

## **Напружений стан і приповерхнева неоднорідність структурно неоднорідного порожнистого циліндра**

Тарас Нагірний<sup>1</sup>, Зоя Бойко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> д. ф.-м. н., професор, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудасєва, 15, Львів, 79005; Zielona Góra University, 4 Prof. Shafran St., Poland, 65-516, e-mail: tnaigrny@yahoo.com

<sup>2</sup> Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудасєва, 15, Львів, 79005, e-mail: zoia@cmm.lviv.ua

*У рамках локально градієнтного підходу в термомеханіці вивчено напружений стан та ефекти, пов'язані з приповерхневою неоднорідністю у безмежному структурно неоднорідному ізотропному порожнистому циліндрі. Головну увагу зосереджено на дослідженні розмірних ефектів поверхневих напружень та силового навантаження, що призводить до крихкого руйнування. Вказано, що значення хімічного потенціалу, яке встановлюється на поверхнях циліндра, є однаковим на зовнішній та внутрішній поверхнях і однозначно визначається його геометричними та фізичними характеристиками, а також параметрами зовнішнього навантаження.*

**Ключові слова:** локально градієнтний підхід у термомеханіці, структурна неоднорідність, приповерхневі явища, міцність, розмірний ефект, порожнистий циліндр.

**Вступ.** У зв'язку з інтенсивним розвитком нанотехнологій і широким використанням в інженерній практиці тонкоплівкових і тонковолокнистих систем важливого значення набуває дослідження напружено-деформованого стану елементів таких систем та розрахунок і прогнозування їх деформаційних, міцнісних і експлуатаційних властивостей. Науковою основою прогнозування та підвищення параметрів міцності є математичні моделі, які достатньо повно враховують властивості приповерхневих областей тіла та структуру матеріалу. До таких моделей належать моделі, побудовані за локально градієнтного підходу у термомеханіці [1-5]. Під час формулювання крайових задач у рамках цього підходу на поверхні тіла, зазвичай, задавалося постійне значення хімічного потенціалу. Однак способів вимірювання такого значення вказати неможливо, оскільки хімічний потенціал є енергетичною характеристикою. У роботі [6] граничну умову запропоновано формулювати на густину та показано, що ця умова дозволяє за локально градієнтного підходу описувати фізичну неоднорідність приповерхневих областей і враховувати геометричну неоднорідність поверхні тіла. Вказано також на узгодження з відомими у літературі підходами [7, 8], у яких враховують неідеальну форму поверхні та фізичну неоднорідність приповерхневих шарів при контактній взаємодії твердих тіл.

Пропонована робота виконана у розвиток [6] і має за мету вивчення за локально градієнтного підходу в термомеханіці напруженого стану та розмірних ефектів у порожнистому циліндрі, у тому числі, поверхневих напружень і хімічного потенціалу, а також силового навантаження, що призводить до крихкого руйнування тіла.

### 1. Формулювання задачі

Розглянемо нескінченний ізотропний деформівний порожнистий круговий циліндр, який віднесено до циліндричної системи координат  $(r, \varphi, z)$ . Внутрішній радіус циліндра позначимо  $R_1$ , а зовнішній —  $R_2$ . Вважаємо, що внутрішня та зовнішня поверхні циліндра вільні від силового навантаження і на них задано постійне значення збурення густини  $\rho_a$ . При цьому за відліковий приймаємо стан вільного від зовнішнього навантаження середовища, матеріал якого ідентичний матеріалу тіла. Циліндр навантажено на безмежності в напрямку осі  $Oz$  розтягувальними зусиллями  $\sigma_a$  ( $\sigma_a \geq 0$ ).

