

Взаємодія гармонічних SH-хвиль із тріщинами та тонкими пружними включеннями

Ярослав Пастернак¹, Георгій Сулим², Роман Пастернак³

¹ к. ф.-м. н., Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, Луцьк, 43018, e-mail: pasternak@ukrpost.ua

² д. ф.-м. н., професор, Львівський національний університет ім. І. Франка, вул. Університетська, 1, 79000 Львів, e-mail: sulym@franko.lviv.ua

³ к. ф.-м. н., доцент, Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, Луцьк, 43018, e-mail: pasternak@ukrpost.ua

У цій роботі на основі застосування принципу спряження континуумів різної вимірності побудовано математичну модель усталених коливань поздовжнього зсуву тіл із тонкими пружними включеннями. Для опису зовнішньої стосовно включення задачі використано дуальні інтегральні рівняння типу Сомільяни, що описують усталені SH-хвилі у тілі з лінійю розривів напружень і переміщень. Зв'язки між останніми, що задають модель тонкого включення, отримано шляхом усереднення рівнянь рівноваги та конститутивних співвідношень тонкої неоднорідності за її малою товщиною. Адаптовано розвинутий авторами раніше метод граничних елементів до розв'язування побудованих систем інтегральних рівнянь. Досліджено амплітудно-частотні залежності для узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень тонких пружних включень різних жорсткостей і густин.

Ключові слова: тонке включення, усталені коливання, узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень.

Вступ. З огляду на прикладну важливість технічного діагностування елементів конструкцій та оцінювання їхньої міцності під дією динамічних навантажень актуальною залишається задача вивчення розсіювання пружних хвиль на різних типах дефектів неоднорідної будови матеріалів, зокрема, тріщинах і тонких включеннях. Адже останні спричиняють високу концентрацію напружень і біля них найчастіше зароджуються та розвиваються процеси руйнування. Для прикладу, у роботі [1] вивчено взаємодію хвиль зсуву із міжфазними тріщинами. У праці [2] досліджено динамічний коефіцієнт інтенсивності напружень для тонкого податного включення. У статті [3] вивчено взаємодію дискових тріщин та абсолютно жорстких дискових включень. У роботі [4] розглянуто взаємодію хвиль із пружними прямолінійними включеннями, жорсткість яких більша від відповідної для середовища. Однак, набагато складнішою є проблема побудови загальних співвідношень моделі тіла із тонким включенням довільної геометрії, яка крім цього, не накладала би жодних обмежень на пружні характеристики неоднорідності, даючи таким чином можливість в окремих граничних випадках описувати також і тіла з тріщинами та жорсткими включеннями. Тому у цьому дослідженні на основі принципу спряження континуумів різної вимірності [5]

будуються інтегральні рівняння зовнішньої задачі та умови взаємодії тонкого пружного включення, а також адаптується добре апробована схема [6] методу граничних елементів для їхнього розв'язування.

1. Формулювання зовнішньої задачі

Розглянемо однорідне ізотропне середовище з модулем зсуву G та густиною ρ , що містить тонке пружне тунельне включення завтовшки $2h$ із модулем зсуву G^i та густиною ρ^i . З урахуванням концепції принципу спряження [5] створимо лінійчату модель тонкої неоднорідності. Для цього вилучимо з розгляду саме включення як геометричний об'єкт, а контактні переміщення та напруження перенесемо на його серединну поверхню Γ_C (відповідно на її береги Γ_C^+ та Γ_C^- — рис. 1). Якщо довжина пружних хвиль набагато більша від товщини включення, то таке наближення цілком прийнятне. У цей спосіб зведемо задачу до визначення напружено-деформованого стану тіла з лінією стрибків фізико-механічних полів.

