

## Двовимірні стаціонарні задачі ідентифікації порожнин у циліндричних тілах на основі даних ІЧ-термографії

Василь Чекурін<sup>1</sup>, Олег Сінькевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> д. ф.-м. н., професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: chekurin@iapmm.lviv.ua

<sup>2</sup> Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів

*Розглядається метод неруйнівного виявлення та ідентифікації геометричних параметрів порожнини у твердому тілі, який базується на даних, отриманих шляхом збудження в об'єкті стаціонарного теплового процесу, та вимірюванні параметрів температурного поля його поверхні. З використанням граничних інтегральних рівнянь побудовано математичну модель теплового зондування довгого циліндричного тіла з тунельною порожниною шляхом сканування його поверхні зосередженим тепловим потоком. У рамках моделі встановлені інформативні параметри та сформульовані пряма й обернена задачі ідентифікації порожнини. На основі числових розв'язків прямих задач, отриманих із використанням методу граничних елементів, проведено кількісне дослідження інформативних параметрів теплового зондування. З використанням числового експерименту на конкретному прикладі оцінено обчислювальну ефективність запропонованого методу. Аналізується можливість застосування отриманих результатів для розвитку методології неруйнєвної діагностики елементів конструкцій із використанням техніки ІЧ-термографії.*

**Ключові слова:** ідентифікація геометричних параметрів неоднорідних твердих тіл, метод термографії, математичні моделі, обернені задачі, метод граничних елементів.

**Вступ.** Методи неруйнівного контролю, що базуються на вимірюванні температурного поля на поверхні об'єкта з використанням техніки інфрачервоної (ІЧ) термографії, знаходять все ширше використання для виявлення структурних і фізичних неоднорідностей у твердих тілах (дефектів, порожнин, чужорідних включень, пошкоджень тощо) [1, 2]. Ці методи реалізують шляхом збудження в об'єкті теплового процесу (стаціонарного чи нестаціонарного) та фіксації теплового зображення його поверхні з використанням ІЧ-камери. Оскільки просторова неоднорідність теплофізичних властивостей матеріалу, яка спричинена наявністю в об'єкті структурних дефектів, збуджує температурне поле, то, аналізуючи отримане растрове зображення, можна візуально виявити підповерхневі дефекти й оцінити їх розміри в плані.

У відомих підходах переважно застосовують методіку збудження теплового процесу в об'єкті шляхом нагрівання його однорідним зовнішнім тепловим потоком. Вважається, що за відсутності в об'єкті неоднорідностей, температура поверхні нагрівання є практично однорідна, а поява на тепловому зображенні цієї поверхні контрастних плям свідчить про наявність підповерхневих неоднорідностей.

Проте, слід підкреслити, що розміри плями на тепловому зображенні, залежать не тільки від геометричних параметрів неоднорідності, яка її спричинила, але й від інших чинників — глибини її залягання, теплофізичних властивостей, інтенсивності збудженого теплового процесу тощо. У випадку об'єктів складної форми та/чи великих розмірів буває важко забезпечити однорідне нагрівання поверхні. Тому область застосування цієї методики обмежується об'єктами з пласкою поверхнею нагрівання. До того ж підхід, який базується на візуальному аналізі теплового зображення поверхні об'єкта, часто не дозволяє ідентифікувати геометричні параметри та глибину залягання неоднорідностей у твердих тілах з достатньою точністю.

Можливий й інший підхід, що не передбачає візуалізації термограм, а використовує результати вимірювання температурного поля поверхні об'єкта як вхідні дані для відповідних обернених задач ідентифікації. Такі задачі можна формулювати в рамках математичних моделей, які враховують геометрію об'єкта та включень, їх теплофізичні характеристики, умови нагрівання й охолодження об'єкта, а також умови теплообміну на межі розділу матеріалів об'єкта та включення.

Так у монографії [3] розглядають півпростір, що містить включення у формі прямокутного паралелепіпеда. Поверхня півпростору нагрівається зовнішнім однорідним тепловим потоком і охолоджується за механізмом конвективного теплообміну із середовищем. На межі включення приймають умови ідеального теплового контакту. Для розв'язування прямих і обернених задач ідентифікації автори застосовують скінченно-різницеву апроксимацію задачі.

У праці [4] розроблено математичну модель локального теплового зондування пласко-шаруватого твердого тіла скінченної товщини, в рамках якої розглянуті задачі ідентифікації його структури та теплофізичних параметрів. Досліджували випадок збудження теплового процесу в об'єкті шляхом локального нагрівання однієї з поверхонь структури за умови підтримання на протилежній поверхні однорідної температури. За інформативні параметри для варіаційного формулювання оберненої задачі ідентифікації використали дані про розподіли температур і теплових потоків на зовнішніх поверхнях структури.

