УДК 539.3

Вплив локального зміщення маси на поверхневі хвилі Релея

Ольга Грицина

К. ф.-м. н., с. н. с., ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3*б*, Львів, 79060;
Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: gryt@cmm.lviv.ua

Співвідношення локально градієнтної теорії пружності використані для вивчення впливу локального зміщення маси на поширення поверхневих хвиль Релея в ізотропному пружному півпросторі. Одержано відповідне дисперсійне рівняння. Показано, що у разі врахування локального зміщення маси короткі приповерхневі хвилі є дисперсійні, що не передбачає класична теорія пружності. Показано також, що в граничному випадку нестисливого середовища дисперсія поздовжньої пружної хвилі відсутня і для потенціалів вектора переміщення отримано формули, які співпадають із результатами класичної теорії.

Ключові слова: локально градієнтна теорія пружності, локальне зміщення маси, хвилі Релея, гіперзвукові частоти, дисперсійність.

Вступ. Вагоме значення в ультразвукових методах неруйнівного контролю механічних властивостей матеріалу належить поверхневим акустичним хвилям, у тому числі, хвилям Релея [1-3]. Це зумовлено тим, що швидкість поширення таких хвиль, їх загасання та дисперсія тісно пов'язані з механічними характеристиками матеріалів. У межах теорії пружності поверхневі хвилі Релея характеризуються відсутністю дисперсії, тобто їх фазова швидкість поширення не залежить від частоти, включно до гіперзвукового діапазону [2, 4]. Однак експериментально підтверджено, що зі збільшенням частоти фазова швидкість поверхневих хвиль зменшується [5]. Класична теорія пружності не дає цьому пояснення.

Для опису згаданого ефекту ряд авторів використали нелокальні теорії, які передбачають іншу поведінку високочастотних хвиль, аніж класичні теорії. Так, у працях [6, 7] показано, що в рамках теорії Коссера (яку відносять до слабо нелокальних теорій) хвилі Релея є дисперсійні. Такий й же ж результат отримано в роботі [8], автори якої ґрунтуються на співвідношеннях іншої нелокальної теорії — теорії градієнтної пружності з поверхневою енергією [9], яка враховує у поданні потенціальної енергії, окрім загальноприйнятих доданків, також градієнт деформації та поверхневу енергію. Однак закономірності поширення поверхневих хвиль із використанням нелокальних теорій вивчені недостатньо докладно. Метою пропонованого дослідження є вивчення впливу процесу локального зміщення маси на поширення хвиль Релея. При цьому виходитимемо із співвідношень локально градієнтної теорії пружності [10]. У межах цієї теорії простір параметрів стану розширено просторовим градієнтом потенціалу μ_π, який є мірою зміни внутрішньої енергії системи, зумовленої локальним зміщенням маси [11]. З огляду на це, згадана теорія також належить до рангу нелокальних.

1. Розв'язувальна система рівнянь. Формулювання задачі

Розглянемо пружний ізотропний півпростір, який у декартовій системі координат (x_1, x_2, x_3) займає область $x_1 \geq 0$. Поверхня $x_1 = 0$ півпростору вільна від зовнішнього навантаження, а у напрямку осі x_2 із фазовою швидкістю $c = \omega/k$ (k — невідоме хвильове число) поширюється монохроматична гармонічна поверхнева хвиля частоти ω. Приймаємо, що масові сили відсутні, а зовнішня дія, яка спричинила хвилю, не залежить від просторової координати x_3. Обмежимося також ізотермічним наближенням. За такої зовнішньої дії у тілі реалізується плоский деформований стан, за якого вектор переміщення $\mathbf{u}$ має лише дві ненульові компоненти $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$ $u_i = (x_1, x_2, t)$, $i = 1, 2$, а компоненти e_{13}, e_{23}, e_{33} тензора деформації дорівнюють нулеві.

Для вивчення руху точок тіла використаємо лінеаризовані рівняння локально градієнтної механіки. Вони включають рівняння руху й балансу наведеної маси [10]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_{m\pi}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{ms} = 0, \tag{2}$$

лінійні рівняння стану

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = 2G\hat{\boldsymbol{e}} + \left[\left(K - \frac{2}{3}G \right) e - K\alpha_\rho \rho_m \right] \hat{\mathbf{I}}, \tag{3}$$

$$\mu'_\pi = \mu_{\pi 0} + d_\rho \rho_m - \frac{1}{\rho_0} K\alpha_\rho \, e, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\pi}_m = -\chi_m \nabla \mu'_\pi, \tag{5}$$