Відповідно до монографії [7] у частотній області інтегральні залежності зовнішньої задачі для середовища з лінією стрибків мають такий вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma u_3(\mathbf{y}, \omega) &= \text{RPV} \int_{\Gamma_C^+} U(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) \Sigma t_3(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) - \\ &- \text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} T(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) \Delta u_3(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) + u_3^{in}(\mathbf{y}, \omega), \\ \frac{1}{2} \Delta t_3(\mathbf{y}, \omega) &= n_j^+(\mathbf{y}) \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} D_j(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) \Sigma t_3(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) - \right. \\ &\left. - \text{HPV} \int_{\Gamma_C^+} S_j(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \omega) \Delta u_3(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) + G u_{3,j}^{in}(\mathbf{y}, \omega) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

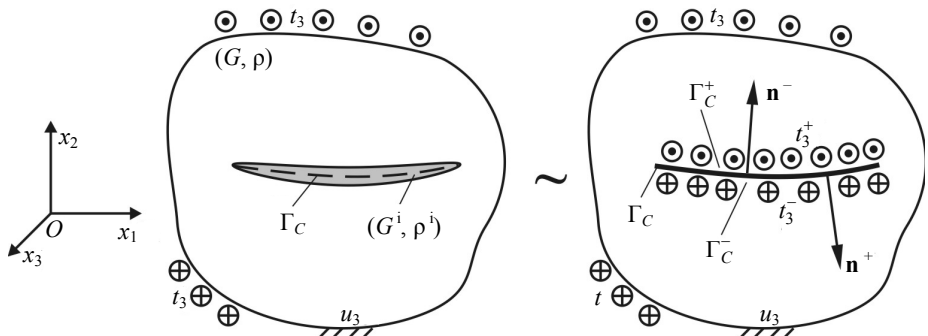


Рис. 1. Схема моделювання задачі на основі принципу спряження

де $\Sigma(\bullet) = (\bullet)^+ + (\bullet)^-$, $\Delta(\bullet) = (\bullet)^+ - (\bullet)^-$; n_j^\pm — компоненти вектора нормалей \mathbf{n}^\pm до поверхонь Γ_C^\pm ; знаками «+» і «-» позначено величини, що стосуються поверхонь Γ_C^+ та Γ_C^- , утворених математичним розрізом Γ_C з дуговою координатою s ; \mathbf{y} — точка колокації, що лежить на математичному розрізі Γ_C ; u_3, t_3 — комплексні амплітуди переміщень і напружень; u_3^{in} — поле переміщень, зумовлене падаючою SH-хвилею; ω — частота коливань; символами RPV позначено величину невластивого інтегралу, CPV — головне значення інтегралу, HPV — скінченну частину гіперсингулярного інтегралу. Ядра рівнянь мають вигляд [7]

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{2\pi G} K_0 \left(i \frac{\omega \|\mathbf{x}\|}{c_2} \right), & T(\mathbf{x}, \omega) &= G n_j \frac{\partial U(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j}, \\ D_j(\mathbf{x}, \omega) &= -G \frac{\partial U(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j}, & S_j(\mathbf{x}, \omega) &= -G \frac{\partial T(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $c_2 = \sqrt{G/\rho}$; $i = \sqrt{-1}$; $K_0(z)$ — функція Бесселя другого роду. Падаючу хвилю задамо рівнянням [7]

$$u_3^{in}(\mathbf{x}, \omega) = A^{in}(\omega) \exp \left(\frac{i\omega}{c_2} x_i m_i \right), \quad (3)$$

де $A^{in}(\omega)$ — амплітуда падаючої хвилі, а \mathbf{m} — її напрямний одиничний ($m_i m_i = 1$) вектор.