У цій статті розглядається модель теплового зондування циліндричного об'єкта шляхом сканування його поверхні зосередженим тепловим потоком і вимірювання температурного поля цієї поверхні з використанням техніки ПЧ-термографії. У рамках моделі сформульовані двовимірні стаціонарні пряма й обернена задачі ідентифікації геометричних параметрів циліндричної тунельної порожнини на основі даних про розподіли температури та густини теплового потоку на поверхні об'єкта. Розроблено ітераційний алгоритм розв'язування оберненої задачі ідентифікації.

## 1. Математична модель теплового зондування об'єкта

Розглянемо тверде тіло, що має форму довгого циліндра (рис. 1). Поперечний переріз  $S$  циліндра обмежений достатньо гладким контуром  $\Gamma$ . Тіло містить тунельну порожнину у формі кругового циліндра радіуса  $r_0$ ;  $S_0$  — поперечний

переріз порожнини. Вісь порожнини коліна-арна осі циліндричного тіла. Центр кола  $\Gamma_0$ , утвореного перетином поверхні порожнини з поперечним перерізом  $\mathcal{S}$  тіла, визначають полярні координати  $(\rho_0, \varphi_0)$ .

Для збудження теплового процесу в тілі його нагрівають зовнішнім тепловим потоком, що падає на бічну поверхню тіла. Густина  $\mathbf{J}_0$  потоку тепла не залежить від координати  $x_3$  у напрямку осі циліндричного тіла:  $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, x_2)$ .

Тіло охолоджується за механізмом конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем з температурою  $T_c$ .

За таких умов у поперечних перерізах тіла, що достатньо віддалені від його торцевих поверхонь, виникає двовимірне температурне поле  $T(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}/\mathcal{S}_0$ , яке за стаціонарних умов визначає крайова задача

$$\Delta T(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{S}/\mathcal{S}_0, \quad (1)$$

$$-\kappa(\nabla T(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = J_0(\mathbf{x}) - h(T(\mathbf{x}) - T_c), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2)$$

$$\nabla T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = -h(T(\mathbf{x}) - T_c), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0. \quad (3)$$

Тут  $\Delta$  та  $\nabla$  — двовимірні оператори Лапласа та градієнта в площині  $x_1Ox_2$ ,  $\kappa$  — коефіцієнт теплопровідності матеріалу тіла,  $\mathbf{n}$  — зовнішня нормаль до контуру  $\Gamma \cup \Gamma_0$ ,  $h$  — коефіцієнт конвективного теплообміну тіла з середовищем через зовнішню поверхню,  $J_0(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$ .

Як випливає із співвідношень (1)-(3), стаціонарне температурне поле  $T(\mathbf{x})$ , яке виникає за таких умов у тілі та на його поверхні, залежить від геометричних параметрів порожнини, а саме — від її місця розташування, яке визначається параметрами  $\rho_0$  і  $\varphi_0$ , та її розміру, який визначається параметром  $r_0$ . Тож вимірюючи розподіл температури  $T(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$  на поверхні тіла за заданих умов теплообміну, отримуємо певну апостеріорну інформацію щодо геометричних параметрів порожнини.

Крайовій задачі (1)-(3) відповідає граничне інтегральне рівняння [5]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\theta(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \left( Q(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \frac{h}{\kappa} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right) \theta(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_0} Q(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \theta(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = \\ & = \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \frac{1}{\kappa} (J_0(\mathbf{x}) + hT_c) dl(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in \Gamma \cup \Gamma_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут використані позначення  $\theta(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \Gamma \cup \Gamma_0}$ ,  $\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$ ,  $r(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ ,

$$Q(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (\nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}).$$

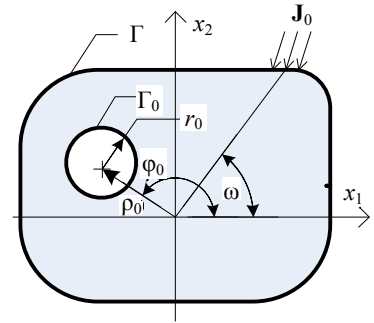


Рис. 1. Схема зондування тіла

Стаціонарне температурне поле  $\bar{\theta}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$  за умов теплообміну (2) задовольняє граничне інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \bar{\theta}(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \left( Q(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \frac{h}{\kappa} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right) \bar{\theta}(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = \\ & = \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \frac{1}{\kappa} (J_0(\mathbf{x}) + hT_c) dl(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in \Gamma. \end{aligned} \quad (5)$$

Із рівнянь (4), (5) випливає таке граничне інтегральне рівняння стосовно збурення  $\tilde{\theta}(\mathbf{x}) \equiv \theta(\mathbf{x}) - \bar{\theta}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma \cup \Gamma_0$ , температурного поля поверхні тіла, зумовленого порожниною

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \tilde{\theta}(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \left( Q(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \frac{h}{\kappa} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right) \tilde{\theta}(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_0} Q(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \tilde{\theta}(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = \\ & = \int_{\Gamma_0} Q(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \bar{\theta}_0(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in \Gamma \cup \Gamma_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут  $\bar{\theta}_0(\mathbf{x}) = \bar{T}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \Gamma_0}$ ,

$$\bar{T}(\mathbf{y}) = - \int_{\Gamma} \left( Q(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \frac{h}{\kappa} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right) \bar{\theta}(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \frac{1}{\kappa} (J_0(\mathbf{x}) + hT_c) dl(\mathbf{x}), \quad (7)$$

$\bar{\theta}(\mathbf{x})$  — розв'язок граничного інтегрального рівняння (5).