а також геометричні співвідношення, які пов'язують тензор деформації $\hat{\boldsymbol{e}}$ та вектор переміщення $\mathbf{u}$,

$$\hat{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{2}\left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\mathrm{T}} \right]. \tag{6}$$

Тут $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ — тензор напружень; $\mathbf{J}_{ms} = \rho_0 \, \partial \boldsymbol{\pi}_m / \partial t$; $\boldsymbol{\pi}_m$ — питомий вектор локального зміщення маси; ρ_m — питома густина наведеної маси [11]; ρ_0 — густина маси у вихідному стані; $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$; μ — хімічний потенціал; $\mu_{\pi 0}$ — значення потенціалу μ'_π у природному стані безмежного однорідного середовища; K — модуль об'ємного стиску за сталої питомої густини наведеної маси; G — модуль зсуву; α_ρ — коефіцієнт об'ємного розширення, спричиненого локальним зміщенням маси; χ_m — коефіцієнт, що характеризує локальне зміщення маси, зумовлене градієнтом потенціалу μ'_π; d_ρ — ізохоричний коефіцієнт залежності потенціалу μ'_π від питомої густини наведеної маси; t — час; ∇ — оператор Гамільтона; індекс «Т» означає операцію транспонування.

Розв'язувальну систему рівнянь отримаємо, підставивши у рівняння (1), (2) формулу $\mathbf{J}_{ms} = \rho_0\, \partial \boldsymbol{\pi}_m / \partial t$, а також визначальні та геометричні співвідношення (3)-(6). В одержаній таким чином системі рівнянь вектор переміщення $\mathbf{u}$ подамо через скалярний φ_u та векторний $\boldsymbol{\psi}_u = (0, 0, \psi_u)$ потенціали [4]

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi_u + \nabla \times \boldsymbol{\psi}_u, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_u = 0. \tag{7}$$

У підсумку прийдемо до такої розв'язувальної системи рівнянь

$$\frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 \psi_u}{\partial t^2} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial t^2} = \frac{K\alpha_\rho}{\hat{K} d_\rho}\tilde{\mu}'_\pi, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mu}'_\pi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\mu}'_\pi}{\partial x_2^2} - \lambda_\mu^2 \tilde{\mu}'_\pi = \lambda_\mu^2 \frac{K\alpha_\rho}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x_2^2}\right). \tag{10}$$

Тут

$$\hat{K} = K + \frac{4}{3}G - \frac{K^2\alpha_\rho^2}{\rho_0 d_\rho}, \qquad \lambda_\mu^2 = \frac{1}{d_\rho \chi_m}, \quad c_1 = \sqrt{\hat{K}/\rho_0}, \quad c_2 = \sqrt{G/\rho_0}.$$

Крайові умови, що відповідають відсутності на поверхні $x_1 = 0$ напружень і рівності нулю абсолютного значення потенціалу μ'_π (тіло контактує з вакуумом), запишемо так:

$$\sigma_{1j}\big|_{x_1=0} = 0, \qquad j = \overline{1,3}, \tag{11}$$

$$\tilde{\mu}'_\pi\big|_{x_1=0} = -\mu_{\pi 0}. \tag{12}$$

Умову (11) подамо через розв'язувальні функції φ_u, ψ_u та $\tilde{\mu}'_\pi$. З цією метою у рівняння стану (3) підставляємо формули (4), (6) і (7). У підсумку для ненульових компонент σ_{11} і σ_{12} тензора напружень одержимо такі вирази

$$\sigma_{11} = \hat{K}\frac{\partial^2\varphi_u}{\partial x_1^2} + \left(K - \frac{2}{3}G - \frac{K^2\alpha_\rho^2}{\rho_0 d_\rho}\right)\frac{\partial^2\varphi_u}{\partial x_2^2} + 2G\frac{\partial^2\psi_u}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{K\alpha_\rho}{d_\rho}\tilde{\mu}'_\pi\,, \tag{13}$$

$$\sigma_{12} = G\left(2\frac{\partial^2\varphi_u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2\psi_u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\psi_u}{\partial x_1^2}\right). \tag{14}$$

Відтак, враховуючи формули (13) і (14), крайовим умовам (11) надамо вигляду

$$\left[\hat{K}\frac{\partial^2\varphi_u}{\partial x_1^2} + \left(K - \frac{2}{3}G - \frac{K^2\alpha_\rho^2}{\rho_0 d_\rho}\right)\frac{\partial^2\varphi_u}{\partial x_2^2} + 2G\frac{\partial^2\psi_u}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{K\alpha_\rho}{d_\rho}\tilde{\mu}'_\pi\right]\Bigg|_{x_1=0} = 0\,, \tag{15}$$

$$\left(2\frac{\partial^2\varphi_u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2\psi_u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\psi_u}{\partial x_1^2}\right)\Bigg|_{x_1=0} = 0\,. \tag{16}$$

Таким чином задача про визначення закономірностей поширення хвиль Релея в ізотропному пружному півпросторі зводиться до розв’язування системи рівнянь (8)-(10) за крайових умов (12), (15), (16), а також умов обмеженості розв’язків у півпросторі у разі $x_1 \to +\infty$.