Відповідно до праці [7] розсіяна хвиля u_3^{sc} у довільній точці ξ середовища описується таким інтегральним поданням

$$u_3^{sc}(\xi, \omega) = u_3 - u_3^{in} = \int_{\Gamma_C^+} U(\mathbf{x} - \xi, \omega) \Sigma t_3(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_C^+} T(\mathbf{x} - \xi, \omega) \Delta u_3(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}). \quad (4)$$

2. Моделювання тонкого включення

Використання залежностей (1) не дає можливості розглядати їх як систему інтегральних рівнянь, а отже, визначити напружено-деформований стан тіла. До них необхідно додати математичну модель включення (умови взаємодії [5]), яка повинна пов'язати між собою напруження та переміщення на протилежних берегах включення. Для побудови цієї моделі розглянемо рівняння динамічної рівноваги тонкого включення (для частотної області)

$$\sigma_{3j,j}^i + \rho^i \omega^2 u_3^i = 0 \quad (5)$$

та конститутивні співвідношення

$$\sigma_{3j}^i = G^i u_{3,j}^i \quad (6)$$

у локальній системі координат $Ox'_1x'_2x'_3$, вісь Ox'_1 якої спрямовано уздовж нормалі \mathbf{n}^+ у точці колокації у (тобто, $dx'_2 = ds$).

Усреднюючи співвідношення (5) і (6) за малою товщиною $2h$ включення, матимемо

$$\int_{-h}^h \left(\sigma_{3j,j}^i + \rho^i \omega^2 u_3^i \right) dx'_1 \equiv \Sigma t_3^i + \frac{\partial}{\partial s} \int_{-h}^h \sigma_{32}^i dx'_1 + \rho^i \omega^2 \int_{-h}^h u_3^i dx'_1 = 0; \quad (7)$$

$$\int_{-h}^h \sigma_{31}^i dx'_1 = -G^i \Delta u_3^i; \quad \int_{-h}^h \sigma_{32}^i dx'_1 = G^i \frac{\partial}{\partial s} \int_{-h}^h u_3^i dx'_1. \quad (8)$$

З огляду на малу товщину включення, за теоремою про середнє значення інтеграла

$$\int_{-h}^h \sigma_{31}^i dx'_1 = 2h \sigma_{31}^{i \text{avr}} \approx -h \Delta t_3^i, \quad \int_{-h}^h u_3^i dx'_1 = 2h u_3^{i \text{avr}} \approx h \Sigma u_3^i. \quad (9)$$

Тут враховано, що $t_3 = \sigma_{3j} n_j$ і $n_j^+ = -n_j^-$.

Підставивши співвідношення (9) у рівняння (7) і (8), з урахуванням умов $t_3^i = -t_3$, $u_3^i = u_3$ ідеального механічного контакту включення та середовища матимемо

$$\Delta t_3 = -\frac{G^i}{h} \Delta u_3; \quad -\Sigma t_3(s) + G^i h \frac{\partial^2}{\partial s^2} \Sigma u_3(s) + \rho^i \omega^2 h \Sigma u_3(s) = 0. \quad (10)$$

Інтегруючи друге з рівнянь (10), отримаємо

$$\Sigma u_3(s_1) = 2u_3^0 \cos(\lambda s_1) + 2\varepsilon_3^0 \varphi(s_1) + \frac{1}{hG^i} \int_0^{s_1} \varphi(s_1 - s) \Sigma t_3(s) ds, \quad (11)$$

де $\lambda = \omega \sqrt{\rho^i / G^i}$ — хвильове число; u_3^0 — середнє значення комплексної амплітуди переміщення лівого торця y_0 включення; $\varepsilon_3^0 = -P_3^0 / (2hG^i)$; P_3^0 — комплексна амплітуда зусилля, прикладеного до лівого торця; $\varphi(s) = \lambda^{-1} \sin(\lambda s)$.

