УДК 517.958:532.72

Дифузійний потік домішкової речовини у смузі з випадково розташованим прошарком

Ольга Чернуха[1], Анастасія Давидок[2]

[1] д. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: cher@cmm.lviv.ua
[2] Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, вул. Т. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, 76025, e-mail: davydoka@gmail.com

Досліджено дифузійний потік домішкової речовини у смузі, яка містить випадково розташований прошарок. Рівняння дифузії сформульовано для потоку маси і записано та обґрунтовано крайові умови. Побудовано еквівалентне інтегро-диференціальне рівняння, розв'язок якого знайдено у вигляді інтегрального ряду Неймана. Проведено усереднення одержаного розв'язку за ансамблем конфігурацій фаз із рівномірною функцією розподілу за нульової та ненульової сталої концентрації частинок домішки в початковий момент часу. Вивчено вплив характеристик матеріалу смуги на усереднений дифузійний потік. Показано, що у випадку більшого коефіцієнта дифузії домішки у прошарку, ніж у матриці, дифузійний потік у тришаровій смузі майже завжди менший, ніж в однорідному тілі.

Ключові слова: дифузія, потік маси, ряд Неймана, усереднення за ансамблем конфігурацій.

Вступ. Важливою характеристикою під час дослідження процесів масоперенесення у пористих середовищах, складних геологічних структурах, композитних матеріалах, наноструктурах тощо є, окрім концентрації мігруючої речовини чи хімічного потенціалу, її дифузійний потік. Під час моделювання потоків маси домішкової речовини у багатофазних тілах випадково неоднорідної структури виникають значні труднощі, пов'язані з усередненням за ансамблем конфігурацій фаз, оскільки невідомими є функції кореляції градієнта стохастичного поля концентрації та випадкового коефіцієнта дифузії. Для вирішення цієї проблеми деякі автори [1, 2] пропонують для пористих тіл балансові рівняння складати для вже гомогенізованих середовищ, фізичні характеристики яких є усередненими величинами, що враховують відповідні коефіцієнти різних фаз. При цьому нехтують, зокрема, взаємодією між фазами. У роботі [3] випадковий потік визначається законом Дарсі, коефіцієнт фільтрації якого є випадковою функцією просторової координати. Для побудови розв'язку задачі використані методи малих збурень і згладжування (з відповідними обмеженнями) та накладено умову нормального розподілу фаз у середовищі, що не дає можливість визначити усереднений потік маси. З огляду на це автор визначає тільки двоточкову функцію коварації.

У праці [4] запропоновано підхід, згідно з яким будують рівняння дифузії для функції потоку та крайові задачі формулюють безпосередньо для потоку.

Проте для такої моделі необхідно проводити додаткові дослідження, оскільки у випадку, якщо значення потоку на «верхній» межі значно більше, ніж на «нижній», в обмежене тіло може поступити необмежена кількість дифундуючої речовини, що є певним протиріччям. Аналогічно, у разі підтримання значно більшого потоку через «нижню» границю шару, приходимо до суперечностей. Використовуючи такий підхід, у цій роботі розв'язано два випадки крайової задачі, сформульованої для функції потоку домішкової речовини, у смузі з випадково розташованим прошарком.

1. Об'єкт дослідження та формулювання задачі

Нехай у шарі товщини z_0 із випадково розташованим прошарком дифундує домішкова речовина. Приймаємо, що об'ємна частка базової фази v_0 значно більша за об'ємну частку включення v_1. Окрім того, вважаємо, що фази у тілі розташовані за рівномірним законом розподілу, а коефіцієнти дифузії сталі у межах фаз.

Рівняння дифузії домішкової речовини, сформульоване для функції дифузійного потоку, отримано, виходячи з рівняння балансу маси, до якого застосували набла-оператор Гамільтона [4]. В одновимірному за просторовою координатою випадку таке рівняння має вигляд

$$\frac{\partial J(z,t)}{\partial t} = D(z)\frac{\partial^2 J(z,t)}{\partial z^2}, \tag{1}$$

де $J(z,t)$ — випадковий потік маси, $D(z) = \begin{cases} D_0, & z \in \Omega_0, \\ D_1, & z \in \Omega_1, \end{cases}$ — випадковий коефіцієнт дифузії, $\Omega_0 = \left]0, z_1\right[\cup \left]z_2, z_0\right[$ — область, яку займає матриця, а $\Omega_1 = \left]z_1, z_2\right[$ — область включення, z_1 і z_2 — випадкові координати меж включення.