Умови нагрівання об'єкта визначають: тепловий потік  $J_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$ , температура середовища  $T_c$  та коефіцієнт теплообміну  $h$ . Виходитимемо з того, що температурне поле  $\theta(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$ , що виникає за заданих умов нагрівання, можна визначити емпірично, а незбурене температурне поле  $\bar{\theta}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$  цієї поверхні відоме апіорі. Отже за інформативний параметр ідентифікації порожнини можна прийняти збурення  $\tilde{\theta}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$  температурного поля поверхні тіла.

Із рівняння (6) випливає, що за відсутності порожнини  $\tilde{\theta}(\mathbf{x}) \equiv 0$ . Тож ненульове відхилення температурного поля поверхні об'єкта за дії зовнішнього теплового потоку  $J_0(\mathbf{x})$  від температурного поля тіла без порожнини свідчатиме про наявність неоднорідності в об'ємі тіла. Вимірюючи з використанням техніки ІЧ-термографії температуру поверхні тіла та визначаючи на основі даних вимірювання емпіричну залежність  $\tilde{\theta}^e(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$ , отримуємо деяку апостеріорну інформацію щодо параметрів порожнини, які підлягають ідентифікації. Змінюючи умови нагрівання (розподіл теплового потоку  $J_0(\mathbf{x})$  та/чи теплообмін тіла із зовнішнім середовищем) і проводячи вимірювання температури поверхні  $\Gamma$ , щораз отримуватимемо нові емпіричні дані про параметри порожнини. Зокрема,

теплове зондування об'єкта можна здійснювати скануванням його зовнішньої поверхні  $\Gamma$  зосередженим тепловим потоком.

Граничні інтегральні рівняння (5), (6), разом із заданими умовами нагрівання у вигляді розподілу зовнішнього теплового потоку  $J_0(\mathbf{x})$ , температури зовнішнього середовища  $T_c$  та коефіцієнта конвективного теплообміну  $h$ , утворюють математичну модель теплового зондування об'єкта.

## 2. Пряма задача та граничноелементна методика її розв'язування

Пряма задача ідентифікації полягає у визначенні в рамках сформульованої математичної моделі інформативних параметрів теплового зондування за заданими параметрами порожнини та умовами нагрівання.

Нехай задані контур  $\Gamma$ , який визначає геометрію зовнішньої поверхні об'єкта, радіус  $r_0$  і координати  $x_0 = \rho_0 \cos \varphi_0$ ,  $y_0 = \rho_0 \sin \varphi_0$  центра контуру  $\Gamma_0$ , які визначають геометрію циліндричної порожнини, та коефіцієнт теплопровідності  $\kappa$  матеріалу тіла. Задані також функція теплового потоку  $J_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$ , температура  $T_c$  зовнішнього середовища та коефіцієнт конвективного теплообміну  $h$ . Встановимо функцію  $\tilde{\theta}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$ , яка визначає збурення температурного поля зовнішньої поверхні об'єкта, зумовлене наявністю в ньому порожнини.

Сформульована пряма задача ідентифікації зводиться до розв'язування граничного рівняння (5), обчислення функції  $\bar{\theta}_0(\mathbf{x})$ , із використанням формули (7), і наступного розв'язування інтегрального рівняння (6).

Розв'язування інтегральних рівнянь (5) і (6) проведемо наближено, використовуючи метод граничних елементів [5, 6]. Щоб спростити обчислення, обмежимося тут випадком тіла у формі кругового циліндра радіусу  $R$ . З урахуванням цього перепишемо інтегральні рівняння (5) і (6) у вигляді