2. Розв’язок задачі та його аналіз

Бачимо, що функція ψ_u визначається із рівняння (8), яке не пов’язане з рештою рівнянь цієї системи, тоді як потенціали φ_u та $\tilde{\mu}'_\pi$ є розв’язками зв’язаних рівнянь (9) і (10). Однак функції ψ_u, φ_u та $\tilde{\mu}'_\pi$ пов’язані крайовими умовами (12), (15) та (16).

Розв’язок $f = \{\psi_u, \varphi_u, \tilde{\mu}'_\pi\}$ сформульованої задачі подамо сумою:

$$f = f^s + f^d\,. \tag{17}$$

Доданки $f^s = \{\psi_u^s, \varphi_u^s, \tilde{\mu}'^s_\pi\}$ є функціями лише просторової координати x_1. Вони справджують систему стаціонарних рівнянь

$$\frac{d^2\psi_u^s}{dx_1^2} = 0\,, \qquad \frac{d^2\varphi_u^s}{dx_1^2} = \frac{K\alpha_\rho}{\hat{K}d_\rho}\tilde{\mu}'^s_\pi\,, \qquad \frac{d^2\tilde{\mu}'^s_\pi}{dx_1^2} - \lambda_\mu^2\tilde{\mu}'^s_\pi = \lambda_\mu^2\frac{K\alpha_\rho}{\rho_0}\frac{d^2\varphi_u^s}{dx_1^2}\,, \tag{18}$$

умови обмеженості розв’язків на безмежності та неоднорідні крайові умови на поверхні $x_1 = 0$

$$\frac{d^2\psi_u^s}{dx_1^2}\Bigg|_{x_1=0} = 0\,, \quad \left[\hat{K}\frac{d^2\varphi_u^s}{dx_1^2} - \frac{K\alpha_\rho}{d_\rho}\tilde{\mu}'^s_\pi\right]\Bigg|_{x_1=0} = 0\,, \quad \tilde{\mu}'^s_\pi\Big|_{x_1=0} = -\mu_{\pi 0}\,. \tag{19}$$

Функції $f^d = \left\{ \psi_u^d, \varphi_u^d, \tilde{\mu}_\pi'^d \right\}$ задовольняють рівняння (8)-(10), умови обмеженості й однорідні крайові умови

$$\left[\hat{K} \frac{\partial^2 \varphi_u^d}{\partial x_1^2} + \left(K - \frac{2}{3} G - \frac{K^2 \alpha_\rho^2}{\rho_0 d_\rho} \right) \frac{\partial^2 \varphi_u^d}{\partial x_2^2} + 2G \frac{\partial^2 \psi_u^d}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{K\alpha_\rho}{d_\rho} \tilde{\mu}_\pi'^d \right] \Bigg|_{x_1 = 0} = 0,$$

$$\left(2 \frac{\partial^2 \varphi_u^d}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \psi_u^d}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \psi_u^d}{\partial x_1^2} \right) \Bigg|_{x_1 = 0} = 0, \qquad \tilde{\mu}_\pi'^d \Big|_{x_1 = 0} = 0. \tag{20}$$

Розв'язок системи рівнянь (18), що задовольняє крайові умови (19) та умову обмеженості у разі $x_1 \to +\infty$, є такий

$$\psi_u^s(x_1) = \psi_0^s, \quad \varphi_u^s(x_1) = \varphi_0^s - \mu_{\pi 0} \frac{K\alpha_\rho}{\hat{K} d_\rho \breve{\lambda}^2} e^{-\breve{\lambda} x_1}, \quad \tilde{\mu}_\pi'^s = -\mu_{\pi 0}\, e^{-\breve{\lambda} x_1}, \tag{21}$$

де ψ_0^s, φ_0^s — сталі величини, а $\breve{\lambda}^2 = \lambda_\mu^2 (1 + \mathfrak{M})$ і $\mathfrak{M} = \dfrac{K^2 \alpha_\rho^2}{\hat{K} \rho_0 d_\rho}$. Ця частина розв'язку описує неоднорідність полів, зумовлену наявністю в тілі поверхні [11].