У початковий момент часу потік маси дорівнює нулю. Приймаємо, що потік на межі $z = 0$ постійний, а на межі шару $z = z_0$ — концентрація нульова, при цьому функцію потоку на цій межі потрібно визначити додатково

$$J(z,t)\big|_{t=0} = 0; \tag{2}$$

$$J(z,t)\big|_{z=0} = J^* \equiv const, \qquad J(z,t)\big|_{z=z_0} = F(t). \tag{3}$$

Початкова умова на потік (2) означає, що в нульовий момент часу задано сталий розподіл концентрації в тілі, причому він може бути як нульовим, так і відмінним від нуля. У подальшому розглянемо обидва випадки.

2. Інтегро-диференціальне рівняння, еквівалентне вихідній крайовій задачі

Введемо до розгляду випадкову функцію просторової координати типу одиничної сходинкової функції Хевісайда [5]

$$\eta_{ij}(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Omega_{ij}, \\ 0, & z \notin \Omega_{ij}, \end{cases} \qquad \sum_{j=0}^{1}\sum_{i=1}^{n_j} \eta_{ij}(z) = 1.$$

Тут j — номер фази $\left(j=\overline{0,1}\right)$, $j=0$ відповідає матриці, i — номер включення в межах фази $\left(i=\overline{1,n_j}\right.$, де n_j — кількість підшарів сорту j, зокрема, $\left.n_0=2, n_1=1\right)$, відповідно Ω_{ij} — i-та однозв'язна область j-тої фази.

Коефіцієнт дифузії можна подати через функцію η_{ij} у вигляді

$$D(z)=\sum_{i=1}^{2} D_0\eta_{i0}(z)+D_1\eta_1(z), \qquad \eta_1(z)=\begin{cases}1, & z\in[z_1,z_2],\\ 0, & z\notin[z_1,z_2].\end{cases}$$

Підставивши таке подання коефіцієнта дифузії у рівняння (1), одержимо

$$\frac{\partial J(z,t)}{\partial t}-\left[\sum_{i=1}^{2} D_0\eta_{i0}(z)+D_1\eta_1(z)\right]\frac{\partial^2 J(z,t)}{\partial z^2}=0.$$

Позначимо оператори таким чином

$$L(z,t)\equiv\frac{\partial}{\partial t}-\left[\sum_{i=1}^{2} D_0\eta_{i0}(z)+D_1\eta_1(z)\right]\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad L_0(z,t)=\frac{\partial}{\partial t}-D_0\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

З урахуванням умови суцільності тіла рівняння (1) можна подати так

$$L_0(z,t)J(z,t)=L_s(z,t)J(z,t), \tag{4}$$

де $L_s(z,t)=L_0(z,t)-L(z,t)$, тобто $L_s(z,t)\equiv L_s(z)=\left(D_1-D_0\right)\eta_1(z)\partial^2\big/\partial z^2$.

Розглядаючи неоднорідність структури тіла як внутрішні джерела, можна подати розв'язок крайової задачі (2)-(4) сумою розв'язку однорідної крайової задачі та згортки функції Гріна з джерелом

$$J(z,t)=J_0(z,t)+\int_0^t\int_0^{z_0} G\left(z,z',t,t'\right)L_s\left(z'\right)J\left(z',t'\right)dz'dt'. \tag{5}$$

Тут $J_0(z,t)$ — розв'язок однорідної крайової задачі, $G\left(z,z',t,t'\right)$ — функція Гріна.

