

Моделювання неідеальних умов теплового контакту теплопровідних шарів

Богдан Гера

Д. т. н., професор, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів; 79005; Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, Львівська філія, вул. І. Блажкевич, 12а, Львів, e-mail: gera@cmm.lviv.ua

Використовуючи методику моделювання теплообміну між частинами тіла через тонке проміжне включення, записано умови неідеального теплового контакту на внутрішніх поверхнях неоднорідного шару. Наведено постановку та досліджено особливості розв'язку задачі теплопровідності з неідеальними умовами теплообміну, викликаними застосуванням модельованого значення контактного термічного опору. Досліджено відхилення розрахункового контактного термоопору від його реальних значень, отриманих як відношення перепаду температури на контактних поверхнях до густини теплового потоку.

Ключові слова: неідеальні умови теплообміну, контактний термічний опір, шарувата структура, стрибок температури.

Вступ. Останнім часом зріс інтерес до шаруватих матеріалів, що дозволяють покращити експлуатаційні властивості конструкцій, ефективно використовувати традиційні та нові матеріали.

Експериментально встановлено, що теплопередача у тілі, складеному із з'єднаних шарів, відрізняється від теплопередачі у суцільному тілі. Це пояснюється особливостями теплообміну між шарами, що залежать від способу утворення контакту. Огляд літератури останніх років із визначення умов теплового контакту твердих тіл наведено у роботі [1].

Хоча під час розв'язання задач теплопровідності для контактуючих шарів досить часто формулюють ідеальні умови теплообміну між ними, що зводяться до рівності теплових потоків і температур на границі між шарами, реальні умови, як показали експерименти, можуть виявитися такими, що спостерігається помітна зміна температури з переходом від одного шару до іншого. У певному наближенні для моделювання контактного теплообміну можна вважати, що з переходом через границю контакту температура змінюється стрибкоподібно. Для інтерпретації отримуваних умов і визначення параметрів теплообміну важливо встановити механізм виникнення особливостей теплообміну.

Один із підходів до моделювання неідеальних умов теплообміну між теплопровідними шарами та пояснення введення стрибка температури наведено в роботах [2, 3]. Розглядається випадок, коли шари контактують через тонке включення, тоді умови неідеального контакту отримують у разі спрямування до нуля

товщини проміжного шару, зберігаючи при цьому його вплив на передачу тепла, що досягається введенням додаткового параметра — термічного контактного опору. Контактний термічний опір виникає, якщо проміжний шар створює теплоізолюючий ефект і значення його теплових характеристик, зокрема теплопровідності, суттєво відрізняються від характеристик контактуючих шарів.

Умови неідеального теплового контакту використовуються в низці робіт, які стосуються вивчення теплових процесів у тілах шаруватої структури [4-6]. Для практичного використання отриманих при цьому результатів потрібно встановити, яке значення матиме коефіцієнт контактної теплоопору та як він залежить від способу з'єднання шарів. Відповіді на ці питання можна отримати з аналізу розв'язків обернених задач теплопровідності з використанням експериментальних даних [6, 7]. Проте застосовність отриманих значень параметрів для інших типів задач потребує додаткового обґрунтування.

У цій роботі з використанням розв'язку задачі теплопровідності для контактуючих шарів через тонкий прошарок отримано умови неідеального теплообміну між шарами та запропоновано їх інтерпретацію з використанням характеристик проміжного прошарку. Показано, що в перехідному режимі перепад температури та потік тепла на границі контакту шарів змінюються непропорційно, і таким чином контактний термічний опір змінюється в процесі нагрівання.

1. Теплопровідність у різнокомпонентному шарі з тонким включенням

Утворення кусково-неоднорідного тіла з частин, що мають різні теплофізичні характеристики, призводить до наявності внутрішніх поверхонь розділу між його складниками. Залежно від технології з'єднання характеристики матеріалу в околі поверхні контакту можуть відрізнятися від тих, які залишаються поза межами цієї області. Під час математичного моделювання процесу теплопровідності у кусково-неоднорідному тілі, якщо існує вплив внутрішньої поверхні розділу на процес передачі тепла між частинами тіла, його враховують, записуючи відповідні умови теплового обміну на цій поверхні.