Розв'язок $f^d = \left\{ \psi_u^d, \varphi_u^d, \tilde{\mu}_\pi'^d \right\}$ системи рівнянь (8)-(10) шукаємо у вигляді $f^d(x_1, x_2, t) = f^*(x_1) e^{-i(\omega t - k x_2)}$. Тут $f^*(x_1) = \left\{ \psi_u^*(x_1), \varphi_u^*(x_1), \tilde{\mu}_\pi'^*(x_1) \right\}$, а k — невідома величина, яку визначатимемо з однорідних крайових умов (20). На основі (8)-(10) для знаходження функцій $f^*(x_1)$ одержуємо таку систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2 \psi_u^*}{dx_1^2} - \nu_2^2 \psi_u^* = 0, \tag{22}$$

$$\frac{d^2 \varphi_u^*}{dx_1^2} - \nu_1^2 \varphi_u^* = \frac{K\alpha_\rho}{\hat{K} d_\rho} \tilde{\mu}_\pi'^*, \tag{23}$$

$$\frac{d^2 \tilde{\mu}_\pi'^*}{dx_1^2} - \left(k^2 + \lambda_\mu^2 \right) \tilde{\mu}_\pi'^* = \lambda_\mu^2 \frac{K\alpha_\rho}{\rho_0} \left(\frac{d^2 \varphi_u^*}{dx_1^2} - k^2 \varphi_u^* \right). \tag{24}$$

Тут $\nu_j^2 = k^2 - \omega^2 / c_j^2$, $j = 1, 2$.

Із загальних розв'язків рівняння (22) виберемо той, який відповідає зменшенню амплітуди хвилі зі збільшенням координати x_1. Відтак запишемо:

$$\psi_u^*(x_1) = a_3 e^{-\nu_2 x_1}, \tag{25}$$

де a_3 — невідома константа, а $\nu_2 > 0$.

Розв'язки рівнянь (23), (24) шукаємо у вигляді

$$\varphi_u^*(x_1) = ae^{\beta x_1}, \qquad \tilde{\mu}_\pi'^* = \tilde{a}e^{\beta x_1}. \tag{26}$$

Тут a та $\tilde{a}$ невідомі величини.

На основі (23), (24) та (26) для визначення β отримаємо співвідношення

$$\beta^4 - \left[2k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} + \lambda_\mu^2\left(1+\mathfrak{M}\right)\right]\beta^2 + \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right)\left(k^2 + \lambda_\mu^2\right) + \mathfrak{M}k^2\lambda_\mu^2 = 0. \tag{27}$$

Коренями цього біквадратного рівняння є

$$\beta_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left\langle 2k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} + \lambda_\mu^2\left(1+\mathfrak{M}\right) \pm \right.$$

$$\left. \pm\sqrt{\left[2k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} + \lambda_\mu^2\left(1+\mathfrak{M}\right)\right]^2 - 4\left[k^2\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) + \lambda_\mu^2\left(k^2\left(1+\mathfrak{M}\right) - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right)\right]}\right\rangle. \tag{28}$$

Знову ж таки, із (28) вибираємо ті корені, які відповідають зменшенню амплітуди хвилі з глибиною. Таким чином маємо

$$\varphi_u^*(x_1) = a_1 e^{-\beta_1 x_1} + a_2 e^{-\beta_2 x_1}, \qquad \tilde{\mu}_\pi'^* = \tilde{a}_1 e^{-\beta_1 x_1} + \tilde{a}_2 e^{-\beta_2 x_1}. \tag{29}$$

Тут $\beta_j > 0$ $\left(j = 1, 2\right)$; a_j та $\tilde{a}_j$ $\left(j = 1, 2\right)$ — сталі.

Підставивши формули (29) у рівняння (23), (24), одержимо

$$\tilde{a}_j = a_j \frac{\widehat{K} d_\rho}{K\alpha_\rho}\left(\beta_j^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2}\right), \quad j = 1, 2.$$

У підсумку для складників $f^d = \left\{\psi_u^d, \varphi_u^d, \tilde{\mu}_\pi'^d\right\}$ отримаємо такі вирази

$$\psi_u^d(x_1, x_2, t) = a_3 e^{-\nu_2 x_1} e^{-i\left(\omega t - kx_2\right)}, \tag{30}$$

$$\varphi_u^d(x_1, x_2, t) = \left(a_1 e^{-\beta_1 x_1} + a_2 e^{-\beta_2 x_1}\right) e^{-i\left(\omega t - kx_2\right)}, \tag{31}$$

$$\tilde{\mu}_\pi'^d(x_1, x_2, t) = \frac{\widehat{K} d_\rho}{K\alpha_\rho}\left[a_1\left(\beta_1^2 - \nu_1^2\right)e^{-\beta_1 x_1} + a_2\left(\beta_2^2 - \nu_1^2\right)e^{-\beta_2 x_1}\right] e^{-i\left(\omega t - kx_2\right)}. \tag{32}$$