З огляду на інтегральні залежності (1) зовнішньої задачі, динамічну модель тонкого пружного включення (10), (11) зручно записати у такому вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta t_3(\mathbf{y}, \omega) &= -\frac{G^i}{2h} \Delta u_3(\mathbf{y}, \omega), \\ \frac{1}{2} \Sigma u_3(\mathbf{y}, \omega) &= u_3^0 \cos(\lambda s(\mathbf{y})) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2hG^i} \left[-P_3^0(\omega)\varphi(s(y)) + \int_{y_0}^y \varphi(s(y) - s(x))\Sigma t_3(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) \right]. \quad (12)$$

Для обчислення середньої амплітуди u_3^0 переміщень лівого торця включення до системи інтегральних залежностей (1) і моделі включення (12) слід долучити рівняння динамічної рівноваги тонкої неоднорідності. Останнє після застосування до співвідношення (5) теореми Остроградського-Гаусса та принципу спряження набуде такого вигляду

$$P_3^0(\omega) + P_3^n(\omega) - \int_{\Gamma_C^+} \Sigma t_3(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) + \rho^i \omega^2 \iint_{S^i} u_3(\mathbf{x}, \omega) dx_1 dx_2 = 0, \quad (13)$$

де P_3^n — комплексна амплітуда зусилля, прикладеного до правого торця тонкого включення, S^i — область, яку займає включення.

Усреднюючи у рівнянні (13) інерційні сили за малою товщиною неоднорідності, згідно співвідношень (9) матимемо простіший, придатний для реалізації схеми МГЕ вираз

$$P_3^0(\omega) + P_3^n(\omega) - \int_{\Gamma_C^+} \Sigma t_3(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) + \rho^i h \omega^2 \int_{\Gamma_C^+} \Sigma u_3(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) = 0. \quad (14)$$

Підставивши середні значення переміщень із моделі (12) тонкого включення в рівняння (14) його динамічної рівноваги (руху його центра мас), остаточно матимемо

$$P_3^0(\omega) \cos(\lambda s_n) + P_3^n(\omega) + 2hG^i \lambda u_3^0 \sin(\lambda s_n) - \int_{\Gamma_C^+} \cos[\lambda(s_n - s(\mathbf{x}))] \Sigma t_3(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) = 0, \quad (15)$$

де s_n — довжина дуги серединної лінії неоднорідності.

У випадку квазістатичного навантажування, тобто у разі $\omega \rightarrow 0$, ядра (2) інтегральних залежностей (1) зводяться до ядер відповідної статичної задачі [7]. Так само, з огляду на границю $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi(s) = s$, динамічна модель (12) тонкого включення та рівняння (15) його динамічної рівноваги перетворюються на відповідні статичні [6].

3. Розв'язування інтегральних рівнянь методом граничних елементів

Отриману внаслідок поєднання (1), (12) і (15) систему крайових інтегральних рівнянь розв'язуватимемо методом граничних елементів [6, 8]. Для цього криву Γ_C апроксимуємо за допомогою n прямолінійних відрізків — граничних елементів Γ_q .

На кожному елементі виберемо по 3 вузлові точки: одну в центрі, а дві інші — на відстані $1/3$ довжини елемента по обидва боки від центральної (розривний три-вузловий граничний елемент). Крайові функції (функції стрибків) Σ_{t_3} та Δu_3 апроксимуємо на елементі за їхніми вузловими значеннями

$$[\Sigma_{t_3}, \Delta u_3](\xi) \approx \sum_{p=1}^3 [\Sigma_{t_3}^{q,p}, \Delta u_3^{q,p}] \phi_p(\xi). \quad (16)$$

Тут ξ — параметр розташування точки на елементі, означений на проміжку $-1 \leq \xi \leq 1$ так: $d\Gamma_q = J_q d\xi$, де J_q — модуль якобіана заміни змінних на елементі Γ_q .

У цей спосіб система сингулярних інтегральних рівнянь (1) сумісно з моделлю (12), (15) тонкого включення зводиться до системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно шуканих вузлових значень $\Sigma_{t_3}^{q,p}$, $\Delta u_3^{q,p}$ крайових функцій Σ_{t_3} та Δu_3 . При цьому слабо, сильно та гіперсингулярні інтеграли слід обчислювати за запропонованою у праці [6] методикою.

