УДК 519.6

Локальна збіжність двокрокового методу типу Ньютона для розв'язування нелінійних рівнянь за узагальнених умов Ліпшиця

Степан Шахно

Д. ф.-м. н., доцент, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, Україна, 79000, e-mail: s_shakhno@franko.lviv.ua

Обґрунтовано локальну збіжність двокрокового методу типу Ньютона для розв'язування нелінійних функціональних рівнянь за узагальнених умов Ліпшиця для похідних Фреше першого та другого порядків. Встановлено порядок збіжності двокрокового методу та проведено порівняння отриманих результатів із відомими.

Ключові слова: нелінійне рівняння, ітераційний процес, порядок збіжності, радіус збіжності.

Вступ. Розглянемо нелінійне функціональне рівняння

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

де F — нелінійний оператор, який діє з одного банахового простору X в банаховий простір Y. Найвідомішим методом розв'язування рівняння (1) є класичний метод Ньютона [1, 2], який має квадратичний порядок збіжності у разі неперервності за Ліпшицем похідної першого порядку від оператора F. У статті [3] Бартішем М. Я. вперше запропоновано метод, який є двокроковою модифікацією методу Ньютона, проведено дослідження його напівлокальної збіжності (за умов типу Канторовича) та встановлено збіжність методу з порядком $1+\sqrt{2}$. Його кілька разів «перевідкривали»: Кінг [4], Лаазонен [5], Вернер [6]. Не зменшується увага до цього методу і нині. Зокрема, з різних точок зору цей метод вивчали у працях [7, 8].

Двокроковий ітераційний процес для розв'язування рівняння (1) має вигляд

$$x_{k+1} = x_k - \left[F'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right)\right]^{-1} F(x_k),$$

$$y_{k+1} = x_{k+1} - \left[F'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right)\right]^{-1} F(x_{k+1}), \qquad k = 0,1,2,\ldots \tag{2}$$

Тут x_0, y_0 — початкові значення.

У праці [9] під час дослідження методу Ньютона запропоновано узагальнені умови Ліпшиця для оператора похідної, в яких замість сталої L використано деяку додатну інтегровну функцію. У роботі [10] вивчено збіжність неточного методу Ньютона за іншого узагальнення умов Ліпшиця. У праці [11] запропоновано узагальнені умови Ліпшиця для оператора поділеної різниці першого порядку і за цих умов досліджено збіжність методу хорд [11] і двокрокового різницевого методу [12] для операторних рівнянь за узагальнених умов Ліпшиця для перших поділених різниць нелінійного оператора $F(x)$.

У цій праці вперше вивчаємо метод (2) за узагальнених умов Ліпшиця для похідних першого та другого порядків.

1. Означення та допоміжні леми

Позначимо через $B(x_0,r)=\{x:\|x-x_0\|<r\}$ відкриту, а через $\overline{B(x_0,r)}=$ $=\{x:\|x-x_0\|\le r\}$ — замкнену кулі радіуса r з центром у точці x_0.

Умову на оператор F

$$\left\|F(x)-F\left(x^{\tau}\right)\right\|\le L\left\|x-x^{\tau}\right\| \qquad \forall\, x,x^{\tau}\in D$$

називають умовою Ліпшиця в області D зі сталою L. Якщо область D є кулею $B(x_0,r)$ з центром x_0 і радіусом r, $x\in B(x_0,r)$, то відрізок прямої $x^{\tau}=$ $=x_0+\tau(x-x_0)$ з'єднує точки x і x_0 кулі $B(x_0,r)$, де $0\le\tau\le 1$, $\rho(x)=\|x-x_0\|$. Тоді умова

$$\left\|F(x)-F\left(x^{\tau}\right)\right\|\le L\left\|x-x^{\tau}\right\| \qquad \forall\, x\in B(x_0,r),\ \ 0\le\tau\le 1, \tag{3}$$

— це радіальна умова Ліпшиця в кулі $B(x_0,r)$ зі сталою L.

Якщо виконується умова

$$\left\|F(x)-F(x_0)\right\|\le L\|x-x_0\| \qquad \forall\, x\in B(x_0,r), \tag{4}$$

то назвемо її центральною умовою Ліпшиця у кулі $B(x_0,r)$ зі сталою L.

