

Про моделювання процесів очищення рідин від багатокomпонентних забруднень у сорбційних фільтрах

Андрій Бомба¹, Андрій Сафоник²

¹ д. т. н., професор, Рівненський державний гуманітарний університет, вул. Остафова, 31, Рівне, 33000, e-mail: abomba@mail.ru

² к. т. н., доцент, Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, e-mail: safonik@ukr.net

Розглядаються та вирішуються питання врахування зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини й осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну тощо) під час моделювання процесів очищення рідини від багатокomпонентних домішок у сорбційних фільтрах. Отримано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язків відповідних модельних задач, що описуються за допомогою систем нелінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь типу «конвекція-дифузія-масообмін». Відповідні співвідношення є ефективними для проведення націлених на «продуктивність» фільтрування теоретичних досліджень у випадках переважання конвективних і сорбційних складників відповідного процесу над дифузійними та десорбційними, що спостерігається в переважній більшості фільтрувальних установок. На цій основі проведено відповідний комп'ютерний експеримент, результати якого показують переваги запропонованої моделі порівняно із класичними.

Ключові слова: фільтрування, багатокomпонентна концентрація, конвекція, дифузія, масообмін, асимптотика, нелінійні сингулярно збурені задачі.

Вступ. Проведений у роботах [1-13] аналіз результатів досліджень свідчить про наявність складної структури взаємозалежностей різних факторів, що визначають процеси фільтрації та фільтрування через пористі середовища, які не враховувалися в «традиційних» (класичних, феноменологічних) моделях таких систем. Врахування ж різних взаємовпливів, а також різних додаткових факторів, які вносяться у «вихідну» (базову) модель із метою більш глибокого вивчення процесу, часто приводить дослідників до необхідності побудови громіздких і мало-ефективних (з погляду чисельної реалізації та практичного використання) математичних моделей. Проте, у багатьох практично важливих випадках під час дослідження таких процесів можна підходити з точки зору моделювання різного роду збурень відомих (ідеалізованих, усереднених, базових) «фонів».

У роботі розглядаються та вирішуються питання врахування зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини й осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну й т. п.) під час моделювання процесів очищення рідини від багатокomпонентних домішок у сорбційних фільтрах.

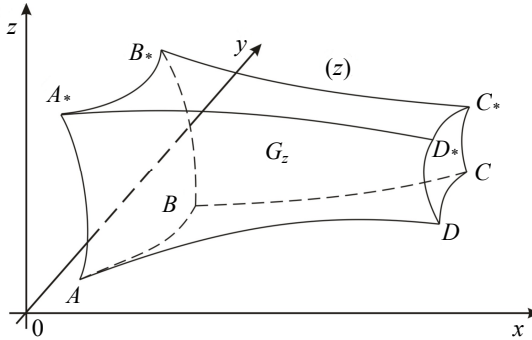


Рис. 1. Просторова фізична область G_z (фільтр)

1. Формулювання задачі

Розглянемо однозв'язний криволінійний паралелепіпед (фільтр-шар) $ABCD A_* B_* C_* D_*$, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках і ребрах, еквіпотенціальними поверхнями $ABB_* A_* = \{z : f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_* C_* = \{z : f_2(x, y, z) = 0\}$, а також поверхнями течії $ADD_* A_* = \{z : f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_* B_* = \{z : f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{z : f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_* B_* C_* D_* = \{z : f_6(x, y, z) = 0\}$ (рис. 1). Припускаємо [10], що частинки забруднення домішок речовини можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення-відриву, сорбції-десорбції), при цьому концентрації забруднення впливають на розглянутий шар. Концентрація забруднення є багатокомпонентною $C = C(x, y, z, t) = (C_1, \dots, C_m) = (C_1(x, y, z, t), \dots, C_m(x, y, z, t))$, де C_i — концентрація i -ої компоненти домішки ($i = \overline{1, m}$) у рідкому фільтруючому середовищі. Відповідний процес фільтрування з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини й осідання) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну й т. ін. за аналогією з роботами [9, 10]) для області $G = G_z \times (0, \infty)$, де $G_z = ABCD A_* B_* C_* D_*$ опишемо такою модельною задачею:

$$\frac{\partial(\sigma(P)C_i)}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} C_i = D_i \Delta C_i + \varepsilon \alpha(P)P, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \beta(P) \left(\sum_{i=1}^m k_i C_i \right) - \varepsilon \alpha(P)P; \quad (1)$$

$$C_i \Big|_{ABB_* A_*} = C_{i,*}(M, t), \quad \frac{\partial C_i}{\partial \vec{n}} \Big|_{CDD_* C_*} = 0, \quad \frac{\partial C_i}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD_* A_* \cup BCC_* B_* \cup ABCD \cup A_* B_* C_* D_*} = 0,$$

$$C_i(x, y, z, 0) = C_{i,0}^0(x, y, z), \quad P(x, y, z, 0) = P_0^0(x, y, z); \quad (2)$$

$$\vec{v} = \kappa(P)\nabla\varphi, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0; \quad (3)$$

$$\varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \quad (4)$$

де $P(x, y, z, t)$ — концентрація осаду у внутрішній точці (x, y, z) області завантаження в момент часу t ; $\beta(P)$ — коефіцієнт, що характеризує масові об'єми осадження домішок за одиницю часу ($\beta(P) = \beta_0 - \varepsilon\beta_*P$); $\alpha(P)$ — коефіцієнт, що характеризує масові об'єми відірваних за той же час від гранул завантаження частинок ($\alpha(P) = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_*P$); $\sigma(x, y, z)$ — пористість середовища; $\vec{\nabla}$ — оператор Гамільтона; $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ — оператор Лапласа; $D_i = d_{0i}\varepsilon$ — коефіцієнт дифузії домішки у рідині; $\beta_0, \beta_*, \alpha_0, \alpha_*, \sigma_*, d_{0i}, \varepsilon$ — тверді параметри (вони характеризують відповідні коефіцієнти $\beta(\rho), \alpha(\rho), \sigma(\rho)$ — м'які параметри, знаходяться експериментальним способом), ε — малий параметр (він характеризує переваги одних складників процесу над іншим, а саме, що дифузійний і десорбційний складники цього процесу є малі порівняно з іншими його складниками); $C_{i,*}(M, t), C_{i,0}^0(x, y, z)$ — достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G ; M — довільна точка відповідної поверхні; φ — фільтраційний потенціал ($0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$); $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ — вектор швидкості фільтрації ($|\vec{v}| > v_* \gg \varepsilon$); κ — коефіцієнт фільтрації середовища; \vec{n} — зовнішня нормаль до відповідної поверхні.

Прийmemo, що розв'язок задачі (3), (4) на просторове конформне відображення $G_w \mapsto G_z \left(G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\} \right)$ — відповідна G_z область комплексного потенціалу) відомий [1, 7], зокрема, побудовано динамічну сітку та поле швидкості \vec{v} , обчислено фільтраційну витрату Q . Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta), y = y(\varphi, \psi, \eta), z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у системі (1) та умовах (2), приходимо до відповідної задачі для області G_w :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\sigma(\rho)c_i)}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_i}{\partial\varphi} = \\ & = \varepsilon d_{0i} \left(v^2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial\varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_i}{\partial\psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial\eta^2} + d_1 \frac{\partial c_i}{\partial\psi} + d_2 \frac{\partial c_i}{\partial\eta} \right) + \varepsilon\alpha(\rho)\rho, \\ & \frac{\partial\rho}{\partial t} = \beta(\rho) \left(\sum_{i=1}^m k_i c_i \right) - \varepsilon\alpha(\rho)\rho; \quad (5) \\ & c_i(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_{i,*}(\psi, \eta, t), \quad c_{i,\varphi}(\varphi^*, \psi, \eta, t) = 0, \end{aligned}$$

$$c_{i,\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = c_{i,\psi}(\varphi, Q^*, \eta, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, 0, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0,$$

$$c_i(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_{i,0}^0(\varphi, \psi, \eta), \quad \rho(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0(\varphi, \psi, \eta), \quad (6)$$