Один із можливих підходів до математичного опису процесу теплопровідності у шарі товщини L (рис. 1), що складається з двох шарів — ① і ②, є виділення тонкого прошарку, який відіграє роль тонкого включення товщини $h = z_2 - z_1$, позначеного тут як ③, через яке відбувається тепловий обмін між основними частинами шару. Параметри шорсткості, хвилястості поверхонь і спосіб з'єднання шарів призводять до того, що поблизу границі відбувається «збурення матеріалу» та теплофізичні характеристики прошарку стають відмінними від відповідних характеристик

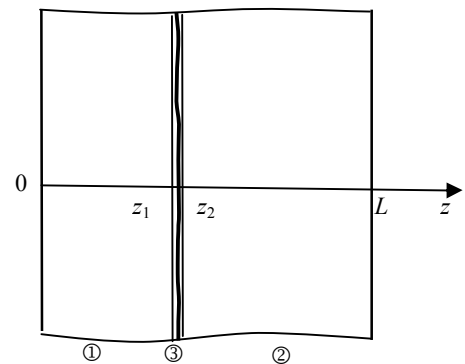


Рис. 1. Виділення тонкого прошарку між шарами поблизу поверхні їх контакту

основних шарів. Товщину цього прошарку можна оцінювати лише у кожному окремому випадку з'єднання, вдаючись також до його вимірювань. Коефіцієнти теплопровідності та теплоємності шарів ①, ② позначатимемо як λ_1, c_1 і λ_2, c_2 , а прошарку ③ — λ_3, c_3 . На границях $z = z_1$ і $z = z_2$ (рис. 1) приймаємо умови ідеального теплового контакту.

Для виявлення впливу на функцію температури шару включення з іншого матеріалу, проведемо її обчислення, виходячи з розв'язку задачі теплопровідності для шару з включенням. Рівняння теплопровідності з кусково-постійними функціями теплоємності $c(z)$ і теплопровідності $\lambda(z)$ запишемо у вигляді

$$c(z) \frac{\partial t(z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(z) \frac{\partial t(z, \tau)}{\partial z} \right), \quad 0 < z < L, \quad \tau > 0. \quad (1)$$

Початкова умова задає розподіл температури в тілі

$$t(z, 0) = f_0(z). \quad (2)$$

На зовнішніх границях $z = z_1$ і $z = L$ відомі значення температури

$$t(0, \tau) = t_0, \quad t(L, \tau) = t_L. \quad (3)$$

На внутрішніх границях $z = z_1$ і $z = z_2$ приймаємо умови ідеального теплового контакту — рівність потоків тепла та температур з обох боків

$$\lambda_1 \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=z_1-0} = \lambda_3 \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=z_1+0}, \quad t(z_1 - 0, \tau) = t(z_1 + 0, \tau), \quad (4)$$

$$\lambda_3 \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=z_2-0} = \lambda_2 \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=z_2+0}, \quad t(z_2 - 0, \tau) = t(z_2 + 0, \tau). \quad (5)$$

Розв'язок контактної-крайової задачі теплопровідності (1)-(5) отримується розвиненням функції температури в ряд [8]. Проведемо, за отриманими таким чином розрахунковими формулами, обчислення температури, якщо на границі $z = 0$ шару підтримується постійна температура t_0 , а на границі $z = L$ температура дорівнює $t_L = 0$. Початковий розподіл температури $t(z, 0) = 0$. На рис. 2 показано зміну температури за товщиною шару у задані моменти часу. При цьому параметри шару $L = 0,025$; $z_1 = 0,01$; $z_2 = 0,0105$, а коефіцієнти теплопровідності та теплоємності приймалися такими: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,8$; $\lambda_3 = 0,1 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$; $c_1 = c_2 = 1,5 \cdot 10^6$; $c_3 = 2 \cdot 10^6 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$.