Щоб знайти розв'язок однорідної крайової задачі

$$\frac{\partial J_0(z,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 J_0(z,t)}{\partial z^2},$$

$$J_0(z,t)\big|_{t=0}=0, \quad J_0(z,t)\big|_{z=0}=J_*\equiv const, \quad J_0(z,t)\Big|_{z=z_0}=F(t),$$

потрібно визначити граничну умову для функції потоку на границі $z=z_0$. Для цього розв'язуємо крайову задачу дифузії, сформульовану для функції концентрації мігруючих частинок $C(z, t)$. Якщо у початковий момент часу розподіл концентрації дорівнює нулю, то крайова задача є така

$$\frac{\partial C(z,t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 C(z,t)}{\partial z^2}, \tag{6}$$

$$\partial C(z,t)/\partial z\big|_{z=0} = -J_*/D_0 \equiv const, \qquad C(z,t)\big|_{z=z_0} = 0, \tag{7}$$

$$C(z,t)\big|_{t=0} = 0. \tag{8}$$

Якщо ж у початковий момент часу відомий сталий ненульовий розподіл концентрації у смузі, то умова (8) набуде вигляду

$$C(z,t)\big|_{t=0} = C_* \equiv const. \tag{9}$$

Відповідно до роботи [4], враховуючи співвідношення між потоком маси та концентрацією частинок (перший закон Фіка), з розв'язку крайової задачі (6)-(8) потік в однорідному шарі має вигляд

$$J_0(z,t) = J_* \left(1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{-1} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \sin\left(\xi_n z\right)\right), \tag{10}$$

зокрема на межі $z = z_0$:

$$J_0(z,t)\big|_{z=z_0} = F(t) = J_* \left(1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{-1} (-1)^{n+1} e^{-D_0 \xi_n^2 t}\right),$$

де $\xi_n = \pi(2n-1)/2z_0$. Аналогічно для крайової задачі (6), (7), (9) маємо

$$J_0(z,t) = J_* - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left(J_*/\xi_n + (-1)^n C_* D_0\right) \sin(\xi_n z), \tag{11}$$

а для $z = z_0$ одержимо таку крайову умову для функції дифузійного потоку

$$J_0(z,t)\big|_{z=z_0} = J_* - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left(J_*/\xi_n + (-1)^n C_* D_0\right).$$

Функція Гріна є розв'язком крайової задачі

$$\frac{\partial G\left(z,z',t,t'\right)}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2 G\left(z,z',t,t'\right)}{\partial z^2} = \delta\left(t-t'\right)\delta\left(z-z'\right);$$

$$G\left(z,z',t,t'\right)\big|_{t=0} = 0; \quad G\left(z,z',t,t'\right)\big|_{z=0} = 0, \quad G\left(z,z',t,t'\right)\big|_{z_0=0} = 0,$$

зокрема,

$$G\left(z,z',t,t'\right) = \frac{\theta\left(t-t'\right)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-D_0 y_k{}^2 \left(t-t'\right)} \left[\cos\left(y_k\left(z-z'\right)\right) - \cos\left(y_k\left(z+z'\right)\right)\right], \tag{12}$$

де $y_k = k\pi/z_0$ [6].

Таким чином, вихідну крайову задачу зведено до еквівалентного інтегро-диференціального рівняння (5) із випадковим ядром, яке є рівнянням Вольтерра II-го роду за часом і Гаммерштейна за просторовою змінною.

3. Ряд Неймана

Розв'язок рівняння (5) будемо шукати методом послідовних ітерацій [7]. Для отримання першої ітерації, запишемо значення функції потоку в точці (z',t'), оскільки рівняння (5) справджується для всіх точок області $\{t\in[0,\tau[,\tau<\infty;$ $z\in[0,z_0]\}$, в тому числі і для $z=z', t=t'$. Таким чином, маємо

$$J(z',t')=J_0(z',t')+\int_0^{t'}\int_0^{z_0}G(z',z'',t',t'')L_s(z'')J(z'',t'')dz''dt'' ,$$

підставимо цей вираз у праву частину рівняння (5)

$$J(z,t)=J_0(z,t)+\int_0^{t}\int_0^{z_0}G(z,z',t,t')L_s(z')J_0(z',t')dz'dt'+$$
$$+\int_0^{t}\int_0^{z_0}G(z,z',t,t')L_s(z')\int_0^{t'}\int_0^{z_0}G(z',z'',t',t'')L_s(z'')J(z'',t'')dz''dt''dz'dt' . \qquad (13)$$

