиции области для задач об одностороннем контакте нелинейно-упругих тел

Игорь И. Прокопышин

Для решения задач одностороннего контакта нелинейно-упругих тел на континуальном уровне предложен ряд методов декомпозиции области, которые основаны на методе штрафа для нелинейных вариационных неравенств и некоторых итерационных методах для нелинейных вариационных уравнений. Показаны существование и единственность решения вариационной задачи со штрафом, а также сходимость по параметру штрафа. Установлены условия сходимости методов декомпозиции области.

Представлено доктором фізико-математичних наук Р. Мартиняком Отримано 24.11.11