За розглядуваної зовнішньої дії рівноважний стан тіла залежить лише від координати  $r$  і описується системою рівнянь [6]

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= 0, \\ r \frac{d^2\sigma_{\varphi\varphi}}{dr^2} + 2 \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dr} - \frac{d\sigma_{rr}}{dr} &= \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{K-2/3G}{3K} \sigma + \frac{2G\beta}{3K} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Pi_{Mr}) \right] \right\}, \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dr} &= \frac{d}{dr} \left[ \frac{K-2/3G}{3K} \sigma + \frac{2G\beta}{3K} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Pi_{Mr}) \right], \\ \frac{d^2\Pi_{Mr}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Pi_{Mr}}{dr} - \left( \frac{K\gamma}{\alpha K - \beta^2} + \frac{1}{r^2} \right) \Pi_{Mr} &+ \frac{\beta}{3(\alpha K - \beta^2)} \frac{d\sigma}{dr} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

яку необхідно доповнити такими граничними умовами на поверхнях  $r = R_i$  ( $i = 1, 2$ ) циліндра [6]

$$\sigma_{rr}|_{r=R_i} = 0, \quad \left. \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Pi_{Mr}) \right|_{r=R_i} = \rho_a, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

та умовою, що відповідає навантаженню тіла на безмежності зусиллями  $\sigma_a$  в напрямку осі  $Oz$

$$\frac{1}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{zz} r dr d\varphi = \sigma_a. \quad (3)$$

Тут  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{zz}$  — компоненти тензора напружень Коші  $\hat{\sigma}$ ;  $\sigma = \hat{\sigma} : \hat{I}$ ,  $\hat{I}$  — одиничний тензор;  $\Pi_{Mr}$  — ненульова компонента вектора збурення маси  $\vec{\Pi}_M$  ( $\vec{\Pi}_M = \vec{\Pi}_M(\Pi_{Mr}, 0, 0)$ );  $\rho_a$  — задане значення збурення густини;  $K$ ,  $G$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — характеристики матеріалу.

## 2. Дослідження рівноважного стану

Розв'язок задачі (1)-(3) такий

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= \frac{2G\beta\rho_a}{K+4/3G} \left\langle \frac{1}{\xi r} [d_1 I_1(\xi r) + d_2 K_1(\xi r)] + \right. \\ &+ \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \left\{ \frac{R_1}{\xi} [d_1 I_1(\xi R_1) + d_2 K_1(\xi R_1)] - \frac{R_2}{\xi} [d_1 I_1(\xi R_2) + d_2 K_1(\xi R_2)] - \right. \\ &\left. \left. - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{\xi R_1} [d_1 I_1(\xi R_1) + d_2 K_1(\xi R_1)] - \frac{1}{\xi R_2} [d_1 I_1(\xi R_2) + d_2 K_1(\xi R_2)] \right\} \right\} \right\rangle, \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r) &= \frac{2G\beta\rho_a}{K+4/3G} \left\langle d_1 I_0(\xi r) - d_2 K_0(\xi r) - \frac{1}{\xi r} [d_1 I_1(\xi r) + d_2 K_1(\xi r)] + \right. \\ &+ \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \left\{ \frac{R_1}{\xi} [d_1 I_1(\xi R_1) + d_2 K_1(\xi R_1)] - \frac{R_2}{\xi} [d_1 I_1(\xi R_2) + d_2 K_1(\xi R_2)] + \right. \\ &\left. \left. + \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{\xi R_1} [d_1 I_1(\xi R_1) + d_2 K_1(\xi R_1)] - \frac{1}{\xi R_2} [d_1 I_1(\xi R_2) + d_2 K_1(\xi R_2)] \right\} \right\} \right\rangle, \\ \sigma_{zz}(r) &= \sigma_a + \frac{2G\beta\rho_a}{K+4/3G} \left\langle d_1 I_0(\xi r) - d_2 K_0(\xi r) + \right. \\ &\left. + \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \left\{ \frac{R_1}{\xi} [d_1 I_1(\xi R_1) + d_2 K_1(\xi R_1)] - \frac{R_2}{\xi} [d_1 I_1(\xi R_2) + d_2 K_1(\xi R_2)] \right\} \right\rangle; \quad (4) \end{aligned}$$

$$\Pi_{Mr}(r) = \frac{\rho_a}{\xi} [d_1 I_1(\xi r) + d_2 K_1(\xi r)]. \quad (5)$$

Тут  $I_n(\xi r)$ ,  $K_n(\xi r)$  — модифіковані функції Бесселя першого та третього роду  $n$ -го

порядку ( $n = 0, 1$ );  $\xi = \sqrt{\frac{\gamma(K+4/3G)}{\alpha(K+4/3G) - \beta^2}}$ ;  $d_1 = \frac{K_0(\xi R_1) - K_0(\xi R_2)}{K_0(\xi R_1)I_0(\xi R_2) - K_0(\xi R_2)I_0(\xi R_1)}$ ;

$$d_2 = \frac{I_0(\xi R_1) - I_0(\xi R_2)}{K_0(\xi R_1)I_0(\xi R_2) - K_0(\xi R_2)I_0(\xi R_1)}.$$