де

$$c_i = c_i(\varphi, \psi, \eta, t) = C_i(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$\rho = \rho(\varphi, \psi, \eta, t) = P(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$b_1 = b_1(\varphi, \psi, \eta) = (\vec{\nabla}\psi)^2, \quad b_2 = b_2(\varphi, \psi, \eta) = (\vec{\nabla}\eta)^2, \quad d_1 = d_1(\varphi, \psi, \eta) = \Delta\psi,$$

$$d_2 = d_2(\varphi, \psi, \eta) = \Delta\eta.$$

2. Асимптотика розв'язку

Розв'язок задачі (5), (6) шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [9, 10]

$$c_i = c_{i,0} + \varepsilon c_{i,1} + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \Pi_j + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \tilde{\Pi}_j + \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\Pi}}_j +$$

$$+ \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_j + \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j/2} \hat{\Pi}_j + \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j/2} \hat{\tilde{\Pi}}_j + R_{c,i}, \quad (7)$$

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \bar{P}_j + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \check{P}_j + \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j/2} \tilde{P}_j +$$

$$+ \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{P}}_j + \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j/2} \hat{P}_j + \sum_{j=0}^3 \varepsilon^{j/2} \hat{\tilde{P}}_j + R_\rho, \quad (8)$$

де $R_{c,i}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon), R_\rho(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ — залишкові члени, $c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t), \rho_j(\varphi, \psi, \eta, t)$ — члени регулярної частини асимптотики ($i = \overline{1, m}; j = \overline{0, n}$); $\Pi_j(\xi, \psi, \eta, t), \bar{P}_j(\xi, \psi, \eta, t)$ — функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході з фільтра) ($j = \overline{0, 2}$), $\tilde{\Pi}_j(\check{\xi}, \psi, \eta, t), \check{P}_j(\check{\xi}, \psi, \eta, t)$ — в околі $\varphi = \varphi_*$ (поправки на вході у фільтр) ($j = \overline{0, 2}$), а функції $\tilde{\tilde{\Pi}}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_j(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t), \hat{\Pi}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \hat{\tilde{\Pi}}_j(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$ та $\tilde{P}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \tilde{\tilde{\psi}}, \eta, t), \hat{P}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \hat{\tilde{P}}_j(\varphi, \psi, \tilde{\tilde{\eta}}, t)$ ($j = \overline{0, 3}$) — в околах $\psi = 0$, $\psi = Q^*$, $\eta = 0$, $\eta = Q^*$ (поправки на бічних стінках фільтра) відповідно; $\xi = (\varphi^* - \varphi)/\varepsilon, \check{\xi} = (\varphi - \varphi_*)/\varepsilon, \tilde{\psi} = \psi/\sqrt{\varepsilon}, \tilde{\tilde{\psi}} = (Q^* - \psi)/\sqrt{\varepsilon}, \tilde{\eta} = \eta/\sqrt{\varepsilon}, \tilde{\tilde{\eta}} = (Q^* - \eta)/\sqrt{\varepsilon}$ — «розтяги» відповідних змінних.

Шляхом підстановки співвідношень (7), (8) у (5), (6) і виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів біля однакових степенів ε , одержимо такі задачі для знаходження $c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\rho_j(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($j=0,1$)

$$\begin{aligned} \sigma_0 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial \rho_0}{\partial t} &= \beta_0 \left(\sum_{i=1}^m k_i c_{i,0} \right), \\ c_{i,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) &= c_{i,0}^0, & c_{i,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t) &= c_{i,*}(\psi, \eta, t), \\ \rho_0(\varphi, \psi, \eta, 0) &= \rho_0^0; \\ -\sigma_* \rho_{i-1} \frac{\partial c_{i,j}}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial x} - k_i \sigma_* \frac{\partial \rho_{j-1}}{\partial t} c_{i,j} &= g_{i,j}, \\ \frac{\partial \rho_j}{\partial t} &= -\beta_* \rho_{j-1} \left(\sum_{i=1}^m k_i c_{i,j} \right) - \alpha_* \rho_{j-1} \rho_j, \\ c_{i,1}(\varphi, \psi, \eta, 0) &= 0, & c_{i,1}(\varphi_*, \psi, \eta, t) &= 0, \\ \rho_1(\varphi, \psi, \eta, 0) &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Внаслідок послідовного розв'язування задач (9), (10) матимемо

