УДК 539.3

Оцінка коефіцієнтів моделі пружного тіла з урахуванням структурної неоднорідності

Тарас Нагірний[1], Зоя Бойко[2]

[1] д. ф.-м. н., професор, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005; Zielona Góra University, 4 Prof. Shafran St., Poland, 65-516, e-mail: tnagirny@yahoo.com
[2] Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: zoya-7@mail.ru

Проведено оцінку коефіцієнтів моделі локально неоднорідного твердого тіла. В основу покладено загальноприйняті положення про теоретичну й експериментально вимірювальну межі міцності, а також розв'язок крайової задачі про напружено-деформований стан розтягнутого структурно неоднорідного шару. Крайову задачу сформульовано за локально градієнтного підходу в термомеханіці. За критерій міцності вибрано критерій першої класичної теорії міцності.

Ключові слова: структурна неоднорідність, тонкі плівки, розмірні ефекти, параметри моделі, межа міцності.

Вступ. Одним із підходів, який спрямований на врахування структурної та приповерхневої неоднорідностей у деформівних твердих тілах, є локально градієнтний підхід у термомеханіці [1-3]. Важливість врахування таких неоднорідностей зумовлено широким використанням в інженерній практиці тонкоплівкових і тонковолокнистих елементів [4-6], які характеризуються співвимірністю вкладів поверхневого й об'ємного факторів у внутрішню енергію [7]. У рамках підходу у простір параметрів стану введено хімічний потенціал і спряжений до нього параметр — густину, а також змодифіковано рівняння балансу маси, порівняно із класичною теорією термопружності. Під час формулювання та дослідження розв'язків крайових задач на основі моделей, побудованих за локально градієнтного підходу, на поверхні тіла задавали постійне значення хімічного потенціалу. Однак способів вимірювання чи визначення такого значення вказано не було. Мабуть, це пов'язано з тим, що збурення хімічного потенціалу можна ототожнити зі збуренням енергії зв'язку [2].

У праці [8] граничну умову записано на густину та дано фізичне обґрунтування вибору такої граничної умови. У цій же роботі вказано на узгодженість із відомими в літературі підходами [9, 10], у яких враховують неідеальну форму поверхні за контактної взаємодії твердих тіл, розрізняючи при цьому фізичну неоднорідність приповерхневих шарів і геометричну неоднорідність поверхонь тіл. Оскільки оцінку модельних коефіцієнтів проводять на основі розв'язків крайових задач, тому актуальним є питання отримання такої оцінки для моделі локально неоднорідного пружного тіла. Зазначимо, що таку оцінку для відпаленого алюмінію з використанням відомих експериментальних даних, які стосуються поверхневого натягу, отримано у праці [11].

Метою цієї роботи є оцінка коефіцієнтів моделі локально неоднорідного твердого тіла на основі даних для теоретичної та експериментально вимірювальної межі міцності.

1. Формулювання задачі

Розглянемо вільний від зовнішнього силового навантаження ізотропний твердий шар, що займає область $-l \le x \le l$ у прямокутній декартовій системі координат (x, y, z). Вважаємо, що на поверхнях шару $x = -l,\ x = l$ задано постійне значення густини ρ_a. За відліковий стан тіла приймаємо стан, який відповідає стану необмеженого однорідного середовища вільного від зовнішнього навантаження. Ключова система рівнянь моделі пружного тіла за локально градієнтного підходу, записана відносно тензора напружень $\hat{\sigma}$ та вектора збурення маси $\vec{\Pi}_m$, має вигляд [12]

$$\begin{gathered} \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = 0\,, \\ \vec{\nabla} \times \left\{ \hat{\sigma} - \frac{1}{3K}\left[\left(K - \frac{2}{3}G\right)\sigma + 2G\beta\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_m\right)\right]\hat{I} \right\} \times \vec{\nabla} = 0\,, \\ \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_m\right) + \frac{K\gamma}{\beta^2 - \alpha K}\vec{\Pi}_m - \frac{\beta}{3\left(\beta^2 - \alpha K\right)}\vec{\nabla}\sigma = 0\,, \end{gathered} \tag{1}$$

де $\sigma = \hat{\sigma} \cdot\cdot \hat{I}$; $\hat{I}$ — одиничний тензор; K, G — модулі об’ємного стиску та зсуву; α, β, γ — характеристики матеріалу; $\vec{\nabla}$ — диференціальний оператор Гамільтона; «$\times$» — знак векторного добутку.