Як показано на рисунку, оскільки включення створює теплоізоляційний ефект, отримуємо значну зміну температури на малих відстанях. При цьому у проміжному шарі графіки функції температури у розглянуті моменти часу

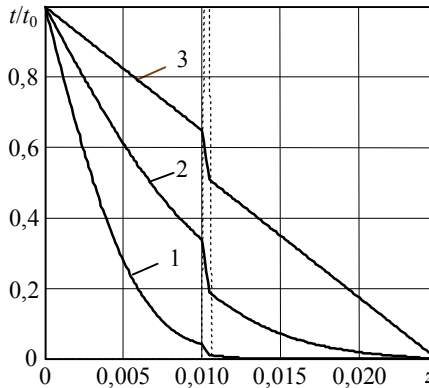


Рис. 2. Зміна температури за товщиною шару із включенням. Криві 1-3 відповідають моментам часу $\tau = 20; 80; 400$ с

близькі до лінійних. Можна також переконалися, що у випадку, якщо коефіцієнт теплопровідності внутрішнього прошарку співмірний чи більший порівняно з відповідними коефіцієнтами основних шарів, перепаду температури в ньому практично не буде.

2. Задача теплопровідності з неідеальними умовами теплообміну

У випадку теплообміну між шарами через тонкий прошарок для спрощення розв'язку й обчислень зміну температури у прошарку вважають лінійною за товщиною [3]. Таку ж зміну температури приймають у задачах теплопровідності для тонких пластин і оболонок [3]. Тоді температуру включення можна подати у вигляді

$$t_3(z', \tau) = T_1(\tau) + \frac{z'}{h} T_2(\tau), \quad (6)$$

де $T_1(\tau)$ та $T_2(\tau)$ — середня температура та приведений температурний момент прошарку, $T_1(\tau) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} t_3(z, \tau) dz$, $T_2(\tau) = \frac{12}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} t_3(z, \tau) z dz$, $h = z_2 - z_1$, $z' = z - (z_1 + z_2)/2$.

Між шарами ①, ③ та ②, ③ умови теплообміну приймалися ідеальними. Згідно з (4), (5), отримуємо зв'язки між функціями температури $t_1(z, \tau)$ в шарі ①, $t_2(z, \tau)$ в шарі ②, $T_1(\tau)$ та $T_2(\tau)$.

Для $z = z_1$:

$$t_1(z_1, \tau) = T_1(\tau) - \frac{1}{2} T_2(\tau); \quad \lambda_1 \left. \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \right|_{z=z_1} = \frac{\lambda_3}{h} T_2(\tau). \quad (7)$$

Для $z = z_2$:

$$t_2(z_2, \tau) = T_1(\tau) + \frac{1}{2}T_2(\tau); \quad \lambda_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = \frac{\lambda_3}{h} T_2(\tau). \quad (8)$$

З чотирьох умов (7), (8) виключимо $T_1(\tau)$ і $T_2(\tau)$. Відзначимо, що $T_2(\tau) = t_2(z_2, \tau) - t_1(z_1, \tau)$. Окрім того позначимо через R відношення коефіцієнта теплопровідності до товщини прошарку $R = h/\lambda_3$ й отримаємо дві умови

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = \frac{1}{R} (t_2(z_2, \tau) - t_1(z_1, \tau)), \quad (9)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = \lambda_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_2}. \quad (10)$$

Умови теплообміну (9), (10) замикають задачі теплопровідності для шарів ①, ②. Функції температури $t_1(z, \tau)$ і $t_2(z, \tau)$ у відповідних областях можна отримати, не визначаючи температури у тонкому прошарку. Вплив прошарку на температурне поле враховується через коефіцієнт R в умові (9), який називають контактним термічним опором [1]. Якщо відсутні інші фактори впливу контакту, то згідно з умовою (9) отримаємо перепад температури на внутрішніх поверхнях, пропорційний потокові тепла та R . Потік тепла за такої постановки задачі залишається неперервним.