Базові функції для елементів, що не прилягають до торців неоднорідності, виберемо для співвідношення (16), як і в роботах [6, 8], у вигляді поліномів Лагранжа для системи вузлів $\xi_p = [-2/3; 0; 2/3]$ тривузлового розривного граничного елемента

$$\phi_1 = \xi \left(\frac{9}{8} \xi - \frac{3}{4} \right), \quad \phi_2 = \left(1 - \frac{3}{2} \xi \right) \left(1 + \frac{3}{2} \xi \right), \quad \phi_3 = \xi \left(\frac{9}{8} \xi + \frac{3}{4} \right). \quad (17)$$

Для підвищення точності методу та зручності визначення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) згідно з роботою [6] введемо спеціальні тривузлові розривні граничні елементи, що моделюють приторцеві ділянки тонкого включення, а відповідні їм базові функції задамо у вигляді:

- для розривів переміщень

$$\phi_p^{\Delta u} = \Phi_{p1}^{\Delta u} \sqrt{\rho} + \Phi_{p2}^{\Delta u} \rho + \Phi_{p3}^{\Delta u} \rho^{3/2} \quad (p = \overline{1,3}); \quad (18)$$

- для стрибків напружень

$$\phi_p^{\Sigma t} = \Phi_{p1}^{\Sigma t} \rho^{-1/2} + \Phi_{p2}^{\Sigma t} + \Phi_{p3}^{\Sigma t} \sqrt{\rho} \quad (p = \overline{1,3}). \quad (19)$$

Тут $\rho = 1 \pm \xi$; $\Phi_{pj}^{\Delta u}$, $\Phi_{pj}^{\Sigma t}$ — матриці сталих, що визначаються з рівнянь $\phi_p(\xi_p) = 1$, $\phi_p(\xi_{j \neq p}) = 0$, де ξ_p — координати вузлових точок на граничному елементі.

Запропоновані базові функції (18), (19) дають можливість безпосередньо та з великою точністю обчислювати узагальнені КІН [5] за формулами [6]

$$K_{31} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} G \Delta u_3(s), \quad K_{32} = - \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma t_3(s), \quad (20)$$

де s — відстань до вершини лінії Γ_C ; K_{3j} — узагальнені КІН, причому у випадку тріщини $K_{31} = K_{III}$, $K_{32} = 0$.

4. Числовий аналіз прикладів

4.1. Плоска хвиля з паралельним до серединної поверхні включення фронтом.

Розглянемо безмежне пружне середовище з тонким пружним включенням завдовжки $2a$ та завтовшки $2h$ (в обчисленнях вважається $h = 0,01a$). На включення набігає спрямована уздовж осі Ox_2 ($m_1 = 0, m_2 = 1$) плоска SH-хвиля, амплітуда якої дорівнює $A^{in}(\omega) = -i c_2 \tau / (G \omega)$. Тоді відповідно до співвідношення (3)

$$\sigma_{32}^{in}(\mathbf{x}, \omega) = G \partial u_3^{in} / \partial x_2 = \tau \exp(i\omega x_2 / c_2). \quad (21)$$

Відносна жорсткість включення характеризується параметром $k = G^i / G$. При цьому вважається, що відносна густина матеріалу включення є такою ж, як і його відносна жорсткість, тобто, $\rho^i / \rho = k$ (таке припущення зроблене виключно для зменшення кількості параметрів задачі і не є принциповим). Отже, за обраних параметрів абсолютно жорстке включення є також і дуже масивним, а відтак і нерухомим. Натомість на податне включення жодні інерційні сили практично не діють.