Проте L в умовах Ліпшиця не обов'язково має бути сталою, а може бути додатною інтегровною функцією. У цьому випадку співвідношення (3) та (4) будуть замінені відповідно на

$$\left\|F(x)-F\left(x^{\tau}\right)\right\|\le \int_{\tau\rho(x)}^{\rho(x)} L(u)\,du \qquad \forall\, x\in B(x_0,r),\ \ 0\le\tau\le 1, \tag{5}$$

та

$$\left\|F(x)-F(x_0)\right\|\le \int_{0}^{\rho(x)} L(u)\,du \qquad \forall\, x\in B(x_0,r). \tag{6}$$

Умови Ліпшиця (5) і (6) називатимемо узагальненими умовами Ліпшиця або такими, що містять L у середньому.

Лема 1. Припустимо, що F має неперервну похідну в $B\left(x_0, r\right)$, $F'\left(x^*\right)^{-1}$ існує і F' задовольняє центральну умову Ліпшиця з L у середньому

$$\left\| F'\left(x^*\right)^{-1}\left(F'\left(\frac{x+y}{2}\right)-F'\left(x^*\right)\right)\right\| \leq \int_0^{\rho((x+y)/2)} L(u)\,du \qquad \forall\, x, y \in B\left(x^*, r\right), \tag{7}$$

де L — додатна інтегровна функція, $\rho(x)=\left\|x-x^*\right\|$. Нехай r задовольняє умову

$$\int_0^r L(u)\,du \leq 1. \tag{8}$$

Тоді $F'(x)$ оборотна в цій кулі та

$$\left\| F'\left(\frac{x+y}{2}\right)^{-1} F'\left(x^*\right)\right\| \leq \left(1-\int_0^{\rho((x+y)/2)} L(u)\,du\right)^{-1}.$$

Доведення. З тотожності

$$F'\left(\frac{x+y}{2}\right)^{-1} F'\left(x^*\right)=\left\{I-\left[I-F'\left(x^*\right)^{-1} F'\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]\right\}^{-1},$$

враховуючи (7) і (8), за теоремою Банаха отримаємо

$$\left\| F'\left(\frac{x+y}{2}\right)^{-1} F'\left(x^*\right)\right\| \leq \left(1-\int_0^{\rho((x+y)/2)} L(u)\,du\right)^{-1}.$$

Лема 2. Нехай $h(t)=\frac{1}{t}\int_0^t L(u)\,du,\ 0 \leq t \leq r$, де $L(u)$ — додатна інтегровна та монотонно неспадна функція на [0, r] [9]. Тоді $h(t)$ монотонно неспадна відносно t.

Лема 3. Нехай $g(t)=\frac{1}{t^3}\int_0^t N(u)(t-u)^2\,du,\ 0 \leq t \leq r$, де $N(u)$ — додатна інтегровна та монотонно неспадна функція на $[0, r]$. Тоді $g(t)$ є монотонно неспадною відносно t.

Доведення. Справді, у разі монотонності N для $0<t_1<t_2$ маємо

$$g\left(t_2\right)-g\left(t_1\right)=\frac{1}{t_2^3}\int_0^{t_2} N(u)\left(t_2-u\right)^2 du-\frac{1}{t_1^3}\int_0^{t_1} N(u)\left(t_1-u\right)^2 du=$$

$$=\frac{1}{t_2^3}\int_{t_1}^{t_2} N(u)\left(t_2-u\right)^2 du+\frac{1}{t_2^3}\int_0^{t_1} N(u)\left(t_1-u\right)^2 du-\frac{1}{t_1^3}\int_0^{t_1} N(u)\left(t_1-u\right)^2 du=$$

$$= \frac{1}{t_2^3} \int_{t_1}^{t_2} N(u)\left(t_2 - u\right)^2 du + \left(\frac{1}{t_2^3} - \frac{1}{t_1^3}\right) \int_0^{t_1} N(u)\left(t_1 - u\right)^2 du \geq$$

$$\geq N\left(t_1\right)\left[\frac{1}{t_2^3} \int_{t_1}^{t_2} \left(t_2 - u\right)^2 du + \left(\frac{1}{t_2^3} - \frac{1}{t_1^3}\right) \int_0^{t_1} \left(t_1 - u\right)^2 du\right] =$$

$$= N\left(t_1\right)\left[\frac{1}{t_2^3} \int_0^{t_2} \left(t_2 - u\right)^2 du - \frac{1}{t_1^3} \int_0^{t_1} \left(t_1 - u\right)^2 du\right] = 0 .$$

Отже, $g(t) = \frac{1}{t^3} \int_0^t N(u)(t-u)^2\, du,\ 0 \leq t \leq r$, є монотонно неспадною відносно t.