Напруження  $\sigma_{rr}$  дорівнюють нулю на зовнішній і внутрішній поверхнях циліндра. З віддаленням від внутрішньої поверхні у глибину циліндра напруження  $\sigma_{rr}$

зростають до максимального значення та є розтягувальними. Далі, зі збільшенням  $r$  напруження спадають до нуля. В околі зовнішньої поверхні  $\sigma_{rr}$  є стискальні. Максимальні розтягувальні напруження за абсолютним значенням завжди більші від максимальних стискальних напружень. Зі зростанням  $R_2$  максимальні значення  $|\sigma_{rr}|$  прямують до нуля.

На рис. 1, 2 показано розподіл приведених напружень  $\sigma_{\varphi\varphi}/\sigma_0$  (рис. 1) і  $\sigma_{zz}/\sigma_0$  (рис. 2) у вільному від силового навантаження циліндрі для  $R_1/R_2 = 0,2$ ,  $\xi R_2 = 15, 25, 50$  (криві 1-3 відповідно). Тут  $\sigma_0 = 2G\beta\rho_a/(K + 4/3G)$ .

Для циліндрів, товщина стінки яких  $R_2 - R_1$  співвимірна з характерним розміром області приповерхневої неоднорідності  $\xi^{-1}$ , неоднорідність у розподілі напружень суттєва в усій області тіла. Такі циліндри можна ототожити з нанотрубками. Для циліндрів, у яких  $R_2 - R_1 \gg \xi^{-1}$ , напруження у внутрішній області тіла практично дорівнюють нулеві.

Поверхневі напруження  $\sigma_{\varphi\varphi}$  (аналогічно як і  $\sigma_{zz}$ ) однакові на зовнішній  $r = R_2$  та внутрішній  $r = R_1$  поверхнях порожнистого циліндра і визначаються формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}(R_1) = \sigma_{\varphi\varphi}(R_2) = \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G} & \left\langle 1 + \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \left\{ \frac{R_1}{\xi} [d_1 I_1(\xi R_1) + d_2 K_1(\xi R_1)] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{R_2}{\xi} [d_1 I_1(\xi R_2) + d_2 K_1(\xi R_2)] \right\} \right\rangle, \\ \sigma_{zz}(R_1) = \sigma_{zz}(R_2) = \sigma_a + \sigma_{\varphi\varphi}(R_1). \end{aligned} \quad (6)$$

Поверхневі напруження  $\sigma_{\varphi\varphi}$  та  $\sigma_{zz}$  відрізняються на величину  $\sigma_a$ . У вільному від силового навантаження циліндрі

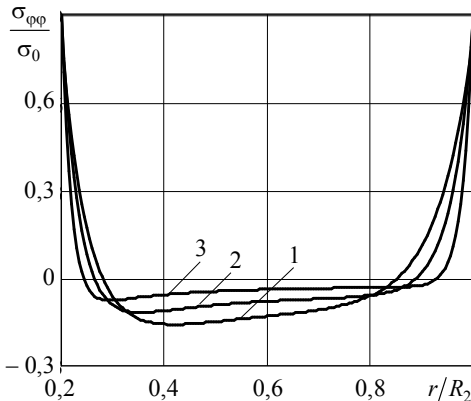


Рис. 1. Розподіл напружень  $\sigma_{\varphi\varphi}/\sigma_0$  у циліндрі

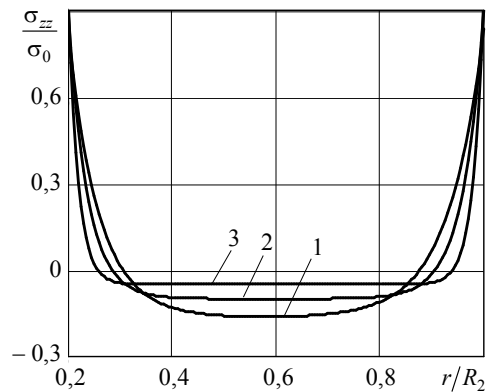


Рис. 2. Розподіл напружень  $\sigma_{zz}/\sigma_0$  у циліндрі

$$\sigma_{\varphi\varphi}(R_1) = \sigma_{\varphi\varphi}(R_2) = \sigma_{zz}(R_1) = \sigma_{zz}(R_2) \equiv \sigma_{sur}.$$

Рівність значень поверхневих напружень є наслідком самозрівноваженості напружень у довільному поперечному перерізі  $z = const$ .