Амплітудно-частотні характеристики для узагальнених КІН такого включення для різних значень параметра k , отримані у разі розбиття серединної лінії включення на 20 елементів, зображено на рис. 2. У випадку включення дуже

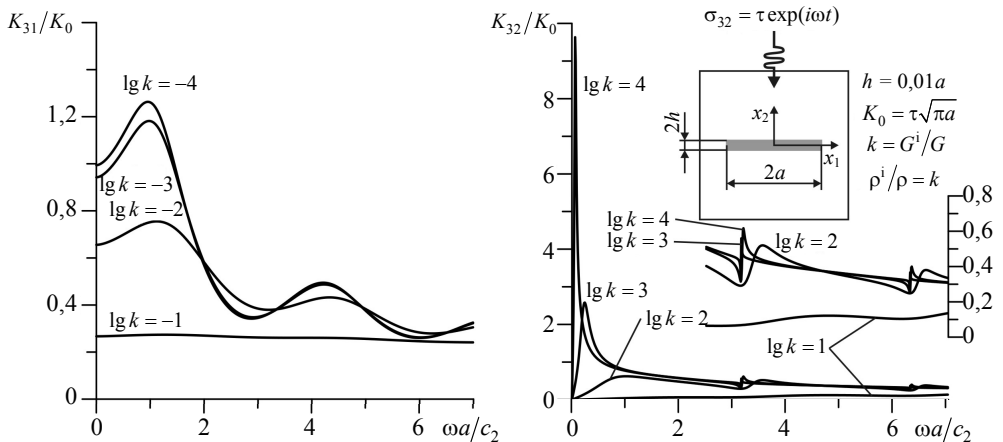


Рис. 2. Амплітуда узагальнених КІН тонкого пружного включення

низької жорсткості та густини ($k = 10^{-4}$ — практично тріщина) отримані значення КІН $K_{31} = K_{III}$ добре узгоджуються з відповідними значеннями, поданими у довіднику [9]. За накладання відповідних графіків криві розрізнити не вдається. У випадку статичного навантажування ($\omega \rightarrow 0$) розрахований за розглянутою методикою КІН K_{31} лише на 0,6 % менший за відповідний для тріщини [9].

Для жорсткішого за основний матеріал включення у границі, якщо $\omega \rightarrow 0$, за заданої орієнтації навантаження узагальнений КІН K_{32} нульовий, так само як і в статичному випадку [5]. Проте зі зростанням циклічної частоти коливань від нуля спостерігається різке збільшення амплітуди КІН K_{32} . Причому, чим більші відносні жорсткість та густина k включення, тим істотніші екстремальні значення амплітуди цього узагальненого КІН. Це природно, адже у цьому разі плоска гармонічна хвиля зустрічає на своєму шляху більш жорстку та разом з тим важче зрушувану перешкоду. При цьому за зумовлених падаючою хвилею сталих амплітуд напружень (21) для малих частот коливань амплітудні значення переміщень будуть більші, ніж для великих. Своєю чергою, це зумовлює появу згаданих екстремумів КІН K_{32} для жорстких практично нерухомих включень. Слід зазначити, що у разі неконтрастних густин включення та середовища ($\rho^i = \rho$) за обраного напрямку падаючої хвилі та зазначеної відносної товщини неоднорідності узагальнений КІН K_{32} для довільної жорсткості G^i включення є нульовим (в межах похибки обчислень).

Як для податних включень, так і для відносно жорстких неоднорідностей амплітудні піки узагальнених КІН повторюються через сталі частотні проміжки $\Delta\omega = \pi c_2/a$. Чим більша жорсткість і маса неоднорідності, тим стрімкішою є зміна узагальненого КІН K_{32} в околі резонансної частоти.

4.2. Плоска хвиля, що поширюється уздовж площини тонкого включення.

