УДК 539.3

До опису впливу локального зміщення маси на зсувні напруження

Ольга Грицина

К. ф.-м. н., с. н. с., ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3*б*, Львів, 79060;
Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: gryt@cmm.lviv.ua

З використанням методів механіки суцільного середовища та нерівноважної термодинаміки сформульовано повну систему співвідношень нелокальної (градієнтного типу) теорії термопружності, що враховує вплив локального зміщення маси на зсувні напруження. За ізотермічного наближення для ізотропних матеріалів отримано відповідну лінійну розв'язувальну систему рівнянь. Проведено порівняння визначальних співвідношень моделі з рівняннями стану градієнтної теорії пружності Айфантіса-Ру.

Ключові слова: градієнтна теорія термопружності, взаємозв'язані процеси, тензор локального зміщення маси, тензор густини наведеної маси.

Вступ. Широке використання у сучасних технологіях наноматеріалів і наноструктур стимулювало побудову узагальнених (нелокальних) континуального типу моделей деформівних тіл. Побудова таких моделей мала, зокрема, за мету врахування впливу масштабного чинника на аномальні властивості нанооб'єктів. Для врахування такого впливу ряд авторів замість закону Гука, який пов'язує лінійним зв'язком тензори деформації та напружень, формально закладають інтегральний [1, 2] або диференціальний [3-6] зв'язок між цими тензорами. Для градієнтної теорії пружності Міндліна [4] характерне врахування у розвиненні пружної енергії деформації других градієнтів тензора деформації. Частковим випадком градієнтної теорії пружності Міндліна є градієнтна теорія пружності Айфантіса-Ру [5, 7], яка ґрунтується на постулюванні такого нелокального зв'язку між тензорами напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ і деформації $\hat{\boldsymbol{e}}$

$$\left(1-\tilde{c}_1\Delta\right)\hat{\boldsymbol{\sigma}}=\left(1-\tilde{c}_2\Delta\right)\left(2\mu\hat{\boldsymbol{e}}+\lambda e\hat{\mathbf{I}}\right). \tag{1}$$

Тут λ, μ — сталі Ляме; $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$ — градієнтні коефіцієнти; Δ — оператор Лапласа. Прийнявши у виразі (1) $\tilde{c}_1=0$ одержимо визначальні співвідношення теорії Айфантіса [6]. Випадок $\tilde{c}_1=0$ і $\tilde{c}_2=0$ відповідає класичному закону Гука [8]. Згадані теорії дозволили, зокрема, у межах континуального опису уникнути особливостей у розподілі полів деформації та напружень в околі тріщин, на лініях дефектів (дислокацій, дисклінацій) тощо [7].

Інший підхід до побудови нелокальних теорій ґрунтується на прийнятті до розгляду процесу локального зміщення маси (див. оглядові роботи [9, 10]). При цьому враховується той факт, що на поверхнях та у вузьких приповерхневих областях деформівних твердих тіл атомні шари зазнають зміщень, на відміну від їх регулярного розташування вглибині тіла. З віддаленням від поверхні таке зміщення швидко заникає. За врахування процесу локального зміщення маси у працях [11, 12] було отримано систему співвідношень локально градієнтної термомеханіки. Автори згаданих досліджень нехтували конвективним складником похідної за часом, а процес локального зміщення маси пов'язували з вектором локального зміщення маси $\mathbf{\Pi}_m$ і хімічним потенціалом μ [11]. Випадок, коли ці величини є тензорами третього та другого рангів, розглянуто у роботі [12].

У працях [13, 14] підхід до побудови нелокальних теорій, що ґрунтується на врахуванні локального зміщення маси, було узагальнено. З огляду на те, що локальне зміщення маси не пов'язане з конвекцією та дифузією, то для опису цього процесу було введено відповідні параметри: питомий вектор локального зміщення маси $\boldsymbol{\pi}_m$, питому густину наведеної маси ρ_m і потенціал μ_π. Останній означено як міру впливу процесу локального зміщення маси на внутрішню енергію. За такого модельного опису лінійні рівняння стану для ізотропного середовища мають вигляд [13]