$$\frac{1}{2}\bar{\theta}(\tau) + R \int_0^{2\pi} \left( Q_{\Gamma}(\tau, t) + \frac{h}{\kappa} \Phi_{\Gamma}(\tau, t) \right) \bar{\theta}(t) dt = \frac{R}{\kappa} \int_0^{2\pi} \Phi_{\Gamma}(\tau, t) (J_0(t) + hT_c) dt, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\tilde{\theta}(\tau) + R \int_0^{2\pi} \left( Q_{\Gamma}(\tau, t) + \frac{h}{\kappa} \Phi_{\Gamma}(\tau, t) \right) \tilde{\theta}(t) dt + r_0 \int_0^{2\pi} Q_{\Gamma_0}(\tau, t') \tilde{\theta}(t') dt' = \\ = r_0 \int_0^{2\pi} Q_{\Gamma_0}(\tau, t') \bar{\theta}(t') dt', \quad \tau \in [0, 2\pi), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\tilde{\theta}(\tau') + R \int_0^{2\pi} \left( Q_{\Gamma_0\Gamma}(\tau', t) + \frac{h}{\kappa} \Phi_{\Gamma_0\Gamma}(\tau', t) \right) \tilde{\theta}(t) dt + r_0 \int_0^{2\pi} Q_{\Gamma_0}(\tau', t') \tilde{\theta}(t') dt' = \\ = r_0 \int_0^{2\pi} Q_{\Gamma_0}(\tau', t') \bar{\theta}(t') dt', \quad \tau' \in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

Тут  $\tau$  і  $t$  та  $\tau'$  і  $t'$  — полярні кути точок на контурах  $\Gamma$  та  $\Gamma_0$  стосовно координатних систем з центрами  $(x=0, y=0)$  та  $(x=x_0, y=y_0)$  відповідно;

$$\begin{aligned} \Phi_{\Gamma}(\tau, t) &\equiv \Phi(\mathbf{y}(\tau), \mathbf{x}(t)), \mathbf{y}(\tau), \mathbf{x}(t) \in \Gamma, \quad \Phi_{\Gamma_0\Gamma}(\tau', t) \equiv \Phi(\mathbf{y}(\tau'), \mathbf{x}(t)), \mathbf{y}(\tau') \in \Gamma_0, \mathbf{x}(t) \in \Gamma, \\ Q_{\Gamma}(\tau, t) &\equiv Q(\mathbf{y}(\tau), \mathbf{x}(t)), \mathbf{y}(\tau), \mathbf{x}(t) \in \Gamma, \quad Q_{\Gamma_0\Gamma}(\tau, t') \equiv Q(\mathbf{y}(\tau), \mathbf{x}(t')), \mathbf{y}(\tau) \in \Gamma, \mathbf{x}(t') \in \Gamma_0, \\ Q_{\Gamma_0\Gamma}(\tau', t) &\equiv Q(\mathbf{y}(\tau'), \mathbf{x}(t)), \mathbf{y}(\tau') \in \Gamma_0, \mathbf{x}(t) \in \Gamma, \quad Q_{\Gamma_0}(\tau', t') \equiv Q(\mathbf{y}(\tau'), \mathbf{x}(t')), \mathbf{y}(\tau'), \mathbf{x}(t') \in \Gamma_0. \end{aligned}$$

Дискретизацію рівнянь (8) і (9) здійснимо шляхом розбивання контурів  $\Gamma$  та  $\Gamma_0$  вузловими точками на скінченні множини дуг  $\gamma_i \subset \Gamma, i \in \overline{1, N_{\Gamma}}$ , та  $\gamma_j^0 \subset \Gamma_0, j \in \overline{1, N_{\Gamma_0}}$ ,  $N_{\Gamma}, N_{\Gamma_0} \in \mathbb{N}$ , з наступною лінійною скінченноелементною апроксимацією [5,6] невідомих функції  $\bar{\theta}(t), \tilde{\theta}(t), t \in \Gamma$  та  $\tilde{\theta}(t'), t' \in \Gamma_0$  на дугах  $\gamma_i$  та  $\gamma_j^0$ . У підсумку отримаємо системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), які подамо у матричному вигляді

$$\mathbf{M}_{(11)} \bar{\theta} = \mathbf{B}, \tag{10}$$

$$\mathbf{M}_{(11)} \tilde{\theta}_{(1)} + \mathbf{M}_{(12)} \tilde{\theta}_{(2)} = \mathbf{B}_{(1)}, \quad \mathbf{M}_{(21)} \tilde{\theta}_{(1)} + \mathbf{M}_{(22)} \tilde{\theta}_{(2)} = \mathbf{B}_{(2)}. \tag{11}$$

Тут  $\bar{\theta}$  — вектор вузлових значень температури на зовнішній поверхні тіла без порожнини,  $\tilde{\theta}_{(1)}$  і  $\tilde{\theta}_{(2)}$  — вектори вузлових значень збурення температури на зовнішній поверхні тіла та поверхні порожнини.

Розв'язуючи послідовно СЛАР (10) та (11) за вектором  $\tilde{\theta}_{(1)}$  знайдемо наближений розподіл збурення температури  $\tilde{\theta}(t), t \in \Gamma$ , на зовнішній поверхні тіла, що є розв'язком прямої задачі ідентифікації.