Для $z=z'', t=t''$ запишемо дифузійний потік у точці (z'',t'') і підставимо його у співвідношення (13). Таким чином одержимо другу ітерацію. Повторюючи таку процедуру нескінченну кількість разів, отримаємо

$$J(z,t)=J_0(z,t)+\int_0^{t}\int_0^{z_0}G(z,z',t,t')L_s(z')J_0(z',t')dz'dt'+$$
$$+\int_0^{t}\int_0^{z_0}G(z,z',t,t')L_s(z')\int_0^{t'}\int_0^{z_0}G(z',z'',t',t'')L_s(z'')J_0(z'',t'')dz''dt''dz'dt'+$$
$$+\int_0^{t}\int_0^{z_0}G(z,z',t,t')L_s(z')\int_0^{t'}\int_0^{z_0}G(z',z'',t',t'')L_s(z'')\times$$
$$\times\int_0^{t''}\int_0^{z_0}G(z'',z''',t'',t''')L_s(z''')J_0(z''',t''')dz'''dt'''dz''dt''dz'dt'+\ldots . \qquad (14)$$

Ряд (14) є інтегральним рядом Неймана [7]. Зокрема, в одновимірному випадку він є абсолютно та рівномірно збіжний, якщо коефіцієнти дифузії обмежені [8]: $D_0, D_1 \le K < \infty$ і $D_0 \ne 0$.

4. Усереднення отриманого розв'язку за ансамблем конфігурацій фаз

Під час проведення процедури усереднення за ансамблем конфігурацій фаз обмежимося двома першими членами ряду Неймана (14). Вважаємо, що випадковою координатою, яка характеризує включення, є координата верхньої межі прошарку z_1. Тоді

$$\left\langle J(z,t)\right\rangle_{conf} = \left\langle J_0(z,t)\right\rangle_{conf} + \int_0^t\int_0^{z_0} G\left(z,z',t,t'\right)\left\langle L_s\left(z'\right)\right\rangle_{conf} J_0\left(z',t'\right)dz'dt' . \qquad (15)$$

Врахуємо, що $\left\langle L_s\left(z'\right)\right\rangle_{conf} = \left(D_1 - D_0\right)\left\langle \eta_1\left(z'\right)\right\rangle_{conf} \partial^2/\partial z'^2$, а $\left\langle J_0(z,t)\right\rangle_{conf} = J_0(z,t)$.
Усереднимо $\eta_1\left(z'\right)$

$$\left\langle \eta_1\left(z'\right)\right\rangle_{conf} = \left\langle \eta_1\left(z'-z_1\right)\right\rangle = \left\langle \begin{cases} 1, & z'-z_1 \in [0,h], \\ 0, & z'-z_1 \notin [0,h], \end{cases} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{V}\int_0^{z_0-h} \eta_1\left(z'-z_1\right)dz_1 = \frac{1}{V}\int_0^{z'} \eta_1(x)dx ,$$

де $h = z_2 - z_1$. Тут зроблена заміна $x = z' - z_1$.

Можливі такі два випадки:

- $z' \le h$, тоді $\frac{1}{V}\int_0^{z'} \eta_1(x)dx = \frac{1}{V}\int_0^{z'} dx = \frac{z'}{V} = \frac{z'}{V}\frac{h}{h} = \frac{v_1 z'}{h}$;
- $z' \ge h$, тоді $\frac{1}{V}\int_0^{z'} \eta_1(x)dx = \frac{1}{V}\int_0^{h} dx = \frac{h}{V} = v_1$.