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 2G\hat{\boldsymbol{e}} + \left[\left(K - \frac{2}{3}G\right)e - K\alpha_T\theta - K_{\rho e}\,\rho_m\right]\hat{\mathbf{I}}\,, \tag{2}$$

$$s = s_0 + \frac{C_V}{T_0}\theta + \frac{1}{\rho_0}K\alpha_T e + \beta^{T\rho}\rho_m\,, \tag{3}$$

$$\mu'_\pi - \mu_{\pi 0} = K_\rho \rho_m - \beta^{T\rho}\theta - \frac{K_{\rho e}}{\rho_0}e\,, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\pi}_m = -\chi_m \nabla \mu'_\pi\,. \tag{5}$$

Тут $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$ і $\hat{\boldsymbol{e}}$ — тензори напружень і деформації; $e = \hat{\boldsymbol{e}} : \hat{\mathbf{I}}$; $\hat{\mathbf{I}}$ — одиничний тензор; s та s_0 — питома ентропія та її значення у вихідному стані; $\theta = T - T_0$ — приріст температури; ρ_0 — густина маси тіла у вихідному стані; $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$; μ — хімічний потенціал; $\mu_{\pi 0}$ — значення потенціалу μ'_π у вихідному стані; K і G — модулі пружності; C_V — питома теплоємність; α_T — температурний коефіцієнт об'ємного розширення за сталої питомої густини наведеної маси; $K_{\rho e} = K\alpha_\rho$, α_ρ — коефіцієнт об'ємного розширення, спричиненого локальним зміщенням маси за незмінної температури; $\beta^{T\rho}$ та K_ρ — ізотермо-ізохоричні коефіцієнти залежності ентропії та потенціалу μ'_π від питомої густини наведеної маси; ∇ — оператор Гамільтона. При цьому густина наведеної маси $\rho_{m\pi} = \rho\rho_m$ і вектор локального зміщення маси $\mathbf{\Pi}_m = \rho\boldsymbol{\pi}_m$ пов'язані формулою [14]

$$\rho_{m\pi} = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_m . \tag{6}$$

Тут крапка означає скалярний добуток.

У праці [15] було показано, що за такого опису локальне зміщення маси не є причиною виникнення зсувних напружень. Відтак дотичні напруження в ізотропному тілі можуть виникати лише як результат механічного руху. Пропоноване дослідження має за мету формулювання системи співвідношень нелокальної (градієнтного типу) моделі термопружного тіла, яка б враховувала вплив локального зміщення маси на зсувні напруження у матеріалах із високим рівнем симетрії включно. Для врахування такого впливу аналогічно до [11] приймемо, що параметри, пов'язані з локальним зміщенням маси, мають тензорний характер: густина наведеної маси та міра впливу локального зміщення маси на внутрішню енергію є тензорними величинами другого рангу.

1. Рівняння балансу маси

Розглянемо тіло, що займає область (V) евклідового простору й обмежене гладкою поверхнею (Σ) із зовнішньою нормаллю $\mathbf{n}$. Тіло перебуває під впливом зовнішньої механічної та температурної дії, внаслідок чого у ньому протікають механічні та теплові процеси, які супроводжуються також можливими змінами структури тіла у рамках його фізично малого елемента (локальним зміщенням маси).

Приймемо, що густина маси тіла характеризується симетричним тензором другого рангу $\hat{\rho}$, а потік маси $\hat{\mathbf{J}}_{m*}^{(3)}$ є тензором третього рангу [16]. Тоді узагальнене рівняння балансу маси в інтегральній формі запишемо так

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)} \hat{\rho}\, dV = -\oint\limits_{(\Sigma)} \hat{\mathbf{J}}_{m*}^{(3)} \cdot \mathbf{n} d\Sigma . \tag{7}$$