Амплітуди поздовжніх і поперечних коливань швидко зменшуються у міру віддалення від поверхні в глибину тіла згідно експоненціального закону з різними коефіцієнтами спадання. Локальне зміщення маси впливає на швидкість спадання амплітуди поздовжньої хвилі з глибиною, про що свідчить залежність параметрів β_1 і β_2 від величин λ_μ та $\mathfrak{M}$, пов'язаних із локальним зміщенням маси. Візуально процес локального зміщення маси не вплинув на поперечну хвилю (згідно формули (30) потенціал ψ_u^d має такий же ж вигляд, як і в класичній теорії пружності, вираз для ν_2 теж не змінився) [4, с. 681]. У безмежному середовищі поперечна хвиля не зазнає впливу локального зміщення маси [12]. Однак у півпросторі поперечна та поздовжня хвилі, а також потенціал $\tilde{\mu}_\pi'^d$ зв'язані між собою граничними умовами (20), завдяки чому поперечна хвиля (опосередковано через параметр k) також зазнаватиме впливу локального зміщення маси. Згідно формули (31) амплітуда потенціалу φ_u^d визначається двома доданками. Перший із них, пропорційний $e^{-\beta_1 x_1}$, співпадає з результатами теорії пружності [4], якщо прийняти $\mathfrak{M}=0$ (у такому наближенні $\beta_1=\nu_1$). Наявність другого доданку, пропорційного $e^{-\beta_2 x_1}$, зумовлена врахуванням процесу локального зміщення маси. Такий доданок відсутній у класичній теорії пружності.

Із формул (28) для частот $\omega \ll c_2\lambda_\mu$ (для хлориду натрію це відповідає $\omega \ll 10^9$ Гц) отримаємо такі наближені співвідношення для визначення β_1^2 та β_2^2:

$$\beta_1^2 \approx k^2\left(1-\frac{\eta\bar{\theta}}{1+\mathfrak{M}}\right)=k^2\left[1-\eta\bar{\theta}\left(1-\frac{\mathfrak{M}}{1+\mathfrak{M}}\right)\right],$$

$$\beta_2^2 \approx \frac{k^2}{\Omega'^2}\left[\eta\left(1+\mathfrak{M}\right)+\Omega'^2\left(1-\eta\bar{\theta}\frac{\mathfrak{M}}{1+\mathfrak{M}}\right)\right].$$

Тут $\eta=c^2/c_2^2$, $\bar{\theta}=c_2^2/c_1^2<1$, $\Omega'=\omega/\left(c_2\lambda_\mu\right)$.

Оцінимо віддалі $x_1^{(1)}$ та $x_1^{(2)}$, на яких експоненти $e^{-\beta_1 x_1}$ та $e^{-\beta_2 x_1}$ загасають в e раз. Маємо

$$x_1^{(1)}=\frac{1}{\beta_1}\approx\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+\mathfrak{M}}{1+\mathfrak{M}-\eta\bar{\theta}}}, \qquad x_1^{(2)}=\frac{1}{\beta_2}\approx\frac{\Omega'}{k\sqrt{\eta\left(1+\mathfrak{M}\right)}}.$$

Для низьких частот $\Omega' \ll 1$ і $\beta_1 \ll \beta_2$, а тому $x_1^{(2)} \ll x_1^{(1)}$. Відтак $e^{-\beta_2 x_1}$ спадає значно швидше, аніж $e^{-\beta_1 x_1}$, тобто вплив складника, пов'язаного з β_2, вагомий лише у надзвичайно вузькій приповерхневій області $0 \le x_1 \ll x_1^{(2)}$.

Для частот $\omega \gg c_2\lambda_\mu$ на основі формул (28) отримаємо

$$\beta_1^2 \approx k^2\left(1-\eta\bar{\theta}+\frac{\eta\mathfrak{M}}{\Omega'^2}\right), \qquad \beta_2^2 \approx k^2\left(1+\frac{\eta}{\Omega'^2}\right).$$

Для кристалів NaCl такі частоти відповідають значенням $\omega \gg 10^9$ Гц (гіперзвукові хвилі). За таких частот довжина хвилі ультразвуку сумірна міжмолекулярним відстаням. У цьому випадку β_1 і β_2 теж стають сумірними величинами, а відтак у цьому частотному діапазоні впливом локального зміщення маси на поширення поверхневих хвиль Релея не можна нехтувати. Саме тому класична теорія пружності, яка не враховує змін структури матеріалу у приповерхневих областях тіла (локальне зміщення маси), для гіперзвукових хвиль дає некоректні результати.