Таким чином, $\left\langle \eta_1\left(z'\right)\right\rangle_{conf} = \begin{cases} v_1 z'/h, & z' \le h, \\ v_1, & z' \ge h. \end{cases}$

Підставивши знайдені вирази у співвідношення (15), одержимо формулу для потоку частинок, усередненого за ансамблем конфігурацій фаз із рівномірною функцією розподілу

$$\left\langle J(z,t)\right\rangle_{conf} = J_0(z,t) + \left(D_1 - D_0\right)\int_0^t \left[\frac{v_1}{h}\int_0^h z'G\left(z,z',t,t'\right)\frac{\partial^2 J_0\left(z',t'\right)}{\partial z'^2}dz' + \right.$$

$$\left. + v_1\int_h^{z_0} G\left(z,z',t,t'\right)\frac{\partial^2 J_0\left(z',t'\right)}{\partial z'^2}dz' \right]dt' . \qquad (16)$$

Важливо зауважити, що у формулі (16) не враховано конкретний вигляд крайових умов, що дає можливість застосовувати її для різних типів початкових і граничних умов.

Підставляючи у формулу (16) функцію Гріна (12) і вираз (10) для потоку маси в однорідній смузі за нульової початкової умови на функцію концентрації, отримаємо таку розрахункову формулу

$$\frac{1}{J_*}\langle J(z,t)\rangle_{conf} = 1 - \frac{2}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\xi_n}e^{-D_0\xi_n^2 t}\sin(\xi_n z) +$$
$$+\frac{2v_1}{z_0^2}\frac{(D_1 - D_0)}{D_0}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n A_{kn}}{y_k^2-\xi_n^2}\left[\frac{3}{2}e^{-D_0\xi_n^2 t} - e^{-D_0 y_k^2 t}\right]\sin(y_k z). \qquad (17)$$

Нехай у початковий момент часу відомо сталий ненульовий розподіл концентрації у смузі. Подамо $J_0(z,t)$ згідно з рівністю (11), тоді

$$\frac{1}{J_*}\langle J(z,t)\rangle_{conf} = 1 - \frac{2}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-D_0\xi_n^2 t}\left(\frac{1}{\xi_n} + (-1)^n D_0\frac{C_*}{J_*}\right)\sin(\xi_n z) +$$
$$+\frac{2v_1}{z_0^2}\frac{(D_1 - D_0)}{D_0}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n A_{kn}}{y_k^2-\xi_n^2}\left(1 + (-1)^n D_0\frac{C_*}{J_*}\xi_n\right)\times$$
$$\times\left(\frac{3}{2}e^{-D_0\xi_n^2 t} - e^{-D_0 y_k^2 t}\right)\sin(y_k z). \qquad (18)$$

Тут $A_{kn} = \frac{\cos\left[(y_k-\xi_n)h\right]}{h(y_k-\xi_n)^2} - \frac{\cos\left[(y_k+\xi_n)h\right]}{h(y_k+\xi_n)^2} - \frac{4y_k\xi_n}{h\left(y_k^2-\xi_n^2\right)^2} + (-1)^{k+n}\frac{2y_k}{y_k^2-\xi_n^2}$.

Отже, залежно від початкової умови для концентрації, одержані розрахункові формули для усередненого за ансамблем конфігурацій фаз потоку домішкової речовини у шарі за рівномірного розподілу прошарку в області тіла.

5. Числовий аналіз усередненого дифузійного потоку

Числові розрахунки проведено у безрозмірних змінних [9] $\eta = z/z_0$, $\tau = D_0 t/z_0^2$. Рис. 1 показує поведінку функції $F(t)$ за нульової (рис. 1*а*) та ненульової (рис. 1*б*)

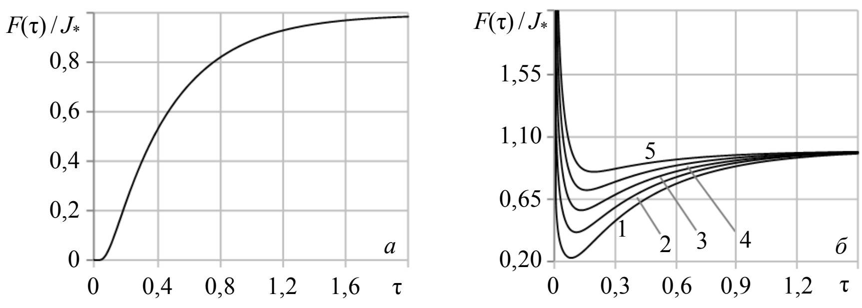

Рис. 1. Функція $F(\tau)/J_*$ для нульової (*а*) та для ненульової початкової умови для різних значень відношення C_*/J_* (*б*)