2. Збіжність ітераційного процесу

Вивчимо збіжність методу (2). Нехай $D \subset X$ — відкрита опукла множина, $B(x^*, r) \subseteq D$, r_0, r_1 — корені системи рівнянь

$$A\tau_0^2 + C\tau_1 = 1,$$

$$A\tau_0^2 + E\left(2\tau_0 + \tau_1\right)\tau_0 = \tau_1$$

на інтервалі (0, r); сталі r, A, C, E визначені нижче.

Радіус області збіжності та порядок збіжності цього методу встановлюється такою теоремою.

Теорема 1. Нехай F — нелінійний оператор, визначений у відкритій опуклій області D простору X зі значеннями у просторі Y. Припустимо, що:

(i) $F(x) = 0$ має розв’язок $x^* \in D$, у якому існує похідна Фреше $F'(x^*)$ і вона є оборотна;

(ii) існують похідні за Фреше F' і F'' в $B(x^*, r) \subset D$, які задовольняють умови Ліпшиця з L і N у середньому

$$\left\| F'\left(x^*\right)^{-1}\left(F'(x) - F'\left(x^*\right)\right)\right\| \leq \int_0^{\rho(x)} L(u)\, du, \tag{9}$$

$$\left\| F'\left(x^*\right)^{-1}\left(F''(x) - F''(y)\right)\right\| \leq \int_0^{\|x-y\|} N(u)\, du, \tag{10}$$

де $x, y \in B\left(x^*, r\right)$, $\rho(x) = \left\| x - x^* \right\|$ і функції L та N неспадні;

(iii) нехай $r > 0$ задовольняє нерівність

$$\frac{\frac{1}{4}\int_0^r N(u)(r-u)^2\, du + r\int_0^{3r/2} L(u)\, du}{r\left(1 - \int_0^r L(u)\, du\right)} \leq 1 . \tag{11}$$

Тоді для всіх $x_0 \in B\left(x^*, r_0\right)$ і $y_0 \in B\left(x^*, r_1\right)$ послідовності $\{x_k\}_{k\in N}$ і $\{y_k\}_{k\in N}$, визначені за формулою (2), збігаються до розв'язку x^*, $x_k \in B\left(x^*, r_0\right)$ і $y_k \in B\left(x^*, r_1\right)$ для $k = 0,1,2,...$ та виконуються оцінки

$$\rho\left(x_{k+1}\right) = \left\| x_{k+1} - x^* \right\| \le A\rho\left(x_k\right)^3 + C\rho\left(x_k\right)\rho\left(y_k\right), \quad k = 0,1,2,...,$$
$$\rho\left(y_{k+1}\right) = \left\| y_{k+1} - x^* \right\| \le A\rho\left(x_{k+1}\right)^3 + E\left(\rho\left(x_k\right) + \rho\left(x_{k+1}\right) + \rho\left(y_k\right)\right), \quad k = 0,1,2,..., \tag{12}$$

де

$$z_0 = \frac{\rho\left(x_0\right) + \rho\left(y_0\right) + \rho\left(x_1\right)}{2}, \qquad A = \frac{\int_0^{\rho(x_0)} N(u)\left(\rho\left(x_0\right) - u\right)^2 du}{4\left(1 - \int_0^{(\rho(x_0)+\rho(y_0))/2} L(u)du\right)\rho\left(x_0\right)^3},$$

$$C = \frac{\int_0^{\rho(y_0)/2} L(u)du}{\left(1 - \int_0^{(\rho(x_0)+\rho(y_0))/2} L(u)du\right)}, \qquad E = \frac{\int_0^{z_0} L(u)du}{\left(1 - \int_0^{(\rho(x_0)+\rho(y_0))/2} L(u)du\right)2z_0}.$$

Порядок збіжності послідовностей $\{x_k\}_{k\in N}$ і $\{y_k\}_{k\in N}$ до розв'язку x^* дорівнює $1+\sqrt{2}$.