$$\begin{aligned} c_{i,0} &= \begin{cases} c_{i,*}(\psi, \eta, t-f) \exp \left[- \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{\alpha(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f(\varphi, \psi, \eta))}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} d\tilde{\varphi} \right], & t \geq f, \\ c_{i,0}^0(f^{-1}(f-t, \psi, \eta), \psi, \eta) \exp \left[- \int_0^t \frac{\alpha(f^{-1}(\tilde{t} + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{t})}{\sigma(f^{-1}(\tilde{t} + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\tilde{t} \right], & t < f, \end{cases} \\ \rho_0 &= \beta_0 \exp(-\alpha_0 t) \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m k_i c_{i,0}(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) \right) \exp(\alpha_0 \tilde{t}) d\tilde{t} + \rho_0^0, \\ c_{i,1} &= \begin{cases} \exp(-\lambda_1) \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{g_1(s, \psi, \eta, f(s, \psi, \eta) - f + t)}{v^2(s, \psi, \eta)} \exp(\lambda_1(s, \psi, \eta, t)) ds, & t \geq f, \\ \exp(-\lambda_2) \int_0^t \frac{g_2(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta, s)}{\sigma(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} \exp(\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, s)) ds, & t < f, \end{cases} \\ \rho_1 &= -\beta_* \exp \left(-\alpha_* \int_0^t \rho_0(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) d\tilde{t} \right) \times \\ &\times \int_0^t \rho_0(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) \left(\sum_{i=1}^2 c_{i,1}(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) \right) \exp \left(\alpha_* \int_0^{\tilde{t}} \rho_0(\varphi, \psi, \eta, \tilde{t}) d\tilde{t} \right) d\tilde{t}, \end{aligned}$$

де

$$g_{i,1}(x,t) = d_{0i} \left(v^2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c_i}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c_i}{\partial \eta} \right) + \alpha_0 \rho_0,$$

$$g_2(\varphi, \psi, \eta, t) = g_1 - \alpha_0,$$

$$\lambda_1(\varphi, \psi, \eta, t) = -\beta_* k_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\rho_0(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f)}{v^2(s, \psi, \eta)} ds,$$

$$\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, t) =$$

$$= -\beta_* k_1 \int_0^t \frac{\rho_0(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s}) c_1(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s})}{\sigma(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\tilde{s},$$

$$f(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\sigma(s, \bar{\psi}, \bar{\eta})}{v^2(s, \bar{\psi}, \bar{\eta})} ds \quad \text{— час проходження відповідною частинкою шляху}$$

від точки $(x(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in ABB_*A_*$ до точки $(x(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in G_z$ уздовж відповідної лінії течії (як перетину деяких двох поверхонь $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}$, $0 \leq \bar{\psi} \leq Q_*$, $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}$, $0 \leq \bar{\eta} \leq Q^*$), f^{-1} — функція, обернена до f відносно змінної φ (зазначимо, що така функція існує, оскільки $v^{-2}(\varphi, \psi, \eta)$ — неперервно диференційовна, обмежена, додатно визначена функція).

Функції $\Pi_i(\xi, \psi, \eta, t), \bar{P}_i(\xi, \psi, \eta, t) (i = 0, 1)$, $\bar{\Pi}_i(\xi, \psi, \eta, t), \bar{P}_i(\xi, \psi, \eta, t) (i = \bar{0}, \bar{2})$, $\tilde{\Pi}_i(\varphi, \tilde{\mu}, \eta, t), \tilde{P}_i(\varphi, \tilde{\mu}, \eta, t)$, $\tilde{\Pi}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \tilde{\Pi}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \hat{\Pi}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ та $\tilde{P}_i(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{P}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \hat{P}_i(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t) (i = \hat{0}, \hat{3})$ знаходяться аналогічно, як у роботі [10].

3. Результати числових розрахунків

Наведемо результати числового експерименту для фільтра, обмеженого поверхнями: $f_1(x, y, z) = x - 1,25$; $f_2(x, y, z) = (x - 2,5466434)^2 + y^2 + z^2 - 0,1187841$, $f_3(x, y, z) = (x - 1,25)^2 + (y - 3,8471044)^2 + z^2 - 16,3627124$; $f_4(x, y, z) = (x - 1,25)^2 + z^2 + (y + 3,8471044)^2 + z^2 - 16,3627124$; $f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = [x(x - 2,5) + y^2 + z^2]^2 + 6,25y^2 - 36,4276695z^2$. Для такого фільтра характерна значна просторовість засипки, «монотонність звуження» в напрямку від входу до виходу фільтра (вибір саме такої форми «підказує» практика) та взаємна ортогональність граней уздовж ребер і в кутових точках (це суттєво для спрощення процедури побудови просторового конформного відображення). На основі праці [9] побудовано розрахункову