Систему рівнянь (1) доповнюємо такими граничними умовами [8]

$$\vec{n} \cdot \hat{\sigma}\big|_{\partial V} = 0\,, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_m\big|_{\partial V} = \rho_A \tag{2}$$

на зовнішніх поверхнях тіла й умовами рівності нулю головного вектора та головного моменту зусиль у довільному поперечному перерізі. Тут $\rho_A = \left(\rho - \rho_*\right)\big|_{\partial V}$ — задане поверхневе значення збурення густини; ρ_* — густина безмежного середовища, матеріал якого ідентичний матеріалу тіла; $\vec{n}$ — вектор одиничної зовнішньої нормалі до поверхні тіла. Зазначимо, що у роботі прийнято, що поверхня тіла ототожнюється з поверхнею, на якій поверхневе значення густини дорівнює половині густини середовища, матеріал якого є ідентичним матеріалу тіла, тобто $\rho_A = -\rho_*/2$.

Розв'язок сформульованої задачі, записаний відносно головних компонент $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ тензора напружень $\hat{\sigma}$ та ненульового складника Π_m вектора $\vec{\Pi}_m$ ($\vec{\Pi}_m = \vec{\Pi}_m(\Pi_m, 0, 0)$), має вигляд

$$\sigma_{yy}(x) = \sigma_{zz}(x) = \frac{2G\beta\rho_A}{K + 4/3G}\left[\frac{\mathrm{ch}(\xi x)}{\mathrm{ch}(\xi l)} - \frac{\mathrm{th}(\xi l)}{\xi l}\right], \tag{3}$$

$$\sigma_{xx}(x) = 0\,, \tag{4}$$

$$\Pi_m(x) = \frac{\rho_A}{\xi}\frac{\mathrm{sh}(\xi x)}{\mathrm{ch}(\xi l)}\,. \tag{5}$$

Тут $\xi = \sqrt{\dfrac{(K + 4/3G)\gamma}{\alpha(K + 4/3G) - \beta^2}}$.

Аналіз розв'язку (3) показує, що у вільному від силового навантаження шарі існують ненульові напруження, зумовлені структурною неоднорідністю тіла. Найбільшими напруженнями у шарі є поверхневі напруження σ_{yy}, σ_{zz}

$$\sigma_{yy}(\pm l) = \sigma_{zz}(\pm l) = \frac{2G\beta\rho_A}{K + 4/3G}\left[1 - \frac{\mathrm{th}(\xi l)}{\xi l}\right], \tag{6}$$

які є розтягуючими.

З формули (6) бачимо, що поверхневим напруженням властивий розмірний ефект, тобто вони залежать від товщини шару. При цьому, зі збільшенням товщини шару поверхневі напруження збільшуються, прямуючи до усталеного значення

$$\sigma_0 = \frac{2G\beta\rho_A}{K + 4/3G}\,, \tag{7}$$

яке відповідає поверхневим напруженням у півпросторі.

Характерним розміром області приповерхневої неоднорідності є величина $1/\xi$. Якщо товщина шару є співвимірна з характерним розміром області приповерхневої неоднорідності, то неоднорідність у розподілі напружень σ_{yy}, σ_{zz} є властива усій області тіла. Такі шари звичайно називають тонкими плівками. Якщо ж товщина шару є значно більша від $1/\xi$ (товсті шари), то неоднорідність у розподілі напружень зосереджена біля зовнішніх поверхонь тіла, тоді як напруження у внутрішній області шару практично дорівнюють нулеві.