Якщо товщину шару $[z_1, z_2]$ спрямувати до нуля ($z_1 \rightarrow z_*$, $z_2 \rightarrow z_*$, $z_* \in [z_1, z_2]$), фіксуючи його дію на поширення тепла, то умови (9), (10), записані для $z = z_*$, в публікаціях називаються умовами неідеального теплового контакту. Вони дають можливість замкнути задачі теплопровідності для шарів ① і ②. При цьому в математичній моделі прошарок ③ не фігурує та функція температури в ньому не визначається. Це відповідає випадкові, коли $h \rightarrow 0$, а контактний термоопір між шарами зберігається.

Задача теплопровідності у шарі товщини L , що складається з двох шарів $0 \leq z < z_*$ та $z_* < z \leq L$ з відмінними характеристиками за неідеальних умов контакту між ними, якщо $z = z_*$ записується у вигляді:

рівняння теплопровідності

$$c_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial \tau} = \lambda_1 \frac{\partial^2 t_1(z, \tau)}{\partial z^2}, \quad 0 < z < z_*, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$c_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial \tau} = \lambda_2 \frac{\partial^2 t_2(z, \tau)}{\partial z^2}, \quad z_* < z < L, \quad t > 0; \quad (12)$$

зовнішні граничні умови

$$t_1(0, \tau) = t_0(\tau), \quad t_2(L, \tau) = t_L(\tau); \quad (13)$$

умови теплового контакту

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \right|_{z=z_*} = \frac{1}{R} (t_2(z_*, \tau) - t_1(z_*, \tau)); \quad (14)$$

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \right|_{z=z_*} = \lambda_2 \left. \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \right|_{z=z_*}; \quad (15)$$

початкові умови

$$t_1(z, 0) = f_{10}(z), \quad t_2(z, 0) = f_{20}(z). \quad (16)$$

У розв'язку такої задачі теплопровідності у разі забезпечення умови (14) буде стрибок функції температури, якщо $z = z_*$. Величина стрибка пропорційна потоку тепла з коефіцієнтом R . На рис. 3 наведено функцію температури як розв'язок задачі теплопровідності (11)-(16). Теплофізичні характеристики шарів $\lambda_1, \lambda_2, c_1, c_2$ такі ж, як і у попередньому прикладі, $L = 0,025$, а $z_* = 0,01025$.

Як показано на рисунку, поведінка функції температури у разі заміни ідеальних умов контакту на неідеальні з виключенням із розгляду прошарку контакту має за малих часів локальні збурення (зубчатість), які відсутні у разі більш точного моделювання процесу теплопровідності у тришаровій моделі. Цей ефект виникає внаслідок невідповідності стрибка функції температури, що отримуємо з розв'язку (11)-(16) із постійним коефіцієнтом R в умові (14), значення якого знайдено за припущень, які спрощують задачу. Саме цей коефіцієнт зрівноважує стрибок температури та тепловий потік на границі контакту шарів. На такі особливості моделі неідеального теплового контакту слід також зважати під час їх застосування до тіл складної форми, а також у разі застосування для цих задач обчислювальних методів, оскільки потрібно враховувати також наявність похибок обчислень, а не лише методу моделювання.

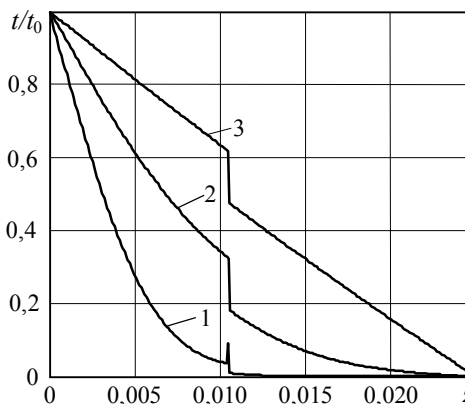


Рис. 3. Зміна температури за товщиною з неідеальними умовами теплообміну між шарами. Криві 1-3 відповідають моментам часу $\tau = 20; 80; 400$ с