Доведення. Виберемо довільно $x_0 \in B\left(x^*, r_0\right)$ і $y_0 \in B\left(x^*, r_1\right)$, де r задовольняє (11). Тоді у разі монотонності L і N за лемами 2 та 3 маємо, що $\frac{1}{t}\int_0^t L(u)\,du$ і $\frac{1}{t^3}\int_0^t N(u)(t-u)^2\,du$ неспадні відносно t. Якщо $x_k \in B\left(x^*, r\right)$, то згідно з умовою (3)

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - F'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right)^{-1} F\left(x_k\right) =$$
$$= F'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right)\left(x_k - x^*\right) - F\left(x_k\right) + F\left(x^*\right)\right] =$$
$$= F'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right)^{-1} F'\left(x^*\right)\left(F'\left(x^*\right)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right)\left(x_k - x^*\right) - F\left(x_k\right) + F\left(x^*\right)\right]\right) =$$

$$
= F'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right)^{-1} F'\left(x^*\right)\left\{F'\left(x^*\right)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_k + x^*}{2}\right)\left(x_k - x^*\right) - F\left(x_k\right) + F\left(x^*\right)\right] + \right.
$$

$$
\left. + F'\left(x^*\right)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right) - F'\left(\frac{x_k + x^*}{2}\right)\right]\left(x_k - x^*\right)\right\}.
$$

Запишемо тотожність з роботи [6, лема 1, с. 336] для значення ω = 1/2

$$
F(x) - F(y) - F'\left(\frac{x+y}{2}\right)(x-y) =
$$

$$
= \frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)\left[F''\left(\frac{x+y}{2} + \frac{t}{2}(x-y)\right) - F''\left(\frac{x+y}{2} + \frac{t}{2}(y-x)\right)\right](x-y)(x-y)dt\,.
$$

Поклавши у цій рівності $x = x^*$, $y = x$, отримаємо такі оцінки

$$
\left\|F'\left(x^*\right)^{-1}\left[F\left(x^*\right) - F\left(x_k\right) - F'\left(\frac{x_k + x^*}{2}\right)\left(x^* - x_k\right)\right]\right\| =
$$

$$
= \frac{1}{4}\left\|\int_0^1 (1-t) F'\left(x^*\right)^{-1}\left[F''\left(\frac{x_k + x^*}{2} + \frac{t}{2}\left(x^* - x_k\right)\right) - F''\left(\frac{x_k + x^*}{2} + \frac{t}{2}\left(x_k - x^*\right)\right)\times\right.\right.
$$

$$
\left.\left.\times\left(x^* - x_k\right)\left(x^* - x_k\right)\right]dt\right\| \le \frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)\int_0^{t\left\|x_k - x^*\right\|} N(u)du\left\|x_k - x^*\right\|^2 dt =
$$

$$
= \frac{1}{4}\int_0^{\left\|x_k - x^*\right\|}\left(1 - \frac{u}{\left\|x_k - x^*\right\|}\right)N(u)\left(1 - \frac{u}{\left\|x_k - x^*\right\|}\right)du\left\|x_k - x^*\right\|^2 =
$$

$$
= \frac{1}{4}\int_0^{\rho\left(x_k\right)} N(u)\left(\rho\left(x_k\right) - u\right)^2 du\,;
$$

$$
\left\|F'\left(x^*\right)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right) - F'\left(\frac{x_k + x^*}{2}\right)\right]\right\| \le \int_0^{\rho\left(y_k\right)/2} L(u)du\,.
$$