Використовуючи визначальні співвідношення моделі [12], на основі отриманого розв'язку (3)-(5) для густини ρ та хімічного потенціалу η можна записати

$$\rho - \rho_* = \rho_A\frac{\mathrm{ch}(\xi x)}{\mathrm{ch}(\xi l)}\,,$$

$$\eta(x)-\eta_* = \frac{\rho_A}{3K(K+4/3G)}\left\{3K\left[\alpha(K+4/3G)-\beta^2\right]\frac{\mathrm{ch}(\xi x)}{\mathrm{ch}(\xi l)}-\right.$$
$$\left.-4G\beta^2\frac{\mathrm{th}(\xi l)}{\xi l}\right\} \tag{8}$$

Аналіз отриманого розв'язку показує, що густина збільшується з віддаленням від зовнішніх поверхонь шару до свого максимального значення на серединній поверхні. У товстих шарах $(\xi l >> 1)$ густина на серединній поверхні дорівнює густині безмежного середовища, фізичні властивості якого є ідентичними відповідним властивостям шару. У тонких плівках густина в усій області тіла відрізняється від густини середовища. Хімічний потенціал, який встановлюється у тілі, однозначно визначається його фізичними та геометричними характеристиками. Тому задання на поверхні тіла його сталого значення є еквівалентним заданню фізичних чи геометричних параметрів цього тіла. Поверхневому значенню хімічного потенціалу, як і поверхневим напруженням, властивий розмірний ефект.

2. Міцність шару. Розмірний ефект

Для розтягнутого вздовж осі $0y$ шару зусиллями σ_a ($\sigma_a > 0$) найбільшими розтягуючими напруженнями у шарі є поверхневі напруження σ_{yy}, які є суперпозицією σ_a та напружень, що описуються формулою (3), тобто

$$\sigma_{yy}(\pm l) = \sigma_a + \frac{2G\beta\rho_A}{K+4/3G}\left[1-\frac{\mathrm{th}(\xi l)}{\xi l}\right]. \tag{9}$$

Із збільшенням товщини шару, поверхневі напруження (9) зростають, прямуючи до значення

$$\sigma_{yy}^{\infty} = \sigma_a + \frac{2G\beta\rho_A}{K+4/3G},$$

яке має сенс поверхневого напруження у розтягнутому зусиллями σ_a півпросторі.

За критерій міцності вибираємо критерій першої класичної теорії міцності [13]. З використанням методики, яку наведено у праці [14], і співвідношення (9) для інтенсивності силового навантаження σ_a^{kr}, що призводить до руйнування шару, одержуємо

$$\sigma_a^{kr} = \sigma_p - \frac{2G\beta\rho_A}{K+4/3G}\left(1-\frac{\mathrm{th}(\xi l)}{\xi l}\right), \tag{10}$$

де σ_p — теоретична межа міцності. Зазначимо, що для розрахунку теоретичної межі міцності широко використовується співвідношення Орована [15].

Для $l \to \infty$ значення σ_a^{kr} прямує до сталої величини σ_+

$$\sigma_+ = \sigma_p - \frac{2G\beta\rho_A}{K + 4/3G}, \tag{11}$$

яка відповідає інтенсивності силового навантаження, що призводить до руйнування товстих шарів (експериментально вимірювальна межа міцності, яку називають також практичною межею міцності).

Використовуючи формулу (11), співвідношення (10) перетворюємо до вигляду

$$\sigma_a^{kr} = \sigma_+ + \frac{2G\beta\rho_A}{K + 4/3G}\frac{\operatorname{th}(\xi l)}{\xi l}. \tag{12}$$

Праву частину співвідношення (12) можна трактувати як таку, що описує вплив розмірів шару на межу міцності (розмірний ефект межі міцності). Бачимо, що зі збільшенням товщини шару, величина прикладеного до шару силового навантаження, що призводить до його руйнування σ_a^{kr}, зменшується, прямуючи до σ_+.