3. Змінний контактний термічний опір в умовах неідеального теплообміну

Приймаючи, що в умові (14) неідеального теплового контакту шарів значення R наближено дорівнює h/λ , можна цей коефіцієнт, переважно невідомий для обчислень у технічних застосуваннях, оцінити через вимірювані товщину збуреного прошарку матеріалу та коефіцієнт його теплопровідності λ . Проте у кожному практичному застосуванні правомірність вживання такої наближеної умови потребує додаткових досліджень. Одна з можливих перевірок — співставлення розв'язків задач теплопровідності для шарів із тонким включенням і з неідеальними умовами внутрішнього теплообміну. Розв'язок задачі (1)-(5) можна також використати для обчислення втрати температурного напору в контактуючих тілах, тобто визначення відношення перепаду температури на границях включення до теплового потоку й оцінки R за формулою

$$R = (t_2(z_2, \tau) - t_1(z_1, \tau)) \left(\lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_1} \right)^{-1}. \quad (17)$$

Визначимо R з умови (17) як функцію часу, приймаючи під час розрахунків розв'язку задачі (1)-(5) параметри та характеристики шарів такими ж, як і під час побудови рис. 2. На рис. 4 наведено зміну R у процесі нагрівання шару з поверхні $z = 0$, якщо початкова температура дорівнювала нулю. Криві 1, 2 відповідають різній товщині прошарку, через який контактують шари. При цьому теплопровідність прошарку в обох випадках відрізняється так, що втрата температурного напору за наближення до стаціонарного режиму однакова, і $R \rightarrow h/\lambda$. Якщо нагрівання шару уповільнюється, то отримана раніше оцінка контактної термоопору прийнятна. Проте в перехідному режимі, R може мати значно менші значення. Постійний коефіцієнт в умовах (14) призводить до завищеного значення стрибка температури. Тому для розглянутого раніше прикладу в задачі з неідеальними

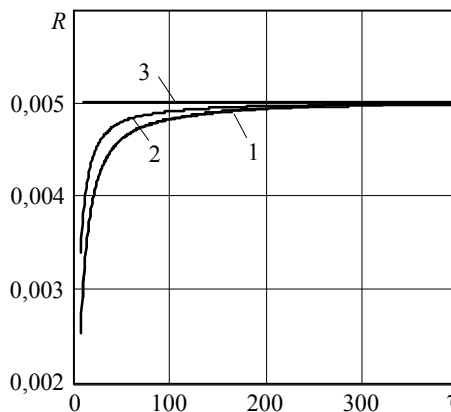


Рис. 4. Зміна контактної термоопору в процесі нагрівання.

Товщина прошарку $h = 0,0005$ м — крива 1,
 $h = 0,0002$ м — крива 2, граничне значення $R = h/\lambda_3$ — 3

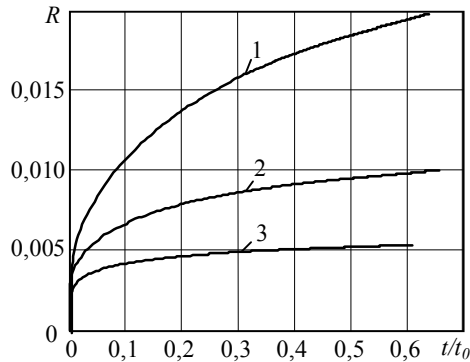


Рис. 5. Залежність між контактним термоопором і температурою $t = t_1(z_1, \tau)$. Криві 1-3 отримані за таких значень коефіцієнта теплопровідності $\lambda_3 = 0,05; 0,1; 0,2$ Вт/(м·К) відповідно

умовами теплового контакту за малих часів появився зубець у графіку температури (рис. 3, крива 1).

Оскільки в розглянутому прикладі нагрівання температура з часом зростає, то термічний опір можна також отримати залежно від температури. На рис. 5 наведено графіки термічного опору для різних величин теплопровідності включення та залежно від температури на межі контакту $t = t_1(z_1, t)$. Під час обчислень прийнято такі геометричні параметри шару $L = 0,025$ м; $z_1 = 0,011$ м; $z_2 = 0,012$ м, а значення коефіцієнтів теплопровідності та теплоємності основних шарів такі ж, як і раніше.