Тут і далі верхній індекс у дужках вказуватиме на ранг тензорної величини (біля тензорів нульового, першого та другого рангів ці індекси опускатимемо, а відзначатимемо лише тензорні величини третього та вищих рангів); t — час. Вважаємо, що тензор густини потоку маси $\hat{\mathbf{J}}_{m*}^{(3)}$ є сумою конвективного складника $\hat{\mathbf{J}}_{mc}^{(3)}$ та складника $\hat{\mathbf{J}}_{ms}^{(3)}$, пов'язаного з локальним зміщенням маси у рамках фізично малого елемента (частинки) тіла, тобто $\hat{\mathbf{J}}_{m*}^{(3)} = \hat{\mathbf{J}}_{mc}^{(3)} + \hat{\mathbf{J}}_{ms}^{(3)}$. Складник $\hat{\mathbf{J}}_{mc}^{(3)}$ означимо як діадний добуток вектора $\mathbf{v}_*$ швидкості конвективного перенесення фізично малого елемента тіла та тензора густини маси: $\hat{\mathbf{J}}_{mc}^{(3)} = \mathbf{v}_* \otimes \hat{\rho}$ [16] ($\otimes$ — діадний добуток). Якщо співвідношенням

$$\hat{\mathbf{\Pi}}^{m(3)} = \int\limits_0^t \hat{\mathbf{J}}_{ms}^{(3)}\, dt$$

ввести тензор локального зміщення маси $\hat{\mathbf{\Pi}}^{m(3)}$ так, що

$$\hat{\mathbf{J}}_{ms}^{(3)} = \frac{\partial \hat{\mathbf{\Pi}}^{m(3)}}{\partial t}, \tag{8}$$

то для густини потоку маси $\hat{\mathbf{J}}_{m*}^{(3)}$ отримаємо

$$\hat{\mathbf{J}}_{m*}^{(3)} = \mathbf{v}_* \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{\Pi}}^{m(3)}}{\partial t}. \tag{9}$$

З огляду на довільність області (V) з урахуванням теореми Остроградського-Гауса та формули (9), із інтегрального рівняння (7) одержимо рівняння балансу маси у локальній формі

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\mathbf{v}_* \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{\Pi}}^{m(3)}}{\partial t} \right). \tag{10}$$

Введемо у розгляд вектор $\mathbf{v}$ швидкості континуума центрів маси частинок тіла так, що справджується співвідношення

$$\mathbf{v} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{v}_* \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{\Pi}}^{m(3)}}{\partial t}. \tag{11}$$

За такого означення вектора швидкості $\mathbf{v}$ рівняння балансу маси (10) набуває вигляду

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{v})\hat{\boldsymbol{\rho}} = 0, \tag{12}$$

де $\frac{d\ldots}{dt} = \frac{\partial\ldots}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\ldots$ — оператор субстанціональної похідної за часом.

Означимо $\rho \equiv \hat{\boldsymbol{\rho}} : \hat{\mathbf{I}}$ — середню густину маси. Тоді, згорнувши рівняння (12), одержимо стандартний вигляд рівняння балансу маси

$$\frac{d\rho}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{v})\rho = 0. \tag{13}$$

2. Рівняння балансу ентропії

Швидкість зміни ентропії елемента тіла визначається притоком ентропії через його поверхню, виробництвом ентропії σ_s внаслідок необоротності процесів і дією розподілених джерел тепла потужності $\Re$. У локальній формі рівняння балансу ентропії запишемо так [8]:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q + \frac{1}{T}\mathbf{J}_q \cdot \nabla T + T\sigma_s + \rho\Re. \tag{14}$$

Тут T — абсолютна температура; $\mathbf{J}_q$ — вектор густини потоку тепла.

3. Рівняння балансу енергії

Приймаємо, що повна енергія системи у довільний момент часу є сумою внутрішньої ρu (u — питома внутрішня енергія) та кінетичної $\rho\mathbf{v}^2/2$ енергій і її зміна відбувається внаслідок: $\rho(u+\mathbf{v}^2/2)$ — конвективного перенесення енергії через поверхню; $\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{v}$ — потоку енергії, спричиненого роботою поверхневих зусиль; потоку тепла $\mathbf{J}_q$; потоку енергії $\hat{\mathbf{J}}_m^{(3)}:\hat{\boldsymbol{\mu}}$, пов'язаного з роботою, затраченою на перенесення частинок тіла відносно центра маси; потоку енергії $\dfrac{\partial\hat{\mathbf{\Pi}}^{m(3)}}{\partial t}:\hat{\boldsymbol{\mu}}^{\pi}$, пов'язаного з роботою, виконаною внаслідок локального зміщення маси; а також дії масових сил $\mathbf{F}$ і розподілених джерел тепла $\Re$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)}\left(\rho u+\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2\right)dV=-\oint\limits_{(\Sigma)}\left[\rho\left(u+\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)\mathbf{v}-\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{v}+\right.$$
$$\left.+\mathbf{J}_q+\hat{\mathbf{J}}_m^{(3)}:\hat{\boldsymbol{\mu}}+\frac{\partial\hat{\mathbf{\Pi}}^{m(3)}}{\partial t}:\hat{\boldsymbol{\mu}}^{\pi}\right]\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma+\int\limits_{(V)}\left(\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}+\rho\Re\right)dV\,. \quad (15)$$