### 3. Дослідження інформативних параметрів

Числове дослідження інформативних параметрів проведемо на модельній задачі сканування об'єкта в радіальних напрямках зосередженим тепловим потоком (див. рис. 2). Зондувальний тепловий потік  $\mathbf{J}$  з компонентами  $J_1 = J_0(t) \cos \omega, J_2 = J_0(t) \sin \omega$  втікає в тіло через достатньо вузьку область бічної поверхні, визначену дугою

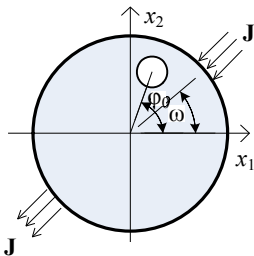


Рис. 2. Схема сканування об'єкта радіальним тепловим потоком

$\gamma_{\omega} \subset \Gamma$ , де  $\omega$  — координата серединної точки дуги  $\gamma_{\omega}$  на контурі  $\Gamma$ . Такий же потік витікає з тіла через іншу частину бічної поверхні, яку визначає дуга  $\gamma_{\omega+\pi}$ , повернута стосовно  $\gamma_{\omega}$  на кут  $\pi$ .

На рис. 3 наведені результати розв'язування прямої задачі для тіла, що містить порожнину з параметрами  $\phi_0 = \pi/4$ ;  $\rho_0 = 0,5$ ;  $r_0 = 0,1$ . Результати отримані для випадку зондування радіальним тепловим потоком у дев'ятьох напрямках  $\omega$ , рівномірно розподілених у проміжку  $[0, \pi/2)$ .

Як видно з графіків, збурення температурного поля  $\tilde{\theta}$  на зовнішній поверхні тіла змінюється зі зміною азимута  $\omega$

зондувального потоку:  $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(t, \omega)$ . При цьому аргумент як  $t_{\max} = \arg \max_t \left( \tilde{\theta} \Big|_{\omega=\text{const}} \right)$ , за якого функція  $\tilde{\theta}(t, \omega) \Big|_{\omega=\text{const}}$  досягає максимуму за фіксованого  $\omega$ , так і значення цього максимуму  $\tilde{\theta}_{\max} = \max_t \left( \tilde{\theta} \Big|_{\omega=\text{const}} \right)$  є функції азимута зондувального потоку:  $t_{\max} = t_{\max}(\omega)$ ,  $\tilde{\theta}_{\max} = \tilde{\theta}_{\max}(\omega)$ . Можна бачити, що за азимута  $\omega_0$  зондувального потоку, такого, що  $\omega_0 = \varphi_0$ , значення  $\tilde{\theta}_{\max}$  є максимальне:  $\tilde{\theta}_{\max}(\omega_0) = \max_{\omega} \left( \tilde{\theta}_{\max}(\omega) \right)$ .

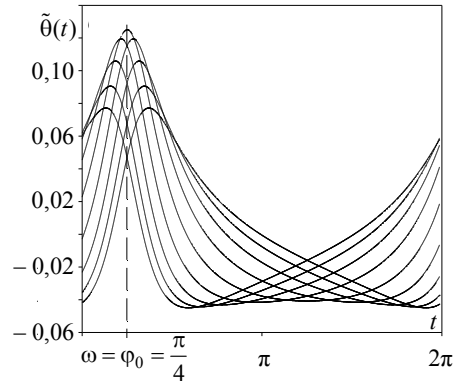


Рис. 3. Збурення температурного поля поверхні тіла за різних напрямків радіального зондування

Звідси випливає, що, азимут  $\omega_0 = \arg \left\{ \max_{\omega} \left[ \max_t \left( \tilde{\theta}(t, \omega) \right) \right] \right\}$  дозволяє однозначно ідентифікувати полярний кут  $\varphi_0$  центра порожнини:  $\varphi_0 = \omega_0$ .

Коли азимут зондувального теплового потоку дорівнює  $\omega_0$ , тобто збігається з полярним кутом центра порожнини  $\varphi_0$ , порожнина максимально спотворює температурне поле. Тому збурення температурного поля  $\tilde{\theta}(t, \omega_0)$ , визначене саме для цього напрямку зондування, є найбільш інформативне. Функція  $\tilde{\theta}(t, \omega_0)$  однозначно залежить від параметрів порожнини, які підлягають ідентифікації — відстані  $\rho_0$  її центра від осі циліндричного тіла. Тому цю функцію, визначену емпірично, можна використати для ідентифікації  $\rho_0$  і  $r_0$ . Проте, щоб визначити два скалярних параметри  $\rho_0$  і  $r_0$  у першому наближенні можна не брати до уваги функцію  $\tilde{\theta}(t, \omega_0)$  в усій її повноті, а обмежитися лише двома незалежними функціоналами від неї  $F_1(\tilde{\theta}(t, \omega_0))$  та  $F_2(\tilde{\theta}(t, \omega_0))$ . Якщо функціонали  $F_1$  та  $F_2$  достатньо сильно залежать від параметрів  $\rho_0$  і  $r_0$ , то їх можна розглядати як скалярні інформативні параметри для ідентифікації  $\rho_0$  і  $r_0$ . Теоретичні залежності  $F_1(\rho_0, r_0)$  та  $F_2(\rho_0, r_0)$  визначаються математичною моделлю (5)-(7) і структурою функціоналів  $F_1(\tilde{\theta}(t, \omega_0))$  та  $F_2(\tilde{\theta}(t, \omega_0))$ . Вимірюючи температурне поле на поверхні тіла за його зондування тепловим потоком під кутом  $\omega_0$ , визначимо на основі цих даних емпіричну функцію  $\tilde{\theta}^e(t, \omega_0)$ , а відтак обчислимо емпіричні значення функціоналів  $F_1^e$  і  $F_2^e$ . Це дозволяє побудувати алгоритм ідентифікації