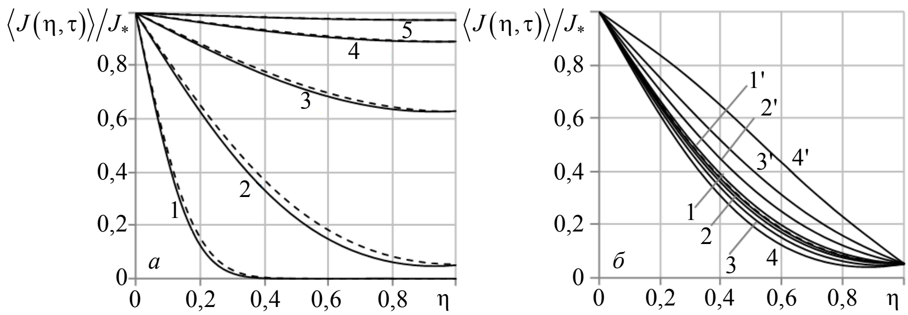

Рис. 2. Розподіли потоків маси у смузі в різні моменти безрозмірного часу
для D_1/D_0 = 0,01(*а*) та для різних значень товщини прошарку *h* (*б*)

концентрацій у початковий момент часу для різних значень C_*/J_* = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 (криві 1-5). На рис. 2 наведені розподіли потоків маси у смузі за нульової початкової умови, обчислені за формулою (17), у різні моменти безрозмірного часу $\tau = 0{,}01$; 0,05; 0,1; 0,5; 1; 2,5 (криві 1-6) для D_1/D_0 = 0,01 (рис. 2*а*) та для різних значень товщини прошарку (рис. 2*б*) *h* = 0,01; 0,05; 0,1; 0,2 для D_1/D_0 = 0,01 (криві 1-4) та D_1/D_0 = 5 (криві $1'$-$4'$). Штрихові лінії відповідають потокам в однорідному шарі з характеристиками матриці.

Рис. 3 ілюструє розподіли потоку маси у випадку ненульової початкової умови на концентрацію домішкової речовини, пораховані за формулою (18), у різні моменти безрозмірного часу $\tau = 0{,}01$; 0,05; 0,1; 0,5; 1; 2,5 (криві 1-6) для D_1/D_0 = 0,01; *h* = 0,1; C_*/J_* = 0,1 (рис. 3*а*) та для різних значень відношення початкової концентрації та потоку на «верхній» границі шару C_*/J_* = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 (криві 1-5) для $\tau = 0{,}1$; D_1/D_0 = 0,01; *h* = 0,1 (рис. 3*б*). На рис. 4 наведені розподіли потоків домішки для різних значень відношення коефіцієнтів дифузії D_1/D_0 = 0,01; 0,5; 2; 3; 5 (криві 1-5, рис. 4*а*) та товщини випадково розташованого прошарку *h* = 0,01; 0,05; 0,1; 0,2 (криві 1-4, рис. 4*б*).

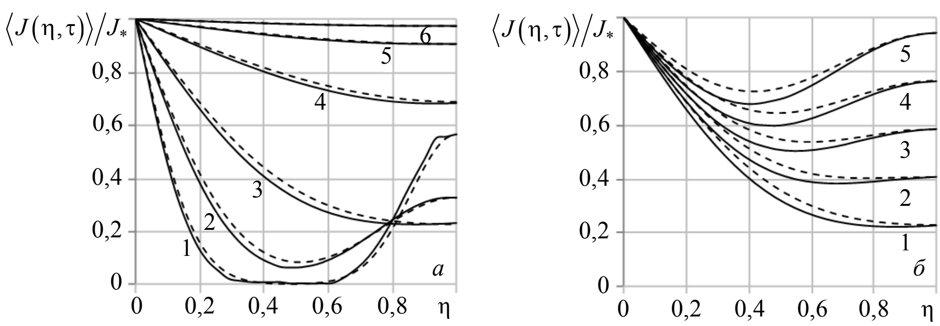

Рис. 3. Розподіли потоків маси у смузі для ненульової початкової умови
в різні моменти безрозмірного часу (*а*) та для різних значень відношення C_*/J_* (*б*)