Тоді згідно з лемами 1-3 й умовами (9), (10) з урахуванням останніх нерівностей маємо

$$
\left\|x_{k+1} - x^*\right\| \le \left\|F'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right)^{-1} F'\left(x^*\right)\right\|\left\{\left\|F'\left(x^*\right)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_k + x^*}{2}\right)\left(x_k - x^*\right) - \right.\right.\right.
$$

$$
\left.\left.\left. - F\left(x_k\right) + F\left(x^*\right)\right]\right\| + \left\|F'\left(x^*\right)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right) - F'\left(\frac{x_k + x^*}{2}\right)\right]\left(x_k - x^*\right)\right\|\right\} \le
$$

$$\le \left\| F'\left(\frac{x_k+y_k}{2}\right)^{-1} F'\left(x^*\right) \right\| \left(\frac{1}{4}\int_0^1 (1-t) \left\| F'\left(x^*\right)^{-1} \left[F''\left(\frac{x_k+x^*}{2}+\frac{t}{2}\left(x_k-x^*\right)\right) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. -F''\left(\frac{x_k+x^*}{2}+\frac{t}{2}\left(x^*-x_k\right)\right)\right]\left(x_k-x^*\right)\left(x_k-x^*\right)\right\| dt +$$

$$\left. + \left\| F'\left(x^*\right)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_k+y_k}{2}\right)-F'\left(\frac{x_k+x^*}{2}\right)\right]\left(x_k-x^*\right)\right\| \right) \le$$

$$\le \frac{\int_0^{\rho(x_k)} N(u)\left(\rho\left(x_k\right)-u\right)^2 du\, \rho\left(x_k\right)^3}{4\left(1-\int_0^{\rho((x_k+y_k)/2)} L(u)du\right)\rho(x_k)^3} + \frac{\int_0^{\rho(y_k)/2} L(u)du\ \rho\left(x_k\right)\rho\left(y_k\right)/2}{\left(1-\int_0^{\rho((x_k+y_k)/2)} L(u)du\right)\frac{\rho\left(y_k\right)}{2}} \le$$

$$\le \frac{\int_0^{\rho(x_0)} N(u)\left(\rho\left(x_0\right)-u\right)^2 du\, \rho\left(x_k\right)^3}{4\left(1-\int_0^{(\rho(x_0)+\rho(y_0))/2} L(u)du\right)\rho(x_0)^3} + \frac{\int_0^{\rho(y_0)/2} L(u)du\ \rho\left(x_k\right)\rho\left(y_k\right)/2}{\left(1-\int_0^{(\rho(x_0)+\rho(y_0))/2} L(u)du\right)\rho\left(y_0\right)/2} \le$$

$$\le A\rho\left(x_k\right)^3 + C\rho\left(x_k\right)\rho\left(y_k\right) < \left(Ar_0^2 + Cr_1\right)\rho\left(x_k\right) = \rho\left(x_k\right) < r_0 . \tag{13}$$

Аналогічно

$$y_{k+1}-x^* = x_{k+1}-x^*-F'\left(\frac{x_k+y_k}{2}\right)^{-1} F\left(x_{k+1}\right) =$$

$$= F'\left(\frac{x_k+y_k}{2}\right)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_k+y_k}{2}\right)\left(x_{k+1}-x^*\right)-F\left(x_{k+1}\right)+F\left(x^*\right)\right] =$$

$$= F'\left(\frac{x_k+y_k}{2}\right)^{-1} F'\left(x^*\right)\left\{F'\left(x^*\right)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_k+y_k}{2}\right)\left(x_{k+1}-x^*\right)-F\left(x_{k+1}\right)+F\left(x^*\right)\right]\right\} =$$

$$= F'\left(\frac{x_k+y_k}{2}\right)^{-1} F'\left(x^*\right)\left\{F'\left(x^*\right)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_{k+1}+x^*}{2}\right)\left(x_{k+1}-x^*\right)-F\left(x_{k+1}\right)+F\left(x^*\right)\right] + \right.$$

$$\left. +F'\left(x^*\right)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_k+y_k}{2}\right)-F'\left(\frac{x_{k+1}+x^*}{2}\right)\right]\left(x_{k+1}-x^*\right)\right\} .$$