Тут $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ та $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ — відповідно тензори напружень Коші та хімічного потенціалу; $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{\pi}$ — тензор другого рангу, компоненти якого характеризують зміну внутрішньої енергії системи, зумовлену локальним зміщенням маси; $\hat{\mathbf{J}}_m^{(3)}=(\mathbf{v}_*-\mathbf{v})\otimes\hat{\boldsymbol{\rho}}$ — потік маси, для якого на основі формули (11) можемо записати

$$\hat{\mathbf{J}}_m^{(3)}=-\frac{\partial\hat{\mathbf{\Pi}}^{m(3)}}{\partial t}\,. \quad (16)$$

Зазначимо, що потоки $\hat{\mathbf{J}}_m^{(3)}$ та $\hat{\mathbf{\Pi}}^{m(3)}$ — симетричні відносно двох правих індексів.

У локальній формі рівняння (15) набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u+\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2\right)=-\nabla\cdot\left[\rho\left(u+\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)\mathbf{v}-\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{v}+\right.$$
$$\left.+\mathbf{J}_q+\hat{\mathbf{J}}_m^{(3)}:\hat{\boldsymbol{\mu}}+\frac{\partial\hat{\mathbf{\Pi}}^{m(3)}}{\partial t}:\hat{\boldsymbol{\mu}}^{\pi}\right]+\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}+\rho\Re\,.$$

Перейшовши у лівій частині цього співвідношення до субстанціональних похідних за часом і врахувавши рівняння балансу маси (13), ентропії (14) і формулу (16), отримаємо таке рівняння балансу внутрішньої енергії

$$\rho\frac{du}{dt}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}:\left(\nabla\otimes\mathbf{v}\right)+\rho T\frac{ds}{dt}-\frac{\partial\left(\nabla\cdot\hat{\mathbf{\Pi}}^{m(3)}\right)}{\partial t}:\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}-\frac{\partial\hat{\mathbf{\Pi}}^{m(3)}}{\partial t}\overset{(3)}{\cdot}\hat{\mathbf{M}}^{(3)}-$$
$$-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}-T\sigma_s+\mathbf{v}\cdot\left(-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}+\rho\mathbf{F}\right). \quad (17)$$

Тут $\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} = \hat{\boldsymbol{\mu}}^{\pi} - \hat{\boldsymbol{\mu}}$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ — тензор хімічного потенціалу, а тензор третього рангу $\hat{\mathbf{M}}^{(3)} = \left(\nabla \otimes \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}\right)^{\mathrm{T}(1,3)}$ є ізомером тензора $\nabla \otimes \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}$, який утворений шляхом переставляння першого та третього базисних векторів. Крапка, як і раніше, означає згортання за парою індексів, а число у дужках над нею вказує на кількість таких згортань.

Співвідношенням

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}^{m\pi} = -\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)} \tag{18}$$

введемо у розгляд тензор густини наведеної маси. Зазначимо, що продиференціювавши формулу (18) за часом і врахувавши співвідношення (8), одержимо рівняння

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}^{m\pi}}{\partial t} + \nabla \cdot \hat{\mathbf{J}}^{(3)}_{ms} = 0\,, \tag{19}$$

яке, з огляду на його структуру та за аналогією до [15], назвемо рівнянням балансу наведеної маси.

Формулою $\rho_{m\pi} \equiv \hat{\boldsymbol{\rho}}^{m\pi} : \hat{\mathbf{I}} = \rho^{m\pi}_{kk}$ означимо середню густину наведеної маси. Введемо у розгляд також вектор $\boldsymbol{\Pi}_m \equiv \hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)} : \hat{\mathbf{I}}$ із компонентами Π^m_{ikk} (Π^m_{ijk} компоненти тензора $\hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)}$). Тоді, згорнувши співвідношення (18), одержимо формулу (6), яка пов'язує середню густину наведеної маси $\rho_{m\pi}$ та вектор $\boldsymbol{\Pi}_m$.