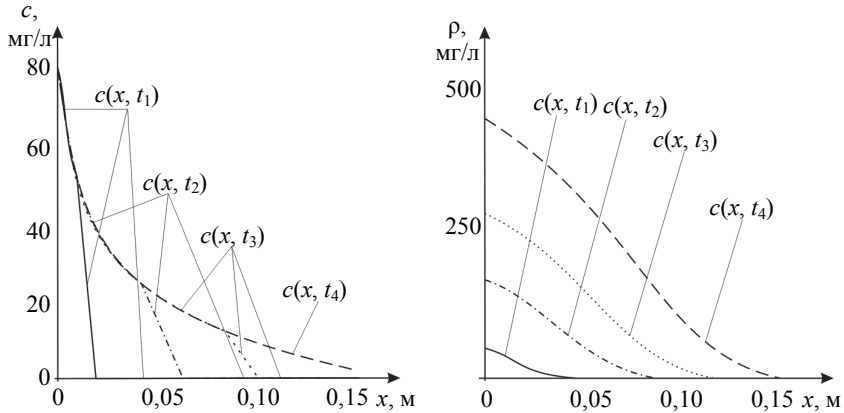


Рис. 2. Розподіл концентрації домішок у рідині та концентрації осаду вздовж фільтра під час очищення стічних вод металургійного виробництва в моменти часу $t_1 = 10$ год, $t_2 = 20$ год, $t_3 = 30$ год, $t_4 = 40$ год

динамічну сітку в G_z : $\varphi(x, y, z) = \overline{\varphi}_i = \varphi_* + \left[(\varphi^* - \varphi_*) i \right] / n$, $i = \overline{0, n}$, $\psi(x, y, z) = \overline{\psi}_j = (Q_* j) / m$, $j = \overline{0, m}$, $\eta(x, y, z) = \overline{\eta}_k = (Q^* k) / l$, $k = \overline{0, l}$ для $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 8000$, $\kappa = 1$, $n = 30$, $m = 16$, $l = 16$ (параметри n , m і l вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної), знайдено фільтраційну витрату $Q = 0,651$, обчислено величини швидкості фільтрації $|v|$ та функцій $b_i(\varphi, \psi, \eta)$, $d_i(\varphi, \psi, \eta)$ ($i = 1, 2$). При цьому нев'язки розрахованих конструкцій не перевищують 0,001 [10].

На рис. 2 показано розподіл концентрації $c(\varphi, \psi, \eta, t)$ та $\rho(\varphi, \psi, \eta, t)$ вздовж ліній течії для випадку однокомпонентного забруднення для $c_*(t) = 80$ мг/л, $L = 0,15$ м, $v = 250$ м/год, $\beta_0 = 18 \cdot 10^{-9}$ м²/с, $k_1 = k_2 = 1$, $\alpha_0 = 0,64 \cdot 10^{-12}$ м²/с, $\alpha_* = 0,34$, $\sigma_0 = 0,5$; $\sigma_* = 1$; $b = b_* = 1$; $\varepsilon = 0,001$ [10]. За заданих на виході фільтра ($x = 0,15$) допустимих значень концентрації $c = c_{кр} = 10$ мг/л, знайдемо час його захисної дії: $t = \tau_3 = 35$ год. При цьому фільтр накопичить 1020 г осаду.

На рис. 3 ($c_{1,0}^0(\varphi, \psi, \eta) = 170 \exp(-\varphi^2)$ мг/л; $c_{2,0}^0(\varphi, \psi, \eta) = 35 \exp(-\varphi^2)$ мг/л; $c_1^*(\psi, \eta, t) = 170$ мг/л; $c_2^*(\psi, \eta, t) = 35$ мг/л; $\rho_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 0$; $\beta_1 = 0,7 \cdot 10^{-9}$ с⁻¹; $\alpha_1 = 0,35$ с⁻¹; $\beta_2 = 0,2 \cdot 10^{-9}$ с⁻¹; $\alpha_2 = 0,1$ с⁻¹; $\sigma_0 = 0,5$; $\sigma_* = 1$; $\varepsilon = 0,001$) подані дані, отримані в результаті натурних експериментів (відповідає індексу «exp») відповідно до класичної моделі Мінца (відповідає індексу «M») [13] і розраховані за формулами (4) (відповідає індексу «p»). Розрахунки за формулами (4) більш