Звідси

$$\left\| y_{k+1} - x^* \right\| \le \frac{\int\limits_0^{\rho(x_{k+1})} N(u)\big(\rho(x_{k+1}) - u\big)^2 du}{4\left(1 - \int\limits_0^{\rho((x_k+y_k)/2)} L(u)du\right)} \frac{\int\limits_0^{z_k} L(u)du\, \rho(x_{k+1})}{\left(1 - \int\limits_0^{\rho((x_k+y_k)/2)} L(u)du\right)} \le$$

$$\le \frac{\int\limits_0^{\rho(x_{k+1})} N(u)\big(\rho(x_{k+1}) - u\big)^2 du\, \rho(x_{k+1})^3}{4\left(1 - \int\limits_0^{\rho((x_k+y_k)/2)} L(u)du\right)\rho(x_{k+1})^3} + \frac{\int\limits_0^{z_k} L(u)du\, \rho(x_{k+1}) z_k}{\left(1 - \int\limits_0^{\rho((x_k+y_k)/2)} L(u)du\right) z_k} \le$$

$$\le \frac{\int\limits_0^{\rho(x_0)} N(u)\big(\rho(x_0) - u\big)^2 du\, \rho(x_{k+1})^3}{4\left(1 - \int\limits_0^{(\rho(x_0)+\rho(y_0))/2} L(u)du\right)\rho(x_0)^3} + \frac{\int\limits_0^{z_0} L(u)du\, \rho(x_{k+1}) z_k}{\left(1 - \int\limits_0^{(\rho(x_0)+\rho(y_0))/2} L(u)du\right) z_0} \le$$

$$\le A\rho(x_{k+1})^3 + E\big(\rho(x_k) + \rho(y_k) + \rho(x_{k+1})\big)\rho(x_{k+1}) <$$

$$< \left[A r_0^2 + E(2r_0 + r_1) \right] \rho(x_{k+1}) = \frac{r_1}{r_0}\rho(x_{k+1}) < r_1, \tag{14}$$

де $z_k = \big(\rho(x_k) + \rho(y_k) + \rho(x_{k+1})\big)/2$.

Зокрема, послідовність $\left\{ \left\| x_n - x^* \right\| \right\}$ за співвідношенням (13) монотонно збігається до граничного значення a, $0 \le a < r_0$. З нерівності (13) випливає $a \le Aa^3 + Car_1$. Для $a \ne 0$ отримуємо суперечність

$$1 \le Aa^2 + Cr_1 < Ar_0^2 + Cr_1 = 1.$$

Звідси випливає: $\lim\limits_{k\to\infty} x_n = x^* = \lim\limits_{k\to\infty} y_n$.

Покладемо $a_k = \rho(x_k)$, $b_k = \rho(y_k)$, $k = 0,1,2,\ldots$ З нерівностей (13), (14) отримуємо

$$a_{k+1} \le \min\left\{ a_k, Aa_k^3 + Ca_k b_k \right\},\ k = 0,1,2,\ldots, \tag{15}$$

$$b_{k+1} \le a_{k+1} \min\left\{ \frac{r_1}{r_0}, Aa_k^2 + E\big(a_k + a_{k+1} + b_k\big) \right\} \le a_{k+1} \min\left\{ \frac{r_1}{r_0}, (2E + A)a_k^2 + Eb_k \right\} \le$$

$$\le a_{k+1} \min\left\{ \frac{r_1}{r_0}, \left(2E + A + E\frac{r_1}{r_0}\right) a_k^2 \right\} \le \left(2E + A + E\frac{r_1}{r_0}\right) a_{k+1} a_k. \tag{16}$$

З нерівностей (15) і (16) для достатньо великих k з деякою додатною константою C_1 випливає $a_{k+1} \le C_1 a_k^2 a_{k-1}$.

З останньої нерівності отримаємо рівняння для визначення порядку збіжності $\rho^2 - 2\rho - 1 = 0$, додатний корінь якого $\rho^* = 1 + \sqrt{2}$ і є порядком збіжності процесу (2).

Встановлення області єдиності розв'язку проводиться аналогічно, як у [9].

Під час вивчення методу Ньютона традиційними є припущення, що похідні задовольняють умови Ліпшиця. Вважаючи, що L і N сталі, отримаємо з теореми 1 такий наслідок.