Розглянемо досліджену вище задачу у випадку руху плоскої SH-хвилі уздовж осі Ox_1 . Відповідну схему й амплітудно-частотні характеристики для узагальненого КІН K_{32} зображено на рис. 3. За дії згаданого навантаження $K_{31} = 0$ у кожній вершині, а амплітуди узагальненого КІН K_{32} у правій (A) та лівій (B) вершинах тонкого включення є різні, тому відповідні криві позначено суцільними (вершина A) та штриховими (вершина B) лініями. При цьому на рис. 3а розглянуто випадок, коли, як у п. 4.1, відносні густина та жорсткість включення однакові, а на рис. 3б — коли густина включення дорівнює густині основного матеріалу, а його модуль зсуву змінюється.

Для випадку квазістатичного навантажування ($\omega \rightarrow 0$) узагальнені КІН в обох вершинах однакові, а їхні амплітуди для зазначених значень відносної жорсткості k включень дорівнюють відповідним статичним [5]. Із рис. 3 видно, що за ненульових значень циклічної частоти ω КІН у вершині A, яка зустрічає падаючу хвилю першою, є істотно більші за відповідні КІН іншої вершини, що слід пов'язувати з розсіюванням (чи навіть розсіканням) хвилі. Як і в попередньому

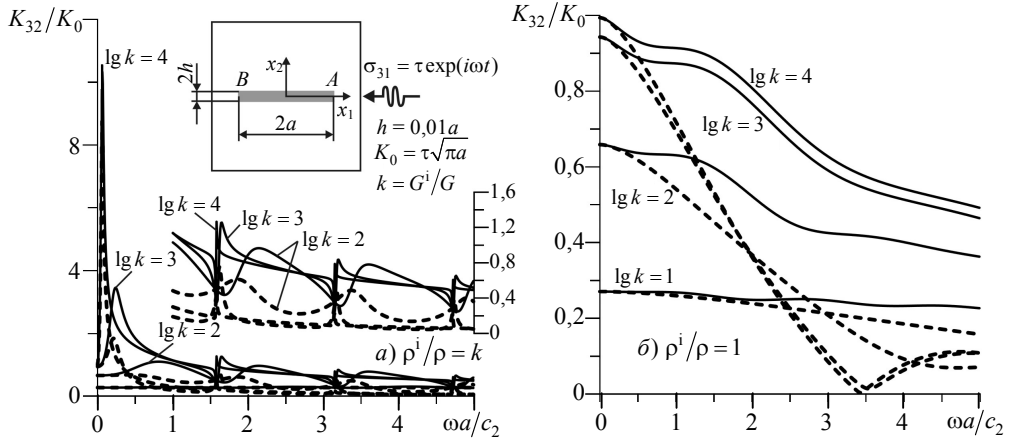


Рис. 3. Амплітуда узагальнених КІН тонкого пружного включення із контрастною (а) та неконтрастною (б) густиною

прикладі, масивніше та жорсткіше включення породжує вищу інтенсивність динамічних напружень, особливо в області низьких частот. Натомість, КІН неконтрастного за густиною включення (модуль зсуву контрастний) зі збільшенням циклічної частоти ω вимушених коливань у вершині A поступово зменшуються, а у вершині B коливаються, навіть досягаючи нульових значень. Це свідчить про істотний вплив інерційних сил тонких неоднорідностей на концентрацію та інтенсивність динамічних напружень у їхніх вершинах.

У випадку контрастних за густиною включень (рис. 3а) спостерігаються ампліудні піки узагальненого КІН K_{32} через сталі частотні проміжки $\Delta\omega = \pi c_2 / (2a)$. Як і в попередньому прикладі, збільшення густини включення та його жорсткості зумовлює стрімку зміну КІН в околі резонансних частот.

Висновки. Використані дуальні інтегральні рівняння та побудовані модель і рівняння динамічної рівноваги тонкої неоднорідності дають можливість дослідження взаємодії гармонічних SH-хвиль із тонкими включеннями у повному спектрі зміни їхніх властивостей: від абсолютної податності та/чи нульової маси до абсолютної жорсткості та/чи необмеженої густини. Використана авторська схема методу граничних елементів дала можливість ефективно та високоточно розв'язувати отримані рівняння, а також обчислювати узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень. Розглянуті числові приклади засвідчили істотний вплив інерційних сил і відносного модуля зсуву тонкого включення на динамічну концентрацію та інтенсивність напружень біля вершин тонких неоднорідностей.