Якщо тепер у рівняння балансу енергії (17) підставити формулу (18), перейти до питомих величин

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} = \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)}, \qquad \hat{\boldsymbol{\rho}}^{m} = \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}^{m\pi} \tag{20}$$

та врахувати рівняння балансу маси (13), то рівнянню балансу внутрішньої енергії надамо вигляду

$$\begin{aligned} \rho\frac{du}{dt} &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \left(\nabla \otimes \mathbf{v}\right) + \rho T\frac{ds}{dt} + \rho\hat{\boldsymbol{\mu}}'_{\pi} : \frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}^m}{dt} - \rho\frac{d\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}}{dt} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\mathbf{M}}^{(3)} - \\ &- \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T} - T\sigma_s + \mathbf{v} \cdot \left(-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \rho\mathbf{F}_*\right), \end{aligned} \tag{21}$$

де

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \rho\left[\hat{\boldsymbol{\rho}}^m : \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} - \hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} \overset{(3)}{\cdot} \left(\nabla \otimes \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}\right)^{\mathrm{T}(1,3)}\right]\hat{\mathbf{I}}\,,$$

$$\mathbf{F}_* = \mathbf{F} + \hat{\boldsymbol{\rho}}^m : \left(\nabla \otimes \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}\right)^{\mathrm{T}(1,3)} - \hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} \overset{(3)}{\cdot} \left(\nabla \otimes \nabla \otimes \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}\right)^{\mathrm{T}(1,3)(2,4)}.$$

Тут верхній індекс T(1,3)(2,4) відзначає ізомер тензора четвертого рангу $\nabla\otimes\nabla\otimes\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}$, утворений шляхом переставляння першого та третього, а також другого та четвертого індексів.

4. Рівняння балансу імпульсу

Співвідношення (21) повинно задовольняти умові інваріантності відносно просторових трансляцій. Тому вимагаємо, щоб воно не змінилося внаслідок переміщення тіла як жорсткого цілого. Розглянемо, насамперед, рівномірний поступальний рух тіла, коли $\mathbf{v}\to\mathbf{v}+\mathbf{a}$, де $\mathbf{a}$ — довільний сталий вектор швидкості. Замінимо у співвідношенні (21) $\mathbf{v}$ на $\mathbf{v}+\mathbf{a}$ та від отриманого виразу віднімемо (21). У підсумку одержимо

$$\mathbf{a}\cdot\left(-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{*}+\rho\mathbf{F}_{*}\right)=0\,.$$

Отримана рівність повинна справджуватися для довільних сталих векторів $\mathbf{a}$, а це можливо лише за умови

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{*}+\rho\mathbf{F}_{*}\qquad\forall\mathbf{r}\in(V)\,. \tag{22}$$

Тут $\mathbf{r}$ — радіус вектор. Ми отримали рівняння балансу імпульсу механічного поступального руху. За врахування цього рівняння вираз (21) спроститься та набуде вигляду

$$\rho\frac{du}{dt}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{*}:(\nabla\otimes\mathbf{v})+\rho T\frac{ds}{dt}+\rho\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}:\frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}^{m}}{dt}-\rho\frac{d\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}}{dt}\overset{(3)}{\cdot}\hat{\mathbf{M}}^{(3)}-\mathbf{J}_{q}\cdot\frac{\nabla T}{T}-T\sigma_{s}\,. \tag{23}$$

5. Симетрія тензора напружень

Співвідношення (23) повинно виконуватися у разі повертання тіла як жорсткого цілого з постійною кутовою швидкістю $\boldsymbol{\Omega}$. Тому у виразі (23) замінимо $\mathbf{v}$ на $\mathbf{v}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}$ і врахуємо, що $\nabla\otimes(\mathbf{v}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})=\nabla\otimes\mathbf{v}-\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(3)}\cdot\boldsymbol{\Omega}$ ($\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(3)}$ — тензор Леві-Чивіта). Результатом такої заміни є співвідношення

$$\rho\frac{du}{dt}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{*}:\left(\nabla\otimes\mathbf{v}-\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(3)}\cdot\boldsymbol{\Omega}\right)+\rho T\frac{ds}{dt}+\rho\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}:\frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}^{m}}{dt}-\rho\frac{d\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}}{dt}\overset{(3)}{\cdot}\hat{\mathbf{M}}^{(3)}-$$
$$-\mathbf{J}_{q}\cdot\frac{\nabla T}{T}-T\sigma_{s}\,. \tag{24}$$