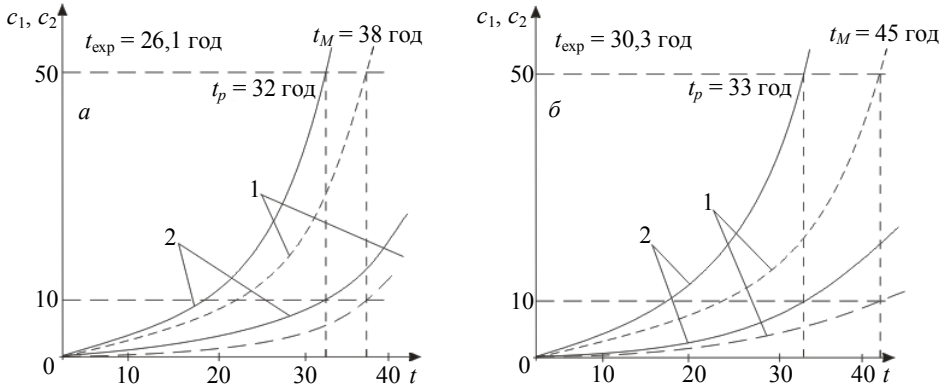


Рис. 3. Залежність концентрації домішок на виході фільтра упродовж часу захисної дії: 1 — за Мінцом (пунктир); 2 — за формулами (4) для $d = 0,78$ мм, $v = 10$ м/год (а) і $d = 0,78$ мм, $v = 9$ м/год (б)

точні порівняно із класичною моделлю Мінца. Отримані результати дають можливість розраховувати динаміку просування концентрації забруднення й осідання уздовж фільтра (рис. 4).

Висновки. У роботі сформовано просторову математичну модель, яка враховує зворотний вплив визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну і т. ін.) під час моделювання процесів очищення рідин від багатоконпонентних забруднень сорбційними фільтрами.

Запропоновано алгоритм розв'язання відповідної модельної задачі. Наведено результати розрахунків розподілу концентрації домішок і масового об'єму домішок по висоті фільтруючого пористого завантаження для різних моментів часу,

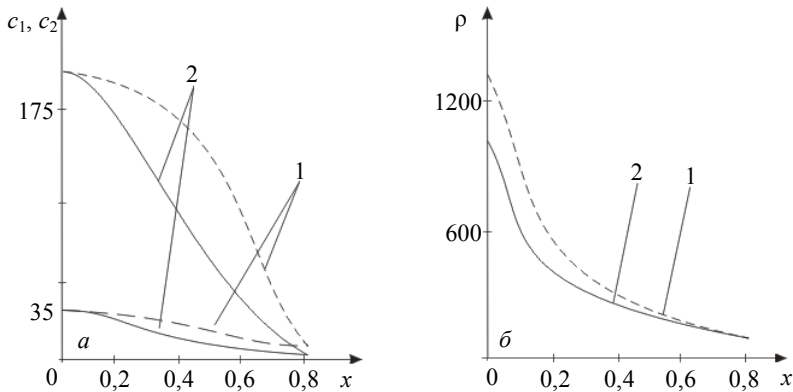


Рис. 4. Розподіл концентрації домішок (а) й осаду (б) уздовж фільтра в момент часу $t = 26$ год: 1 — за Мінцом (пунктир); 2 — за формулах (4) для $d = 0,78$ мм, $v = 10$ м/год

величини коефіцієнта фільтрування за різних значень швидкості фільтрування, і характеристик завантаження фільтра для сорбційних фільтрів з урахуванням зворотного впливу концентрації осаду на характеристики середовища та швидкість фільтрування. Проведено порівняльну характеристику даних, отриманих експериментальним шляхом, розрахованих на основі класичної моделі Мінца й отриманих нами в результаті розрахунків (зокрема, згідно з даними, наведеними на рис. 3, 4, бачимо, що точність проведених нами розрахунків є суттєво вищою порівняно з розрахунками, отриманими відповідно до класичної моделі Мінца).