Публікацію виконано в рамках реалізації проекту № N501 056740, фінансованого Національним Центром Науки Республіки Польща.

Література

- [1] *Войтко М. В., Назарчук З. Т., Куриляк Д. Б.* Взаємодія поля плоскої SH-хвилі з вершинами міжфазної тріщини // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2008. — Т. 44, № 2. — С. 92-98.
- [2] *Кунець Я. І., Матус В. В., Пороховський В. В.* Динамічна концентрація напружень в околі заглибленого тонкого прямолінійного включення низької жорсткості в умовах антиплоскої деформації Я.І. Кунець, // Мат.-методи. та фіз.-мех. поля. — 2007. — Т. 50, № 1. — С. 136-139.
- [3] *Mykhas'kiv V. V., Khay O. M.* Interaction between rigid-disc inclusion and penny-shaped crack under elastic time-harmonic wave incidence // Int. J. Sol. Struct. — 2009. — Vol. 46, Issues 3-4. — P. 602-616.
- [4] *Литвин О. В., Попов В. Г.* Взаємодія плоских пружних гармонічних хвиль з пружним включенням за повного зчеплення // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2007. — Т. 43, № 3. — С. 58-64.
- [5] *Сулим Г.Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. — Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. — 716 с.
- [6] *Pasternak Ia.* Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities // Eng. Anal. Bound. Elem. — 2011. — Vol. 35, Issue 4. — P. 678-690.
- [7] *Domínguez J.* Boundary elements in dynamics. — Boston: Computational Mechanics Publications, 1993. — 700 p.
- [8] *Portela A., Aliabadi M. H., Rooke D. P.* The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems // Int. J. Numer. Meth. Engng. — 1992. — Vol. 33, Issue 6. — P. 1269-1287.
- [9] *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2-х томах / под ред. Ю. Мураками.* — Москва: Мир, 1990. — 1016 с.

Interaction of time-harmonic SH-waves with cracks and thin elastic inclusions

Iaroslav Pasternak, Heorhiy Sulym, Roman Pasternak

This paper develops the mathematical model of time-harmonic longitudinal shear vibrations of elastic solids with thin inclusions based on the coupling principle for continua of different dimension. For simulation of the external problem (with respect to the inclusion) the dual integral equations of Somigliana type are used, which describe time-harmonic SH-waves in a solid with the line of stress and displacement discontinuities. Relations between the latter, which define a model of a thin inclusion, are obtained by means of averaging of the equilibrium equations and constitutive relations for thin inhomogeneities over their small thickness. Earlier developed boundary element method is adopted for solution of the obtained systems of integral equations. The amplitude-frequency dependences are studied for generalized stress intensity factors of thin elastic inclusions of different rigidities and densities.

Взаимодействие гармонических SH-волн с трещинами и тонкими упругими включениями

Ярослав Пастернак, Георгий Сулим, Роман Пастернак

В этой работе на основе применения принципа сопряжения континуумов разной размерности построена математическая модель установившихся колебаний продольного сдвига тел с тонкими упругими включениями. Для описания внешней относительно включения задачи использованы дуальные интегральные уравнения типа Сомиглианы, которые описывают установившиеся SH-волны в теле с линией разрывов напряжений и смещений. Связи между последними, которые задают модель тонкого включения, получены путем осреднения уравнений равновесия и конститутивных соотношений тонкой неоднородности по ее малой толщине. Адаптирован развитый авторами ранее метод граничных элементов для решения построенных систем интегральных уравнений. Исследованы амплитудно-частотные зависимости для обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений тонких упругих включений различных жесткостей и плотностей.

Отримано 04.10.12