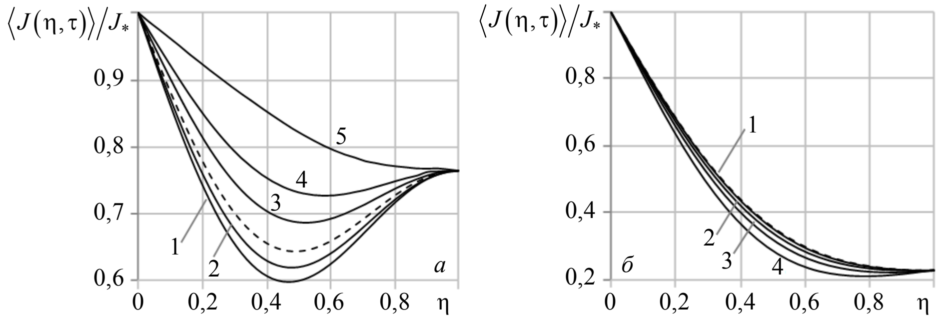

Рис. 4. Розподіли потоків маси у смузі для ненульової початкової умови для різних значень відношення D_1 / D_0 (*а*) та для різних значень товщини прошарку *h* (*б*)

Зазначимо, що за нульової початкової концентрації частинок домішки в шарі розподіли потоків завжди є монотонно спадні функції (рис. 2), проте зростають в усій області тіла (рис. 2*а*), доки не вийдуть на усталений режим $\left(J(z,t) = J_*\right.$ для $\left.\forall z \in [z, z_0]\right)$. Якщо коефіцієнт дифузії домішки у прошарку менший, ніж у матриці, то потік у неоднорідному тілі менший, ніж в однорідному. У протилежному випадку потік у тришаровій смузі більший, ніж в однорідному шарі (криві 1-4 та криві 1'-4', рис. 2*б*). Збільшення товщини прошарку для $D_1 < D_0$ веде до зменшення значень потоку маси, а для $D_1 > D_0$ потік у тришаровій смузі зростає і наближається до лінійного розподілу. Також зауважимо, що на границях шару потоки в однорідному та неоднорідному тілах співпадають.

У випадку ненульового сталого початкового розподілу концентрації домішки в шарі для малих часів поведінка функції потоку суттєво відрізняється від випадку нульової початкової концентрації. Потік із віддаленням від поверхні тіла $z = 0$ спадає, всередині шару нульовий (або близький до нуля) та різко зростає біля границі $z = z_0$ (крива 1 на рис. 3*а*). З часом значення потоку в околі цієї поверхні зменшується, також зменшується інтервал нульових значень потоку всередині шару.

Зазначимо, що значення ненульової початкової концентрації суттєво впливає і на поведінку, і на значення функції потоку домішкової речовини. Так, для малих відношень C_* / J_* потік домішки як в однорідному шарі, так і у смузі з прошарком, є монотонно спадна функція (криві 2-6 на рис. 3*а* та крива 1 на рис. 3*б*). Зі збільшенням початкової концентрації C_* потік біля поверхні шару $z = z_0$ (або η = 1 у безрозмірних змінних) зростає, що може призвести до появи локального мінімуму всередині шару (криві 4, 5 на рис. 3*б*).

Висновки. Оскільки під час дослідження потоків маси домішкової речовини в багатофазних тілах випадково неоднорідної структури під час процедури усереднення за ансамблем конфігурацій фаз виникають значні труднощі. Тому на основі побудованого рівняння дифузії для функції потоку сформульовані крайові задачі дифузії частинок домішкової речовини безпосередньо для потоку маси й обґрунтовано крайові умови. Побудовано еквівалентне інтегро-диференціальне рівняння, розв’язок якого знайдено у вигляді інтегрального ряду Неймана. Проведено усереднення одержаного розв'язку за ансамблем конфігурацій фаз із рівномірною функцією розподілу за нульової та ненульової сталої концентрації частинок домішки в початковий момент часу. Встановлено залежність поведінки та величини усередненого дифузійного потоку від характеристик матеріалу смуги. Показано, що у випадку більшого коефіцієнта дифузії домішки у прошарку, ніж у матриці, дифузійний потік у тришаровій смузі майже завжди менший, ніж в однорідному тілі.