На рис. 3 показано залежність поверхневих напружень  $\sigma_{sur}/\sigma_0$  від  $\xi R_2$  для різних значень  $R_1/R_2$ . Криві 1-3 відповідають  $R_1/R_2 = 0,4; 0,6; 0,8$ .

Бачимо, що зі збільшенням зовнішнього радіуса циліндра, поверхневі напруження зростають, прямуючи до значень поверхневих напружень у півпросторі  $\sigma_0$  ( $\sigma_{sur}/\sigma_0 \rightarrow 1$ ).

Використовуючи рівняння стану

$$\eta = \eta_* + \frac{\alpha K - \beta^2}{K} \bar{\nabla} \cdot \bar{\Pi}_M + \frac{\beta}{3K} \sigma,$$

за відомими компонентами тензора напружень і вектора збурення маси, для хімічного потенціалу  $\eta$  одержуємо

$$\begin{aligned} \eta(r) = \eta_* + \frac{\rho_a}{3K(K + 4/3G)} \left\{ 3K \left[ \alpha(K + 4/3G) - \beta^2 \right] \left[ d_1 I_0(\xi r) - \right. \right. \\ \left. \left. - d_2 K_0(\xi r) \right] + \frac{8G\beta^2}{R_2^2 - R_1^2} \left\{ \frac{R_1}{\xi} \left[ d_1 I_1(\xi R_1) + d_2 K_1(\xi R_1) \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{R_2}{\xi} \left[ d_1 I_1(\xi R_2) + d_2 K_1(\xi R_2) \right] \right\} \right\} + \frac{\beta}{3K} \sigma_a. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут  $\eta_*$  — значення  $\eta$  у відліковому стані.

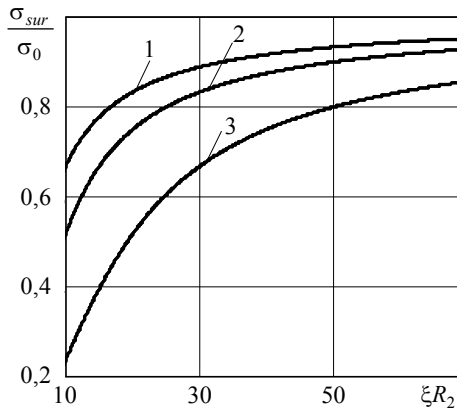


Рис. 3. Залежність поверхневих напружень  $\sigma_{sur}/\sigma_0$  від параметра  $\xi R_2$

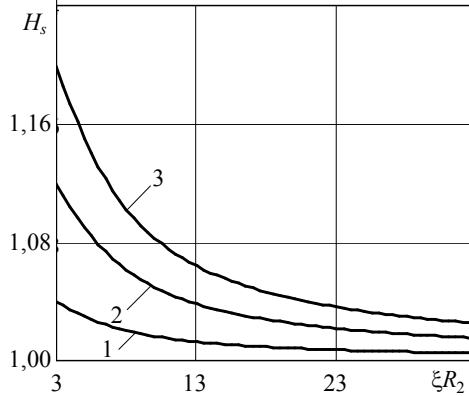


Рис. 4. Залежність поверхневого значення хімічного потенціалу  $H_s$  від параметра  $\xi R_2$

Поверхнєве значення хімічного потенціалу у вільному від силового навантаження тілі описується формулою

$$\eta_{sur} \equiv \eta(R_1) = \eta(R_2) = \eta_* + \frac{\rho_a}{3K(K + 4/3G)} \left\langle 3K \left[ \alpha(K + 4/3G) - \beta^2 \right] + \frac{8G\beta^2}{R_2^2 - R_1^2} \left\{ \frac{R_1}{\xi} [d_1 I_1(\xi R_1) + d_2 K_1(\xi R_1)] - \frac{R_2}{\xi} [d_1 I_1(\xi R_2) + d_2 K_1(\xi R_2)] \right\} \right\rangle. \quad (8)$$