Підставивши формули (30)-(32) у граничні умови (20), для визначення невідомих величин a_j, $j=\overline{1,3}$, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{gathered}\left(2Gk^2-\widehat{K}\,\omega^2/c_1^2\right)a_1+\left(2Gk^2-\widehat{K}\,\omega^2/c_1^2\right)a_2-2ik\nu_2Ga_3=0,\\ 2ik\beta_1a_1+2ik\beta_2a_2+\left(k^2+\nu_2^2\right)a_3=0,\\ \left(\beta_1^2-\nu_1^2\right)a_1+\left(\beta_2^2-\nu_1^2\right)a_2=0.\end{gathered}\tag{33}$$

Ця система рівнянь буде мати нетривіальний розв'язок, якщо її визначник дорівнюватиме нулеві, тобто

$$4k^2\nu_2\left(\beta_1\beta_2+k^2-\frac{\omega^2}{c_1^2}\right)=\left(2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}\right)^2\left(\beta_1+\beta_2\right).\tag{34}$$

Зазначимо, що у разі врахування процесу локального зміщення маси для визначення хвильового числа k ми одержали рівняння, значно складніше, порівняно з його аналогом [4, с. 682]

$$4k^2\nu_2\underset{\smile}{\nu}_1=\left(2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}\right)^2$$

у лінійній теорії пружності. Тут $\underset{\smile}{\nu}_1=k^2-\omega^2/\underset{\smile}{c}_1^2$, $\underset{\smile}{c}_1^2=\left(K+4/3G\right)/\rho_0$.

Якщо праву і ліву частини співвідношення (34) двічі піднести до квадрату та врахувати, що згідно формул (28)

$$\beta_1^2\beta_2^2=k^4\left[1-\bar{\theta}\eta+\frac{\eta}{\Omega'^2}\left(1+\mathfrak{M}-\bar{\theta}\eta\right)\right],\quad \beta_1^2+\beta_2^2=k^2\left[2-\bar{\theta}\eta+\frac{\eta}{\Omega'^2}\left(1+\mathfrak{M}\right)\right],$$

то отримаємо таке рівняння для визначення параметра η

$$\begin{aligned}&\left\{\left(1-\frac{1}{2}\eta\right)^4\left[2-\bar{\theta}\eta+\frac{\eta}{\Omega'^2}\left(1+\mathfrak{M}\right)\right]-\right.\\ &\left.-\left(1-\eta\right)\left[1-\bar{\theta}\eta+\frac{\eta}{\Omega'^2}\left(1+\mathfrak{M}-\bar{\theta}\eta\right)+\left(1-\bar{\theta}\eta\right)^2\right]\right\}^2=\\ &=4\left[1-\bar{\theta}\eta+\frac{\eta}{\Omega'^2}\left(1+\mathfrak{M}-\bar{\theta}\eta\right)\right]\left[\left(1-\eta\right)\left(1-\bar{\theta}\eta\right)-\left(1-\frac{1}{2}\eta\right)^4\right]^2.\end{aligned}\tag{35}$$

Рівняння (35) доволі складне. За відомих значень параметрів $\overline{\theta}$, Ω' та $\mathfrak{M}$ корені цього рівняння можна знайти числовими методами. Із знайдених дійсних коренів слід вибрати лише ті, які задовольнятимуть умови $\nu_2 > 0$ і $\beta_j > 0$, $j = 1, 2$. Бачимо, що рівняння (35) містить безрозмірний параметр Ω', який пропорційний частоті ω. Тому, у разі врахування процесу локального зміщення маси, швидкість хвилі Релея залежатиме від частоти, тобто ця хвиля дисперсійна. Зазначимо, що спрямувавши у співвідношенні (35) параметри $\mathfrak{M}$ та Ω' до нуля, у граничному випадку отримаємо дисперсійне рівняння класичної теорії пружності [4].