Оскільки під час отримання формули для усередненого за ансамблем реалізацій структури тіла потоку домішки не використовувався конкретний вигляд крайових умов, то це співвідношення застосовне і для інших типів початкових і граничних умов, при цьому зміняться функції Гріна та потоку в однорідному шарі і, відповідно, розрахункова формула набуде іншого вигляду. Крім цього перспективними є дослідження дифузійного потоку частинок домішки на основі запропонованої математичної моделі для дво- та тривимірних випадків.

Література

[1] *Bergins, C.* Multiphase Flow in Porous Media with Phase Change. Part II: Analytical Solutions and Experimental Verification for Constant Pressure Stream Injection / *C. Bergins, S. Crone, K. Strauss* // Transport in Porous Media. — 2005. — Vol. 60. — P. 275-300.

[2] *Shulenberg, T.* An improved model for two-phase flow through beds of coarse particles / *T. Shulenberg, U. Muller* // Int. J. Multiphase Flow. — 1987. — Vol. 13(1). — P. 87-97.

[3] *Keller, J. B.* Flow in Random Porous Media / *J. B. Keller* // Transport in Porous Media. — 2001. — Vol. 43. — P. 395-406.

[4] *Чапля, Є.* Математичне моделювання потоків в шарі / *Є. Чапля, О. Чернуха, Н. Васьо* // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. — 2011. — Вип. 17. — С. 103-115.

[5] *Рытов, С. М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля / *С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский.* — Москва: Наука, 1978. — 436 с.

[6] *Тихонов, А.Н.* Уравнения математической физики / *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.* — Москва: Наука, 1972. — 735 с.

[7] *Краснов, М. Л.* Интегральные уравнения / *М. Л. Краснов*. — Москва: Наука, 1975. — 303 с.

[8] *Чапля, Є. Я.* Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах / *Є. Я. Чапля., О. Ю. Чернуха.* — Київ.: Наукова думка, 2009. — 302 с.

[9] *Лыков, А. В.* Теория теплопроводности. / *А. В. Лыков.* — Москва: Высшая школа, 1978. — 480 с.

Admixture diffusion flow in a strip with a randomly disposed sublayer

Olha Chernukha, Anastasiya Davydok

Admixture diffusion flow is investigated in a strip inclusive a randomly disposed sublayer. Diffusion equation is formulated for the mass flow and initial and boundary conditions are written and argued. An equivalent integro-differential equation is constructed. Its solution is found in terms of the integral Neumann series. Averaging the obtained solution is carried out over the ensemble of phase configurations with the uniform distribution function at zero and nonzero constant concentration in an initial moment of time. Influence of characteristics of the strip material on the averaged diffusion flow is studied. It is shown that in the case of greater coefficient of admixture diffusion in a sublayer than its value in matrix, the diffusion flow in the three-layered strip is almost always less than in a homogeneous body.

Диффузионный поток примесного вещества в полосе со случайно расположенной прослойкой

Ольга Чернуха, Анастасия Давыдок

Исследован диффузионный поток примесного вещества в полосе со случайно расположенной прослойкой. Уравнение диффузии сформулировано для потока массы, записаны и обоснованы краевые условия. Построено эквивалентное интегро-дифференциальное уравнение, решение которого найдено в виде интегрального ряда Неймана. Проведено усреднение полученного решения по ансамблю конфигураций фаз с равномерной функцией распределения при нулевой и ненулевой постоянной концентрации в начальный момент времени. Установлена зависимость поведения и величины усредненного диффузионного потока от характеристик материала прослойки. Показано, что в случае большего коэффициента диффузии примеси в прослойке, чем в матрице, диффузионный поток в трехслойной полосе почти всегда меньший, чем в однородном теле.

Отримано 12.03.12