Віднявши вирази (23) та (24), одержимо: $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{*}:\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{(3)}\cdot\boldsymbol{\Omega}=0$. Ця рівність справджуватиметься для довільних сталих значень кутової швидкості $\boldsymbol{\Omega}$, якщо $\epsilon^{(3)}_{ijk}\,\sigma_{*\,jk}=0$.

Звідси маємо: $\sigma_{*jk} = \sigma_{*kj}$ (σ_{*jk} — компоненти тензора напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$). Отже $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$ — симетричний тензор.

Формулами

$$\hat{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{2}\left[\nabla \otimes \mathbf{u} + \left(\nabla \otimes \mathbf{u}\right)^{\mathrm{T}}\right], \quad \hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\left[\nabla \otimes \mathbf{u} - \left(\nabla \otimes \mathbf{u}\right)^{\mathrm{T}}\right] \tag{25}$$

введемо симетричний тензор деформації $\hat{\boldsymbol{e}}$ й антисиметричний тензор поворотів $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ ($\mathbf{u}$ — вектор переміщення, індекс «Т» означає операцію транспонування). Врахуємо, що $\nabla \otimes \mathbf{u} = \hat{\boldsymbol{e}} + \hat{\boldsymbol{\omega}}$. Оскільки $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \dfrac{d\hat{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = 0$, то рівняння балансу внутрішньої енергії (23) запишемо так

$$\rho \frac{du}{dt} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}}{dt} + \rho T \frac{ds}{dt} + \rho \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} : \frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}^m}{dt} - \rho \frac{d\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}}{dt} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\mathbf{M}}^{(3)} - \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T} - T\sigma_s . \tag{26}$$

6. Рівняння Гіббса та виробництво ентропії

Перейдемо до нової термодинамічної функції $f = u - Ts + \hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\mathbf{M}}^{(3)}$, де f — узагальнена вільна енергія Гельмгольца. Тоді з формули (26) отримаємо

$$\rho \frac{df}{dt} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}}{dt} - \rho s \frac{dT}{dt} + \rho \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} : \frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}^m}{dt} + \rho \hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} \overset{(3)}{\cdot} \frac{d\hat{\mathbf{M}}^{(3)}}{dt} - \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T} - T\sigma_s . \tag{27}$$

Приймемо, що вільна енергія визначається скалярним T та трьома тензорними параметрами $\hat{\boldsymbol{e}}$, $\hat{\boldsymbol{\rho}}^m$ і $\hat{\mathbf{M}}^{(3)}$, які є незалежними функціями. Тоді на основі (27) отримаємо узагальнене рівняння Гіббса та вираз для виробництва ентропії

$$df = \frac{1}{\rho} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : d\hat{\boldsymbol{e}} - s dT + \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} : d\hat{\boldsymbol{\rho}}^m + \hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} \overset{(3)}{\cdot} d\hat{\mathbf{M}}^{(3)}, \tag{28}$$

$$\sigma_s = -\mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T^2} . \tag{29}$$

Таким чином ми прийшли до просторово нелокальної (градієнтного типу) теорії термопружності, у простір параметрів стану якої, окрім тензора деформації та температури, входить також тензор третього рангу $\hat{\mathbf{M}}^{(3)}$ (градієнт потенціалу $\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}$) і густина наведеної маси $\hat{\boldsymbol{\rho}}^m$ (дивергенція тензора локального зміщення маси). Спряженими до них є питомий тензор локального зміщення маси $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}$ та потенціал $\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}$.