Відзначимо рівність хімічних потенціалів на поверхнях циліндра, а також те, що поверхнєве значення хімічного потенціалу однозначно визначається його геометричними та фізичними параметрами. Залежність поверхневого значення хімічного потенціалу  $H_s \equiv (\eta_{sur} - \eta_*)/\eta_0$  ( $\eta_0 = \rho_a \left[ \alpha - \beta^2 / (K + 4/3G) \right]$ ) від параметра  $\xi R_2$  для  $R_1/R_2 = 0,4$ ;  $a \equiv 8G\beta^2 / \left\{ 3K \left[ \alpha(K + 4/3G) - \beta^2 \right] \right\} = -0,1; -0,3; -0,5$  (криві 1-3) показано на рис. 4. Бачимо, що зі зростанням товщини стінки циліндра збурення поверхневого значення хімічного потенціалу  $\eta_{sur} - \eta_*$  прямує до відповідного значення у півпросторі  $\eta_0$ .

### 3. Міцність циліндра. Розмірний ефект міцності

Для розрахунку міцності циліндра використаємо критерій першої класичної теорії міцності [9], а також методику, наведену у роботі [10]. За розрахункові приймаємо поверхнєві напруження  $\sigma_{zz}(R_1) = \sigma_{zz}(R_2)$ , які є найбільшими напруженнями у тілі. На основі співвідношення (6), одержуємо значення інтенсивності зовнішнього силового навантаження  $\sigma_a^{kr}$ , що призводить до крихкого руйнування циліндра

$$\sigma_a^{kr} = \sigma_p - \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G} \left\{ 1 + \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \left\{ \frac{R_1}{\xi} [d_1 I_1(\xi R_1) + d_2 K_1(\xi R_1)] - \frac{R_2}{\xi} [d_1 I_1(\xi R_2) + d_2 K_1(\xi R_2)] \right\} \right\}, \quad (9)$$

де  $\sigma_p$  — теоретична межа міцності.

Введемо у розгляд величину  $\sigma_+$ , яка відповідає інтенсивності силового навантаження, що призводить до руйнування товстих циліндрів, співвідношенням

$$\sigma_+ = \sigma_p - \frac{2G\beta\rho_a}{K + 4/3G}.$$

Тоді формулу (9) перетворюємо до вигляду

$$\sigma_a^{kr} = \sigma_+ + \frac{4G\beta\rho_a}{(K + 4/3G)(R_2^2 - R_1^2)} \left\{ \frac{R_2}{\xi} [d_1 I_1(\xi R_2) + d_2 K_1(\xi R_2)] - \frac{R_1}{\xi} [d_1 I_1(\xi R_1) + d_2 K_1(\xi R_1)] \right\}. \quad (10)$$

Ця формула описує вплив розмірів циліндра на його міцність, тобто розмірний ефект міцності порожнистого циліндра. Аналіз співвідношення (10) показує, що зі збільшенням зовнішнього радіуса циліндра величина прикладеного силового навантаження, яке призводить до його руйнування, зменшується, прямує до  $\sigma_+$ . Це означає, що порожнисті циліндри, товщина стінки яких є меншою, витримують більшу інтенсивність зовнішнього навантаження.

Зазначимо також, що оскільки напруження  $\sigma_{zz}$  на зовнішній і внутрішній поверхнях циліндра рівні між собою, то руйнування тіла починається одночасно з обох поверхонь.

**Висновки.** За локально градієнтного підходу в термомеханіці досліджено рівноважний стан структурно неоднорідного порожнистого циліндра. Показано, що найбільшими напруженнями у вільному від силового навантаження тілі є осеві та кільцеві напруження, значення яких на зовнішній і внутрішній поверхнях однакові. Цим напруженням властивий розмірний ефект: зі збільшенням товщини стінки циліндра їх значення прямує до значення поверхневих напружень у півпросторі. Для циліндрів, товщина стінки яких співвимірні з характерним розміром приповерхневої неоднорідності, неоднорідність у розподілі напружень суттєва в усій області тіла. Для товстих циліндрів неоднорідність зосереджена в околі поверхонь, а напруження у внутрішній області тіла практично дорівнюють нулеві.