Наслідок 1. Припустимо, що $F\left(x^*\right) = 0$, F має неперервні похідні в $B\left(x^*, r\right)$, $F'\left(x^*\right)^{-1}$ існує і $F'\left(x^*\right)^{-1} F'(x)$ і $F'\left(x^*\right)^{-1} F''(x)$ задовольняють умови Ліпшиця

$$\left\| F'\left(x^*\right)^{-1} \left(F'(x) - F'\left(x^*\right)\right) \right\| \le L \left\| x - x^* \right\|, \quad \left\| F'\left(x^*\right)^{-1} \left(F''(x) - F''(y)\right) \right\| \le N \left\| x - y \right\|,$$

де $x, y \in B\left(x^*, r\right)$, r — єдиний додатний корінь рівняння

$$Nr^2 + 30Lr - 12 = 0 . \tag{17}$$

Тоді ітераційний процес (2) збігається для всіх $x_0 \in B\left(x^*, r_0\right)$, $y_0 \in B\left(x^*, r_1\right)$ і справджуються нерівності (12).

Із співвідношення (17) випливає, що радіус області збіжності ітераційного процесу (2) $r < 2/\left(5L\right)$, що узгоджується з результатами (з урахуванням означення умови Ліпшиця для поділених різниць) для різницевого двокрокового методу з порядком збіжності $1 + \sqrt{2}$, для якого $r < 1/\left(5L\right)$ [12].

Зауважимо, що отриманий результат подібний до теореми 1 [6, с. 335-338], однак умови нашої теореми слабші, а оцінки точніші. Ми вимагаємо існування оборотної похідної Фреше лише в точці x^*, а не в усій області.

Висновки. Обґрунтовано локальну збіжність двокрокового методу типу Ньютона (2) за узагальнених умов Ліпшиця для похідних першого та другого порядків, у яких замість сталих Ліпшиця використовуються деякі додатні інтегровні функції. Для сталих Ліпшиця отримані результати точніші й за слабших умов, аніж наведені у роботі [6].

Література

[1] *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — Москва: Наука, 1984. — 752 с.

[2] *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — Москва: Мир, 1975. — 558 с.

[3] *Бартіш М. Я.* Про один ітераційний метод розв'язування функціональних рівнянь // Допов. АН УРСР. Сер. А. — 1968. — Т. 30, № 5. — С. 387-391.

[4] *King R. F.* Tangent method for nonlinear equations // Numer. Math. — 1972. — Vol. 18. — P. 298-304.
[5] *Laasonen P.* Ein ǜberquadratisch konvergenter iterativer Algorithmus // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. — 1969. — P. 450.
[6] *Werner W.* Über ein Verfahren der Ordnung $1+\sqrt{2}$ zur Nullstellenbestimmung // Numer. Math. — 1979. — Vol. 32. — P. 333-342.
[7] *Argyros I. K.* On the semilocal convergence of Werner's method for solving equations using recurrent functions // Punjab University Journal of Mathematics. — 2011. — Vol. 43. — P. 19-28.
[8] *Han D., Wang X.* Convergence of deformed Newton method // Appl. Math. Comput. — 1998. — Vol. 94, No 1. — P. 65-72.
[9] *Wang X.* Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space // IMA J. Numer. Anal. — 2000. — Vol. 20, Issue 1. — P. 123-134.
[10] *Chen J., Li W.* Convergence behavior of inexact Newton methods under weak Lipschitz condition // J. Comput. Appl. Math. — 2006. — Vol. 191, Issue 1. — P. 143-164.
[11] *Shakhno S. M.* On the secant method under generalized Lipschitz conditions for the divided difference operator // Proc. Appl. Math. Mech. — 2007. — Vol. 7, Issue 1. — P. 2060083-2060084.
[12] *Шахно С. М.* Про двокроковий ітераційний процес в узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2009. — Т. 52, № 1. — С. 59-66.

Convergence of the two-step Newton type method for solving of nonlinear equations under the generalized Lipschitz conditions

Stepan Shakhno

Under the generalized Lipschitz conditions for the derivative of first-order and second-order, local convergence of the two-step method for solving nonlinear functional equations are investigated. The order of convergence of method is established and comparison of the received results with the known is conducted.

Сходимость двухшагового метода типа Ньютона для решения нелинейных уравнений при обобщенных условиях Липшица

Степан Шахно

Исследована локальная сходимость двухшагового метода для решения нелинейных функциональных уравнений при обобщенных условиях Липшица для производных первого и второго порядков. Показан порядок сходимости метода и проведено сравнение полученных результатов с известными.

Представлено професором П. Малачівським

Отримано 04.09.12