Розглянемо частковий випадок нестисливого середовища, для якого $c_1^2 = \infty$, а отже $\overline{\theta} = 0$. Прийнявши у співвідношенні (35) $\overline{\theta} = 0$, одержимо

$$\left(1+\mathfrak{M}\right)^2 \Omega'^{-4} \eta^3 \left(\eta^3 - 8\eta^2 + 24\eta - 16\right) = 0. \tag{36}$$

Рівняння (36) співпадає з результатами монографії [4, с. 684], де закономірності поширення хвиль Релея вивчено на основі співвідношень класичної теорії пружності. Таким чином у нестисливому середовищі поздовжня пружна хвиля не є дисперсійна. Такий результат очікуваний, оскільки раніше було показано [12], що локальне зміщення маси пов’язане із процесами стискування-розтягування та не залежить від зсувних деформацій. Тому вплив локального зміщення маси на механічні поля у нестисливому середовищі відсутній.

Виходячи із системи алгебраїчних рівнянь (33), можемо записати

$$a_3 = -2ik \frac{\left(\beta_1\beta_2 + \nu_1^2\right)\left(\beta_2 - \beta_1\right)}{\left(\beta_2^2 - \nu_1^2\right)\left(k^2 + \nu_2^2\right)} a_1, \qquad a_2 = -\frac{\beta_1^2 - \nu_1^2}{\beta_2^2 - \nu_1^2} a_1. \tag{37}$$

Врахувавши формули (17), (21), (30)-(32) і (37), для знаходження функцій ψ_u, φ_u та $\tilde{\mu}'_\pi$ одержимо такі вирази

$$\psi_u(x_1, x_2, t) = \psi_0^s - 2ika_1 \frac{\left(\beta_1\beta_2 + \nu_1^2\right)\left(\beta_2 - \beta_1\right)}{\left(\beta_2^2 - \nu_1^2\right)\left(k^2 + \nu_2^2\right)} e^{-\nu_2 x_1} e^{-i\left(\omega t - k x_2\right)},$$

$$\varphi_u(x_1, x_2, t) = \varphi_0^s - \mu_{\pi 0} \frac{K\alpha_\rho}{\widehat{K}d_\rho \breve{\lambda}^2} e^{-\breve{\lambda} x_1} + a_1 \left(e^{-\beta_1 x_1} - \frac{\beta_1^2 - \nu_1^2}{\beta_2^2 - \nu_1^2} e^{-\beta_2 x_1} \right) e^{-i\left(\omega t - k x_2\right)},$$

$$\tilde{\mu}'_\pi(x_1, x_2, t) = -\mu_{\pi 0}\, e^{-\breve{\lambda} x_1} + a_1 \left(\beta_1^2 - \nu_1^2\right) \frac{\widehat{K}d_\rho}{K\alpha_\rho} \left(e^{-\beta_1 x_1} - e^{-\beta_2 x_1}\right) e^{-i\left(\omega t - k x_2\right)}. \tag{38}$$

Формули (38) визначають потенціали з точністю до сталої величини a_1. Цю величину можна визначити, сконкретизувавши причину виникнення поверхневої хвилі.

На основі формул (7) і (38) можна обчислити компоненти вектора переміщення, для яких отримаємо

$$u_1 = a_1\left[2k^2\frac{\left(\beta_1\beta_2+\nu_1^2\right)\left(\beta_2-\beta_1\right)}{\left(\beta_2^2-\nu_1^2\right)\left(k^2+\nu_2^2\right)}e^{-\nu_2 x_1}-\beta_1 e^{-\beta_1 x_1}+\right.$$

$$\left.+\beta_2\frac{\beta_1^2-\nu_1^2}{\beta_2^2-\nu_1^2}e^{-\beta_2 x_1}\right]\cos\left[\omega\left(t-\frac{x_2}{c}\right)\right]+\mu_{\pi 0}\frac{K\alpha_\rho}{\hat{K}d_\rho\breve{\lambda}}e^{-\breve{\lambda}x_1},$$

$$u_2 = ka_1\left[e^{-\beta_1 x_1}-2\nu_2\frac{\left(\beta_1\beta_2+\nu_1^2\right)\left(\beta_2-\beta_1\right)}{\left(\beta_2^2-\nu_1^2\right)\left(k^2+\nu_2^2\right)}e^{-\nu_2 x_1}-\frac{\beta_1^2-\nu_1^2}{\beta_2^2-\nu_1^2}e^{-\beta_2 x_1}\right]\sin\left[\omega\left(t-\frac{x_2}{c}\right)\right].$$

Коливний рух точок у приповерхневих областях тіла реалізується у площині, перпендикулярній до його межі. Під час коливань точки описують еліптичну траєкторію. Наслідком врахування локального зміщення маси став «зсув» еліпса вздовж осі Ox_1 на величину $\mu_{\pi 0}\frac{K\alpha_\rho}{\hat{K}d_\rho\breve{\lambda}}e^{-\breve{\lambda}x_1}$ (порівняно з класичною теорією пружності).