Хімічний потенціал, що встановлюється у тілі, однозначно визначається його геометричними та фізичними характеристиками, а також параметрами зовнішнього силового навантаження. При цьому значення хімічного потенціалу на зовнішній і внутрішній поверхнях рівні між собою.

Вивчено розмірний ефект міцності порожнього циліндра та показано, що циліндри, товщина стінки яких є меншою, витримують більшу інтенсивність зовнішнього силового навантаження.

### Література

- [1] Бурак, Я. И. Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах / Я. И. Бурак, Т. С. Нагірний // Прикл. механика. — 1992. — Т. 28, № 12. — С. 3-23.
- [2] Фізико-математичне моделювання складних систем / Я. Бурак, Є. Чапля, Т. Нагірний та ін.; під ред. Я. Бурака, Є. Чаплі. — Львів: СПОЛОМ, 2004. — 264 с.
- [3] Грицина, О. Локально-градієнтний підхід у термомеханіці / О. Грицина, Т. Нагірний, К. Червінка // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2006. — Вип. 3. — С. 72-83.
- [4] Нагірний, Т. С. Термодинамічні моделі та методи у локально-градієнтній термомеханіці з врахуванням приповерхневих явищ: автореферат дис. ... д. ф.-м. н.: 01.02.04 / Нагірний Тарас Семенович. — Львів, 1998. — 32 с. — Рукопис.
- [5] Бурак, Я. Основи локально-градієнтної теорії діелектриків / Я. Бурак, В. Кондрат, О. Грицина. — Ужгород: Поліграфцентр «Ліра», 2011. — 208 с.
- [6] Нагірний, Т. С. До вибору крайових умов у задачах локально-градієнтного підходу в термомеханіці / Т. С. Нагірний, К. А. Червінка, З. В. Бойко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2011. — Т. 54, № 3. — С. 199-206.
- [7] Adams, G. G. Adhesion at the wavy contact interface between two elastic bodies / G. G. Adams // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 2004. — Vol. 71. — P. 851-856.
- [8] Shvets, R. M. Discontinuous Contact of an Anisotropic Half-plane and a Rigid Base with Disturbed Surface / R. M. Shvets, R. M. Martynyak, A. A. Kryshchak // Int. J. Engng. Sci. — 1996. — Vol. 34, No 2. — P. 183-200.
- [9] Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие; под ред. В. В. Панасюка; в 4-х т. Т. 1. Основы механики разрушения материалов / В. В. Панасюк, А. Е. Андрейкив, В. С. Партон. — Киев: Наук. думка, 1988. — 488 с.
- [10] Нагірний, Т. С. Поверхневі напруження в шарі. Поверхневий натяг та міцність шару / Т. С. Нагірний // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1999. — Т. 42, № 4. — С. 111-115.

## Stress state and near-surface inhomogeneity of structurally heterogeneous hollow cylinder

Taras Nahirnyj, Zoya Boiko

*Within the local gradient approach in thermomechanics the stress state and effects related with a near-surface inhomogeneity in an infinite structurally heterogeneous isotropic hollow cylinder have been studied. A main attention is concentrated on the investigation of size effects of surface stresses and force load that causes a brittle fracture. It is indicated that the value of chemical potential that established on the surfaces of cylinder is the same on an external and internal surfaces, and is uniquely determined by its physical and geometrical characteristics, and also by the parameters of external force.*



Тарас Нагірний, Зоя Бойко

Напружений стан і приповерхнева неоднорідність структурно неоднорідного ... циліндра

## Напряженное состояние и приповерхностная неоднородность структурно неоднородного полого цилиндра

Тарас Нагирный, Зоя Бойко

*В рамках локально градиентного подхода в термомеханике изучено напряженное состояние и эффекты, связанные с приповерхностной неоднородностью в бесконечном структурно неоднородном изотропном полом цилиндра. Главное внимание обращено на исследование размерных эффектов поверхностных напряжений и силовой нагрузки, приводящей к хрупкому разрушению. Указано, что поверхностные значения химического потенциала одинаковы на внешней и внутренней поверхностях и однозначно определяются физическими и геометрическими характеристиками цилиндра, а также параметрами внешней нагрузки.*

Отримано 10.05.12