7. Визначальні співвідношення

Ґрунтуючись на виразі для виробництва ентропії (29), введемо у розгляд термодинамічні параметри процесу, а саме, потік $\mathbf{J}_q$ і силу $\mathbf{X} = -\frac{1}{T^2}\nabla T$. Причиною виникнення термодинамічного потоку є термодинамічна сила, тобто $\mathbf{J}_q = \mathbf{J}_q(\mathbf{X})$. Якщо таку залежність прийняти лінійною, то для анізотропних матеріалів запишемо: $\mathbf{J}_q = \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{X}$. Тут $\hat{\mathbf{L}}$ — кінетичні коефіцієнти (тензор другого рангу, компоненти якого можуть залежати від параметрів стану). Для ізотропних матеріалів це співвідношення набуде вигляду

$$\mathbf{J}_q = -\lambda \nabla T, \tag{30}$$

де λ — коефіцієнт теплопровідності.

Рівняння стану моделі запишемо, ґрунтуючись на узагальненому рівнянні Гіббса (28),

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \rho \frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{e}}}, \quad s = -\frac{\partial f}{\partial T}, \quad \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} = \frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}^m}, \quad \hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} = \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{M}}^{(3)}}. \tag{31}$$

Розвинемо вільну енергію f у ряд Тейлора відносно малих збурень параметрів стану щодо природного стану безмежного анізотропного однорідного середовища, в якому $T = T_0$, $s = s_0$, $\hat{\boldsymbol{e}} = 0$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 0$, $\hat{\boldsymbol{\rho}}^m = 0$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_0'^{\pi}$, $\hat{\mathbf{M}}^{(3)} = 0$, $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} = 0$. Щоб отримати лінійні рівняння стану достатньо обмежитись у цьому розвиненні доданками не вище квадратичних

$$\begin{aligned} f = {} & f_0 - s_0\,\theta + \hat{\boldsymbol{\mu}}_0'^{\pi} : \hat{\boldsymbol{\rho}}^m - \frac{C_V}{2T_0}\theta^2 + \frac{1}{2\rho_0}\hat{\mathbf{C}}^{(4)} \overset{(4)}{\cdot} (\hat{\boldsymbol{e}} \otimes \hat{\boldsymbol{e}}) + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{d}}^{\rho(4)} \overset{(4)}{\cdot} \left(\hat{\boldsymbol{\rho}}^m \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}^m\right) - \\ & - \frac{1}{\rho_0}\hat{\boldsymbol{\beta}} : \hat{\boldsymbol{e}}\,\theta - \frac{1}{\rho_0}\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\rho(4)} \overset{(4)}{\cdot} \left(\hat{\boldsymbol{e}} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}^m\right) - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{T\rho} : \hat{\boldsymbol{\rho}}^m\theta - \frac{1}{\rho_0}\hat{\mathbf{g}}^{(5)} \overset{(5)}{\cdot} \left(\hat{\boldsymbol{e}} \otimes \hat{\mathbf{M}}^{(3)}\right) - \\ & - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mu(3)} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\mathbf{M}}^{(3)}\,\theta - \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\chi}}^{m(6)} \overset{(6)}{\cdot} \left(\hat{\mathbf{M}}^{(3)} \otimes \hat{\mathbf{M}}^{(3)}\right) - \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{\rho(5)} \overset{(5)}{\cdot} \left(\hat{\mathbf{M}}^{(3)} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}^m\right). \end{aligned} \tag{32}$$

На основі співвідношень (31) і (32) одержуємо рівняння стану в явному вигляді

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \hat{\mathbf{C}}^{(4)} : \hat{\boldsymbol{e}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}\theta - \hat{\boldsymbol{\rho}}^m : \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\rho(4)} - \hat{\mathbf{M}}^{(3)} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\mathbf{g}}^{(5)}, \tag{33}$$

$$s = s_0 + \frac{C_V}{T_0}\theta + \hat{\boldsymbol{\beta}}^{T\rho} : \hat{\boldsymbol{\rho}}^m + \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mu(3)} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\mathbf{M}}^{(3)} + \frac{1}{\rho_0}\hat{\boldsymbol{\beta}} : \hat{\boldsymbol{e}}, \tag{34}$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_0'^{\pi} + \hat{\boldsymbol{d}}^{\rho(4)} : \hat{\boldsymbol{\rho}}^m - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{T\rho}\theta - \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{\rho(5)} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\mathbf{M}}^{(3)} - \frac{1}{\rho_0}\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\rho(4)} : \hat{\boldsymbol{e}}, \tag{35}$$