3. Оцінка параметрів моделі

Під час розгляду нових математичних моделей необхідно провести оцінку та визначення нововведених коефіцієнтів. У літературі відомі результати обчислень теоретичної межі міцності для різноманітних матеріалів. Ці результати разом зі значенням σ_+, яке приводиться у довідниках, покладемо в основу визначення коефіцієнта β.

Для теоретичної та експериментально вимірювальної межі міцності заліза маємо

$$\sigma_p = 5{,}6 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2, \qquad \sigma_+ = 2{,}8 \cdot 10^8\ \text{Н/м}^2.$$

Модулі пружності та густина заліза такі

$$K = 10{,}77 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2, \quad G = 8{,}4 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2, \quad \rho_* = 7{,}86 \cdot 10^3\ \text{кг/м}^3.$$

На цій основі з використанням формули (11) для коефіцієнта β одержуємо значення

$$\beta = -1{,}85 \cdot 10^7\ \text{Н·м/кг}.$$

У результаті на основі співвідношення (12) отримуємо формулу для міцності шару, виготовленого із заліза

$$\sigma_a^{kr} / 10^8 = 2{,}8 + 557 \frac{\mathrm{th}(\xi l)}{\xi l} \text{ Н/м}^2$$

та визначаємо поверхневе значення напружень у півпросторі σ_0 (7) з цього ж матеріалу

$$\sigma_0 = 5{,}57 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2.$$

Зазначимо, що оцінку коефіцієнта β проведено також на основі відомих у літературі експериментальних даних для поверхневого натягу відпаленого алюмінію, що відображено у праці [11]. Тому важливо було б пов'язати межу міцності з поверхневим натягом.

Для поверхневого натягу отримано формулу [11]

$$f_p = \frac{2G\beta\rho_A}{\xi(K + 4/3G)} \left[1 - \frac{\ln(\xi l)}{\xi l} - \frac{1}{\xi l} \right].$$

Поверхневий натяг залежить від товщини шару, а тому йому властивий розмірний ефект. Із зростанням товщини шару величина f_p прямує до свого усталеного значення, яке має сенс поверхневого натягу у півпросторі

$$f_p^{\infty} = \frac{2G\beta\rho_A}{\xi(K + 4/3G)}. \tag{13}$$

На основі співвідношень (11), (13) можна записати

$$\sigma_p - \sigma_+ = \xi f_p^{\infty}. \tag{14}$$

Формула (14) пов'язує теоретичну межу міцності σ_p, експериментально вимірювальну межу міцності σ_+, поверхневий натяг у масивному тілі f_p^{∞} і характерний розмір області приповерхневої неоднорідності ξ^{-1}. Цю формулу можна використати, зокрема, для визначення характерного розміру області приповерхневої неоднорідності за відомими значеннями σ_p, σ_+, f_p^{∞}. Якщо відоме значення ξ, то вона дозволяє на основі σ_p визначати поверхневий натяг f_p^{∞} у масивних тілах, чи навпаки.

Для оцінки значення характерного розміру області приповерхневої неоднорідності можна використати відомі в літературі результати вивчення різноманітних розмірних ефектів. У багатьох випадках для цього розміру можна прийняти порядок сотень нанометрів.

Як видно з формули (3), параметрів β та ξ достатньо для однозначного визначення напружено-деформованого стану твердих тіл.

Висновки. Проведено оцінку коефіцієнтів моделі локально неоднорідного твердого тіла. В основу покладено розв'язок крайової задачі про напружено-деформований стан розтягнутого структурно неоднорідного шару та критерій першої класичної теорії міцності. Отримано формулу, що пов'язує теоретичну й експериментально вимірювальну межі міцності, а також поверхневий натяг і характерний розмір області приповерхневої неоднорідності. У ключову систему рівнянь згаданої моделі входять три коефіцієнти. У роботі проведено оцінку двох із них. Оцінені параметри дозволяють однозначно описувати напружено-деформований стан тіла.