Висновки. Співвідношення локально градієнтної лінійної теорії пружності використані для вивчення закономірностей поширення поверхневих хвиль Релея в ізотропному півпросторі. Розв'язувальну систему рівнянь моделі подано через векторний і скалярний потенціали вектора переміщення, а також потенціал $\tilde{\mu}'_\pi$, який є мірою впливу локального зміщення маси на внутрішню енергію. Показано, що для гіперзвукових хвиль, у яких довжина хвилі сумірна з міжмолекулярними відстанями, впливом локального зміщення маси не можна нехтувати. Отримано відповідне дисперсійне рівняння і встановлено, що поверхневі хвилі Релея є дисперсійні. Показано, що в граничному випадку нестисливого середовища дисперсія поздовжньої пружної хвилі відсутня й одержаний результат співпадає з аналогічним у рамках теорії пружності.

Література

[1] *Jagnoux, P.* Ultrasonic imaging by leaky Rayleigh waves / *P. Jagnoux, A. Vincent* // NDT International. — 1989. — Vol. 22, Issue 6. — P. 339-346.
[2] Поверхностные акустические волны в неоднородных средах / *С. В. Бирюков, Ю. В. Гуляев, В. В. Крылов, В. П. Плесский.* — Москва: Наука, 1991. — 415 с.
[3] *Ерофеев, В. И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой / *В. И. Ерофеев.* — Москва: Изд-во МГУ, 1999. — 327 с.
[4] *Новацкий, В.* Теория упругости / *В. Новацкий.* — Москва: Мир, 1975. — 872 с.
[5] http://kino-ap.eng.hokudai.ac.jp/ripples.html
[6] *Кулеш, М. А.* Дисперсия и поляризация поверхностных волн Рэлея для среды Коссера / *М. А. Кулеш, В. П. Матвеенко, И. Н. Шардаков* // Изв. РАН. МТТ. — 2007. — № 4. — С. 100-113.

[7] Modeling of wave dispersion using continuous wavelet transforms / *M. Kulesh, M. Holschneider, M. S. Diallo, Q. Xie, F. Scherbaum* // Pure and Appl. Geophys. — 2005. — Vol. 162, No 5. — P. 843-855.
[8] *Yerofeyev, V. I.* Waves in a gradient-elastic medium with surface energy / *V. I. Yerofeyev, O. A. Sheshenina* // J. Appl. Math. and Mech. — 2005. — Vol. 69, Issue 1. — P. 57-69.
[9] *Vardoulakis, I. G.* SH surfase waves in a homogeneous gradient-elastic half-space with surface energy / *I. G. Vardoulakis, H. G. Georgiadis* // J. Elasticity. — 1997. — Vol. 47. — P. 147-165.
[10] Математичне моделювання термомеханічних процесів у пружних тілах із врахуванням локального зміщення маси / *Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина* // Доповіді НАН України. — 2007. — № 6. — С. 45-49.
[11] *Бурак, Я.* Основи локально градієнтної теорії діелектриків / *Я. Бурак, В. Кондрат, О. Грицина.* — Ужгород: Поліграфцентр «Ліра», 2011. — 208 с.
[12] *Кондрат, В. Ф.* Механоелектромагнітна взаємодія в ізотропних діелектриках з урахуванням локального зміщення маси / *В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2009. — Т. 52, № 1. — С. 150-158.

Effects of local mass displacement on the Rayleigh surface waves

Olha Hrytsyna

The relations of local gradient theory of elasticity are used for studying of the effects of local mass displacement on Rayleigh surface waves in an isotropic half-space. The corresponding dispersion relation is obtained. It is shown that short interface waves become dispersive when local mass displacement is considered, that the classical theory of elasticity does not describe. It is shown also that in a limiting case of the incompressible environment the dispersion of a longitudinal elastic wave is absent and the received result coincides with results of the classical theory of elasticity.

Влияние локального смещения массы на поверхностные волны Рэлея

Ольга Грицина

Соотношения локально градиентной теории упругости использованы для изучения влияния локального смещения массы на распространение поверхностных волн Рэлея в изотропном упругом полупространстве. Получено соответствующее дисперсионное уравнение. Показано, что вследствие учета локального смещения массы короткие приповерхностные волны являются дисперсионными, чего не описывает классическая теория упругости. Показано также, что в предельном случае несжимаемой среды дисперсия продольной упругой волны отсутствует и полученный результат совпадает с результатами теории упругости.

Представлено професором В. Чекуріним

Отримано 09.04.12