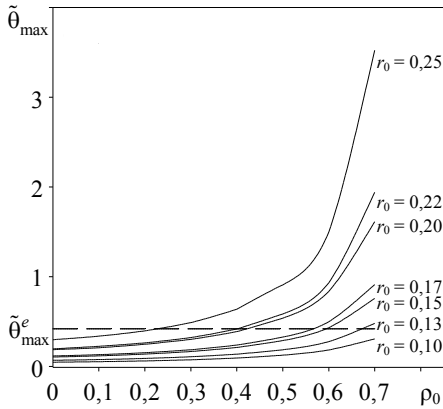


Рис. 4. Залежність параметра  $\tilde{\theta}_{\max}$  від координати центра порожнини та її розміру

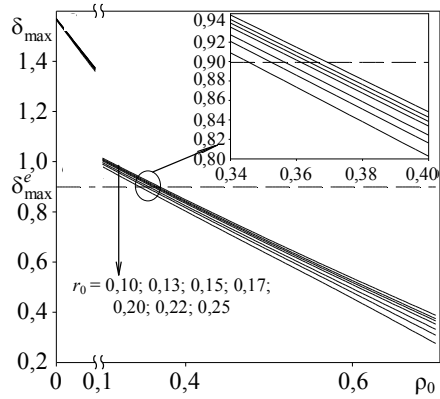


Рис. 5. Залежність параметра  $\Delta$  від координати центра порожнини та її розміру

параметрів порожнини  $\rho_0$  і  $r_0$ , що базується на зіставленні емпіричних параметрів  $F_1^e$  і  $F_2^e$  з їх теоретичними аналогами  $F_1(\rho_0, r_0)$  та  $F_2(\rho_0, r_0)$

$$F_1(\rho_0, r_0) \leftrightarrow F_1^e, \quad F_2(\rho_0, r_0) \leftrightarrow F_2^e \quad (12)$$

Виберемо у якості функціоналів  $F_1(\tilde{\theta}(t, \omega_0))$  та  $F_2(\tilde{\theta}(t, \omega_0))$  максимальне збурення температури на поверхні тіла  $\tilde{\theta}_{\max} = \tilde{\theta}(\omega_0, \omega_0)$  та ширину піку  $\delta_{\max} = |t_1 - t_2|$  функції  $\tilde{\theta}(t, \omega_0)$  в околі точки максимуму  $t = \omega_0$ , де  $t_1$  і  $t_2$  — корені рівняння  $\tilde{\theta}(t, \omega_0) = 2^{-1/2} \tilde{\theta}_{\max}$ . Щоб дослідити залежності цих параметрів від  $\rho_0$  і  $r_0$  розв'язували пряму задачу для певного набору значень параметрів  $\rho_0$  і  $r_0$ , відтак для кожного заданого значення пари  $(\rho_0, r_0)$  обчислювали значення  $\tilde{\theta}_{\max}$  і  $\delta_{\max}$ . Результати цих розрахунків показані на рис. 4 та 5.

#### 4. Методика розв'язування оберненої задачі

Проведені кількісні дослідження залежності параметрів  $\tilde{\theta}_{\max}$  і  $\delta_{\max}$  від  $\rho_0$  та  $r_0$  підтверджують можливість використання їх як інформативних параметрів для задачі ідентифікації порожнини. У найпростішому випадку зіставлення (12) можна реалізувати, прирівнюючи теоретичні залежності  $\tilde{\theta}_{\max}(\rho_0, r_0)$  і  $\delta_{\max}(\rho_0, r_0)$  до їх емпіричних аналогів  $\tilde{\theta}_{\max}^e$  і  $\delta_{\max}^e$ . У результаті отримаємо два рівняння стосовно  $\rho_0$  та  $r_0$



$$\theta_{\max}(\rho_0, r_0) = \theta_{\max}^e, \quad \delta_{\max}(\rho_0, r_0) = \delta_{\max}^e. \quad (13)$$

Тож, щоб визначити значення параметрів  $\rho_0$  та  $r_0$  слід розв'язати систему (12).