Контактний термічний опір може залежати від багатьох факторів, які не враховує його наближена оцінка, а також може змінюватися вздовж границі контакту, його значення не можна однозначно прив'язати до характеристик контактуючих частин тіла чи стану їхніх поверхонь. Для перевірки умов неідеального теплового контакту у кожному практичному застосуванні доцільно узгоджувати характеристики контактних умов (14), (15) із значеннями перепадів функції температури та потоками тепла під час переходу від шару з одними характеристиками до шару з іншими характеристиками, використовуючи просту математичну модель теплопровідності шарів, які контактують через тонке включення.

Висновки. Утворення між контактуючими частинами шаруватого тіла тонкого прошарку збуреного матеріалу, характеристики якого можуть суттєво відрізнятись від характеристик основних шарів, призводить до стрибкоподібного вигляду функції температури на границі контакту. Для використання неідеальних умов теплового контакту між частинами шаруватого тіла термічний опір, що входить у ці умови, потрібно узгоджувати з узагальненими теплофізичними характеристиками та параметрами тонкого проміжного прошарку, через який відбувається контакт і теплообмін між частинами тіла.

Література

- [1] Меснянкін С. Ю., Викулов А. Г., Викулов Д. Г. Современный взгляд на проблемы теплового контактирования твердых тел // Успехи физических наук. — 2009. — Т. 179, № 9. — С. 495-970.
- [2] Подстригач Я. С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя // Инженерно-физический журнал. — 1963. — Т. 6, № 10. — С. 129-136.
- [3] Підстригач Я. С. Вибрані праці. — Київ: Наукова думка, 1995. — 460 с.
- [4] Веселовский В. Б. Контактное термическое сопротивление в элементах конструкций; в кн.: Гидродинамика и процессы теплообмена. — Киев: Наукова думка, 1986. — С. 120-125.
- [5] Веселовский В. Б., Берлов А. В. Температурные поля многослойных элементов конструкций при воздействии полей различной физической природы // Metallurgicheskaya teplotekhnika. — 2009. — Вып. 1(16). — С. 21-33.
- [6] Біляєва В. В., Берлов О. В., Клім В. Ю. Визначення параметрів теплообміну багатшарових елементів конструкцій // Харків: НТУ «ХПІ». — 2012. — № 8. — С. 154-163.
- [7] Контактное термическое сопротивление в элементах конструкций / В. Б. Веселовский, А. В. Островская, В. И. Ляшенко и др. // Инженерно-физический журнал. — 2001. — Т. 3. — С. 91-98.
- [8] Гера Б., Чапля С., Чернуха О. Дифузія у тришаровій смузі з урахуванням стрибків функції концентрації домішкової речовини на внутрішніх поверхнях контакту // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2010. — Вып. 12. — С. 61-98.

Modelling nonideal conditions of thermal contact of heat-conducting layers

Bohdan Gera

With employment of modelling technique of heat interchange between body elements over thin intermediate inclusion conditions of nonideal thermal contact on the internal borders of the compound layer is written down. Particular qualities of thermal conductivity problem with nonideal heat transfer conditions caused by application of modelling value of the contact thermal resistance is investigated. Deviation of calculation mean of the contact thermal resistance from its concrete value obtained as a rate of temperature difference on the contact surfaces to density of thermal flux is studied.

Моделирование неидеальных условий теплового контакта теплопроводных слоев

Богдан Гера

Используя методику моделирования теплообмена между частями тела через тонкое промежуточное включение, записаны условия неидеального теплового контакта на внутренних поверхностях неоднородного слоя. Приведена постановка и исследованы особенности решения задачи теплопроводности с неидеальными условиями теплообмена, и отмечены особенности этого решения с применением моделированного значения контактного термического сопротивления. Исследовано отклонение расчетного контактного термического сопротивления от его реальных значений полученных как отношение перепада температуры на контактных поверхностях к плотности теплового потока. Для использования неидеальных условий теплового контакта между частями слоистого тела термическое сопротивление, присутствующее в этих условиях, следует согласовывать с обобщенными теплофизическими характеристиками и параметрами тонкой промежуточной прослойки, через которую осуществляется контакт и происходит теплообмен между частями тела.

Отримано 12.11.12