Література

- [1] *Elimelech M.* Predicting collision efficiencies of colloidal particles in porous media // *Water Research*. — 1992. — Vol. 26(1). — P. 1-8.
- [2] *Elimelech M.* Particle deposition on ideal collectors from dilute flowing suspensions: Mathematical formulation, numerical solution and simulations // *Separations Technology*. — 1994. — Vol. 4. — P. 186-212.
- [3] *Jegatheesan V.* Effect of surface chemistry in the transient stages of deep bed filtration. — PhD Dissertation, University of Technology Sydney, 1999. — 300 p.
- [4] *Johnson P. R.* Dynamics of colloid deposition in porous media: Blocking based on random sequential adsorption // *Langmuir*, 1995. — Vol. 11(3). — P. 801-812.
- [5] *Ison C. R.* Removal mechanisms in deep bed filtration // *Chem. Eng. Sci.* — 1969. — Vol. 24. — P. 717-729.
- [6] *Ives K. J.* Theory of filtration, special subject No 7 // *Int. Water Supply congress*. — Vienna, 1969.
- [7] *Ives K. J.* Rapid filtration // *Water Research*. — 1970. — Vol. 4(3). — P. 201-223.
- [8] Aggregation and Deposition of Engineered Nanomaterials in Aquatic Environments: Role of Physicochemical Interactions / *A. R. Petosa, D. P. Jaisi, I. R. Quevedo et al* // *Environmental Science & Technology*. — September 2010. — Vol. 44. — P. 6532-6549.
- [9] *Бомба А. Я., Барановський С. В., Присяжнюк І. М.* Нелінійні сингулярно-збурені задачі типу «конвекція – дифузія». — Рівне: Нац. унів. водн. госп-ва та природокористування, 2008. — 252 с.
- [10] Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних / *А. Я. Бомба, В. І. Гаврилюк, А. П. Сафоник, О. А. Фурсачик*. — Рівне: Нац. унів. водн. госп-ва та природокористування, 2011. — 276 с.
- [11] *Бурак Я. Й., Чапля С. Я., Чернуха О. Ю.* Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. — Київ: Наукова думка, 2006. — 272 с.
- [12] *Чапля С. Я., Чернуха О. Ю.* Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах // Київ: Наукова думка, 2009. — 302 с.
- [13] *Мици Д. М.* Теоретические основы технологии очистки воды. — Москва: Стройиздат, 1964. — 156 с.

Modelling of processes of liquids cleaning from multicomponent impurities in sorption filters

Andriy Bomba, Andriy Safonyk

Questions of the account of return influence of characteristics of the process (the concentration of fluid contamination and sediment) on the characteristics of the medium (porosity coefficient, filtration, diffusion, and mass transfer etc.) are considered and resolved at the simulation of processes of liquid cleaning from multicomponent impurities in sorption filters. An algorithm of numerical asymptotic approximation of solution of the corresponding model problems, which are described by systems of nonlinear singularly perturbed differential equations of the «convection-diffusion-mass transfer» is received. Relevant ratios (formulas) are effective for targeting the «performance»

(eg optimization) of the filtering of (namely, the protective effect of load time, filter size, etc.) theoretical investigations in the prevalence cases of convective and sorption compound corresponding process over diffuse and desorption that is observed in most filter systems. On this basis the corresponding computer experiment the results of which show the benefits of the proposed model compared with the classical is carried out.

О моделировании процессов очистки жидкостей от многокомпонентных загрязнений в сорбционных фильтрах

Андрей Бомба, Андрей Сафоник

Рассматриваются и решаются вопросы учета обратного влияния характеристик процесса (концентрации загрязнения жидкости и осадка) на характеристики среды (коэффициенты пористости, фильтрации, диффузии, массообмена и т. п.) при моделировании процессов очистки жидкости от многокомпонентных примесей в сорбционных фильтрах. Получен алгоритм численно-асимптотического приближения решения соответствующих модельных задач, которые описываются с помощью систем нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений типа «конвекция-диффузия-массообмен». Соответствующие соотношения являются эффективными для проведения нацеленных на «производительность» фильтрования теоретических исследований в случаях преобладания конвективных и сорбционных составляющих соответствующего процесса над диффузными и десорбционными, что имеет место в подавляющем большинстве фильтрующих установок. На этой основе проведен соответствующий компьютерный эксперимент, результаты которого показывают преимущества предложенной модели по сравнению с классическими.

Представлено профессором Т. Нагірним

Отримано 01.11.12