Література

[1] *Бурак Я. И., Нагирный Т. С.* Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах // Прикл. механика. — 1992. — Т. 28, № 12. — С. 3-23.

[2] Фізико-математичне моделювання складних систем */ Я. Бурак, Є. Чапля, Т. Нагірний* та ін.; під ред. *Я. Бурака, Є. Чаплі.* — Львів: СПОЛОМ, 2004. — 264 с.

[3] *Грицина, О. Р., Нагірний Т. С., Червінка К. А.* Локально-градієнтний підхід у термомеханіці // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2006. — Вип. 3. — С. 72-83.

[4] *Ghoniem N. M., Busso E. P., Kioussis N.* Multiscale modelling of nanomechanics and micromechanics: an overview // Philos. Mag. — 2003. — Vol. 83, No 31-34. — P. 3475-3528.

[5] *Андриевский Р. А., Рагуля А. В.* Наноструктурные материалы. — Москва: Академия, 2005. — 192 с.

[6] *Чекман І. С.* Нанонаука: перспективи наукових досліджень // Наука та інновації. — 2009. — Т. 5, № 3. — С. 89-93.

[7] *Непийко С. А.* Физические свойства малых металлических частиц. — Киев: Наук. думка, 1985. — 246 с.

[8] *Нагірний Т. С., Червінка К. А., Бойко З. В.* До вибору крайових умов у задачах локально градієнтного підходу в термомеханіці // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2011. — Т. 54, № 3. — С. 199-206.

[9] *Shvets R. M., Martynyak R. M., Kryshtafovych A. A.* Discontinuous Contact of an Anisotropic Half-plane and a Rigid Base with Disturbed Surface // Int. J. Engng. Sci. — 1996. — Vol. 34, No 2. — P. 183-200.

[10] *Adams G. G.* Adhesion at the wavy contact interface between two elastic bodies // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 2004. — Vol. 71. — P. 851-856.

[11] *Бойко З., Нагірний Т.* До оцінки параметрів моделі структурно неоднорідного твердого тіла // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. — 2012. — Вип. 76. — С. 99-108.

[12] *Нагірний Т., Бойко З.* Про один підхід до формулювання крайових задач нелокальної теорії пружності // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2011. — Вип. 14. — С. 95-104.

[13] Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие; под ред. *В. В. Панасюка*; в 4 т. Т. 1. Основы механики разрушения материалов */ В. В Панасюк, А. Е. Андрейкив, В. С. Партон.* — Киев: Наук. думка, 1988. — 488 с.

[14] *Нагірний Т. С.* Поверхневі напруження в шарі. Поверхневий натяг та міцність шару // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1999. — Т. 42, № 4. — С. 111-115.

[15] *Иванова В. С.* Новые пути повышения прочности металлов. — Москва: Наука, 1964. — 120 с.

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2012, вип. 16, 104-111

Estimation of model coefficients of elastic body with structural inhomogeneity taken into account

Taras Nahirnyj, Zoya Boiko

The estimation of the model coefficients of locally nonhomogeneous solid is carried out. As a basis we used generally accepted conceptions about the theoretical and experimentally measured breaking points of strength as well as the solution of the boundary value problem of the stress-strain state stretched structurally nonhomogeneous layer. The boundary value problem is formulated within the local gradient approach in thermomechanics. Criterion of the first classical theory of material strength is selected for strength criterion.

Оценка коэффициентов модели упругого тела с учетом структурной неоднородности

Тарас Нагирный, Зоя Бойко

Проведено оценку коэффициентов модели локально неоднородного твердого тела. В основу положено общепринятые понятия о теоретическом и экспериментально измерительном пределе прочности, а также решение краевой задачи о напряженно-деформированном состоянии растянутого структурно неоднородного слоя. Краевую задачу сформулировано в рамках локально градиентного подхода в термомеханике. За критерий прочности выбран критерий первой классической теории прочности.

Отримано 17.11.12