Хоч встановлення явної аналітичної структури функцій  $\tilde{\theta}_{\max}(\rho_0, r_0)$  та  $\delta_{\max}(\rho_0, r_0)$  є неможливе, значення цих функцій для будь-яких заданих допустимих значень аргументів  $\rho_0$  та  $r_0$  можна легко обчислити. Розглянемо для прикладу такий алгоритм. Спочатку розв'язуємо задачу (11) для заданих параметрів порожнини  $\rho_0$  та  $r_0$ . Отриманий в такий спосіб вектор  $\tilde{\theta}_{(1)} = \{\tilde{\theta}_1^{(1)}, \tilde{\theta}_2^{(1)}, \dots, \tilde{\theta}_{N_\Gamma}^{(1)}\}$  визначає вузлові значення збурення температурного поля  $\tilde{\theta}(t, \omega_0)$  на зовнішній поверхні тіла. Звідси одразу знаходимо максимальне значення  $\tilde{\theta}_{\max}$  збурення температурного поля  $\tilde{\theta}(t, \omega_0)$  на контурі  $\Gamma$ :  $\tilde{\theta}_{\max}(\rho_0, r_0) \approx \max_{i \in 1, N_\Gamma}(\tilde{\theta}_i^{(1)})$ . Далі визначаємо індекс  $k \in \overline{1, N_\Gamma}$  елемента  $\tilde{\theta}_k^{(1)} \in \tilde{\theta}_{(1)}$ , такого, що  $\delta\tilde{\theta}_k^{(1)} = \min(\delta\tilde{\theta}_1^{(1)}, \delta\tilde{\theta}_2^{(1)}, \dots, \delta\tilde{\theta}_{N_\Gamma}^{(1)})$ , де  $\delta\tilde{\theta}_i^{(1)} \equiv |\tilde{\theta}_i^{(1)} - 2^{-1/2}\tilde{\theta}_{\max}|$ . За знайденим так індексом обчислюємо полярний кут  $t_k$   $k$ -ого вузла на контурі  $\Gamma$ , а відтак за формулою  $\delta_{\max} \approx 2|t_k - \omega_0|$  обчислюємо ширину піку цієї функції.

Застосовуючи цей алгоритм обчислення функцій  $\tilde{\theta}_{\max}(\rho_0, r_0)$ ,  $\delta_{\max}(\rho_0, r_0)$ , можна реалізувати алгоритм розв'язування системи (13), який базується на одному з відомих числових методів розв'язування нелінійних рівнянь, наприклад, методі Ньютона.

Для оцінки ефективності запропонованого методу і можливостей його практичного застосування провели числовий експеримент.

Полярний кут  $\varphi_0$  центра порожнини надійно визначається з аналізу емпіричних залежностей  $\tilde{\theta}^e(t, \omega)$ , отриманих для множини дискретних значень кута  $\omega$  (див. рис. 3), тому  $\varphi_0$  в цьому експерименті вважали відомим апріорі.

Щоб отримати вхідні дані для оберненої задачі задавалися числовими значеннями  $\rho_0 = 0,35$  і  $r_0 = 0,23$ . Відтак розв'язували пряму задачу (11) для азимута зондувального потоку  $\omega_0 = \varphi_0$ . На основі отриманого розв'язку визначали параметри  $\tilde{\theta}_{\max}$  та  $\delta_{\max}$ . Знайдені числові значення  $\tilde{\theta}_{\max}^e = 0,8991373948$  і  $\delta_{\max}^e = 0,4179210267$  підставляли у праві частини рівнянь (13) замість емпіричних даних. Систему (13) розв'язували графічно. Функції  $\tilde{\theta}_{\max}(\rho_0, r_0) - \tilde{\theta}_{\max}^e$  та  $\delta_{\max}(\rho_0, r_0) - \delta_{\max}^e$  задають у неявному вигляді дві залежності  $\rho_0 = f_1(r_0)$  і  $\rho_0 = f_2(r_0)$ . Для їх побудови використовували результати, наведені на рис. 4 та 5. Горизонтальними штриховими лініями на цих рисунках показані «емпіричні» значення  $\tilde{\theta}_{\max}^e, \delta_{\max}^e$ . Точки перетину цих ліній із кривими  $\tilde{\theta}_{\max}(\rho_0)|_{r_0}$  і  $\delta_{\max}(\rho_0)|_{r_0}$

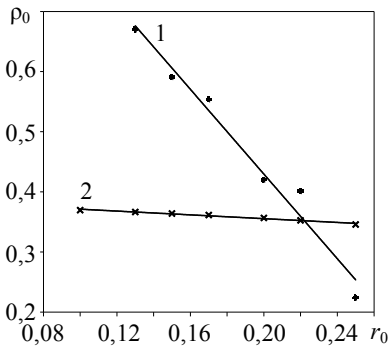


Рис. 6. Графічне розв'язування системи (13)

визначають дві дискретні множини пар  $(\rho_0, r_0)$  для функцій  $\rho_0 = f_1(r_0)$  і  $\rho_0 = f_2(r_0)$  відповідно. На рис. 6 ці пари показані точками. Точка перетину кривих 1 і 2, які апроксимують ці дві множини пар, якраз і визначає наближений розв'язок оберненої задачі ідентифікації параметрів  $\rho_0$  та  $r_0$ . Отримані значення:  $\rho_0 = 0,3576$ ;  $r_0 = 0,2274$ . Експеримент дозволив визначити апостеріорну похибку  $\Delta\rho_0 = |0,3576 - 0,35| = 0,0076$ ,  $r_0 = |0,2274 - 0,23| = 0,0026$ .

**Висновки.** Запропонований гранично-елементний метод розв'язування задач ідентифікації геометричних параметрів циліндричної тунельної порожнини в довгому циліндричному тілі на основі емпіричних даних про розподіл температури на поверхні тіла за його зондування зосередженим тепловим потоком. Проведені на модельній задачі числові дослідження підтвердили можливість застосування запропонованого методу для створення систем ідентифікації, що базуються на техніці ІЧ-термографії. Для підвищення точності ідентифікації параметрів порожнини доцільно розширити множину інформативних параметрів і розвинути варіаційні методи розв'язування оберненої задачі.

## Література

- [1] Brett, J. I. Selecting a Nondestructive Testing Method. Part VI: Infrared Inspection Techniques – Thermography // AMMTIAC Quarterly. — Vol. 3, No 2. — P. 9-12.
- [2] Defect detection in fiberglass reinforced epoxy composite pipes reproducing field inspection conditions / M. P. V. Souza, J. M. A. Rebello, S. D. Soares, G. A. C. Freitas / 9th International Conference on Quantitative Infra-Red Thermography: July 2-5, 2008, Krakow, Poland. — P. 477-483.
- [3] Ицук, И. Н. Идентификация свойств скрытых подповерхностных объектов в инфракрасном диапазоне волн / И. Н. Ицук, А. И. Фесенко, Ю. Ю. Громов. — Москва: «Машиностроение», 2008. — 184 с.
- [4] Чекурін, В. До ідентифікації параметрів багат шарових тіл із використанням теплового зондування / В. Чекурін // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2008. — Вип. 7. — С. 9-20.
- [5] Бреббия, К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. — Москва, 1987. — 524 с.
- [6] Becker, A. A. The boundary element method in engineering / A. A. Becker. — McGraw Hill International Limited, UK, 1992. — 337 p.

## 2-D steady-state problems for cavities identification in cylindrical solids on the base of IR-thermography data

Vasyl Chekurin, Oleg Sinkevych

*A nondestructive method for detection and identification of geometric parameters of a tunnel-like cylindrical cavity in a cylindrical solid has been considered in the paper. The method is rested upon the data obtained by exciting a steady-state thermal process in the object and measuring parameters of temperature field on the body's surface. A mathematical model for thermal probing of a long cylindrical body, containing a tunnel-like cylindrical cavity, by scanning its surface with concentrated heat flux has been built with use of boundary integrals equations method. In the scope of the model informative parameters has been established, and direct and inverse problems for identification of the cavity formulated. Using the numerical solutions of the direct problems, obtained with application of the boundary element method, the informative parameters of the heat probing were studied. On a particular example with the use of numerical experiment, the computational efficiency of the developed method has been evaluated. Possibility of application of the obtained results for development of the methodology for nondestructive diagnostics of structure elements with the use of the IR-thermography technique has been discussed.*

## Двумерные стационарные задач идентификации пустот в цилиндрических телах на основе данных ИК-термографии

Василь Чекурин, Олег Синькевич

*Рассматривается метод неразрушающего обнаружения и идентификации геометрических параметров полости в твердом теле, базирующийся на данных, полученных путем возбуждения в объекте стационарного теплового процесса и измерения параметров температурного поля его поверхности. С использованием граничных интегральных уравнений построена математическая модель теплового зондирования длинного цилиндрического тела, содержащего туннельную цилиндрическую полость, при сканировании его поверхности сосредоточенным тепловым потоком. В рамках модели установлены информативные параметры и сформулированы прямая и обратная задача идентификации параметров полости. На основе численных решений прямых задач, полученных с использованием метода граничных элементов, проведено количественное исследование информативных параметров теплового зондирования. На конкретном примере путем численного эксперимента оценена вычислительная эффективность предложенного метода. Обсуждается возможность применения полученных результатов для развития методологии неразрушающей диагностики элементов конструкций с использованием техники ИК-термографии.*

Отримано 5.04.12