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} = -\hat{\boldsymbol{\chi}}^{m(6)} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\mathbf{M}}^{(3)} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{\rho(5)} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\boldsymbol{\rho}}^m - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mu(3)}\theta - \frac{1}{\rho_0}\hat{\mathbf{g}}^{(5)} : \hat{\boldsymbol{e}}, \tag{36}$$

де $\hat{\mathbf{C}}^{(4)}$ і $\hat{\alpha}^{\rho(4)}$ — тензори пружних модулів і об'ємного розширення, спричиненого локальним зміщенням маси; $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ — тензор термічного розширення; $\hat{\mathbf{g}}^{(5)}$ — тензор п'єзомасових модулів; C_V — питома теплоємність; $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{T\rho}$ — тензор, що описує залежність ентропії від питомої густини наведеної маси; $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mu(3)}$ — тензор піромасових коефіцієнтів; $\hat{\boldsymbol{d}}^{\rho(4)}$ — тензор четвертого рангу, компоненти якого описують залежність потенціалу $\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}$ від питомої густини наведеної маси; $\hat{\chi}^{m(6)}$ — тензор шостого рангу, який характеризує залежність тензора локального зміщення маси від градієнта потенціалу $\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}$; $\hat{\gamma}^{\rho(5)}$ — тензор п'ятого рангу, який характеризує залежність потенціалу $\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}$ від його градієнта. Порівняно із класичною моделлю термопружного тіла одержані тут рівняння стану містять нові величини $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{T\rho}$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mu(3)}$, $\hat{\boldsymbol{d}}^{\rho(4)}$, $\hat{\alpha}^{\rho(4)}$, $\hat{\gamma}^{\rho(5)}$ та $\hat{\chi}^{m(6)}$, які характеризують фізичні властивості середовища.

Розглянемо стан анізотропного тіла за відсутності дії на нього чинників механічної та теплової природи так, що деформації та збурення температури у ньому відсутні. Із співвідношень (33), (34) випливає, що у такій системі навіть за відсутності зовнішньої дії виникають напруження $\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = -\hat{\boldsymbol{\rho}}^m : \hat{\alpha}^{\rho(4)} - \hat{\mathbf{M}}^{(3)} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\mathbf{g}}^{(5)}\right)$ і збурення ентропії $\left(s - s_0 = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{T\rho} : \hat{\boldsymbol{\rho}}^m + \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mu(3)} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\mathbf{M}}^{(3)}\right)$, які спричинені зміною структури фізично малого елемента тіла. Такі зміни можуть бути зумовлені наявністю в тілі поверхні. За такого модельного опису навіть у матеріалах з високим рівнем симетрії локальне зміщення маси може бути причиною виникнення зсувних напружень. Таким чином, на відміну від моделі, запропонованої у праці [13], де міра впливу локального зміщення маси на внутрішню енергію системи та густина наведеної маси — величини скалярні, згідно рівняння стану (33) локальне зміщення маси впливає не лише на стиск-розтяг, а й на зміну форми тіла.

Для ізотропних матеріалів усі компоненти тензорів непарних рангів $\hat{\mathbf{f}}^{(3)}$, $\hat{\mathbf{g}}^{(5)}$ тотожно дорівнюють нулю, а для компонент тензорів другого, четвертого та шостого рангів маємо:

$$\beta_{ij} = \beta\delta_{ij}, \quad \beta_{ij}^{T\rho} = \beta^{T\rho}\delta_{ij}, \quad C_{ijkl}^{(4)} = C_1\delta_{ij}\delta_{kl} + C_2\delta_{ik}\delta_{jl} + C_3\delta_{il}\delta_{jk},$$

$$\alpha_{ijkl}^{\rho(4)} = a_1\delta_{ij}\delta_{kl} + a_2\delta_{ik}\delta_{jl} + a_3\delta_{il}\delta_{jk}, \quad d_{ijkl}^{\rho(4)} = d_1\delta_{ij}\delta_{kl} + d_2\delta_{ik}\delta_{jl} + d_3\delta_{il}\delta_{jk},$$

$$\chi_{ijknpl}^{m(6)} = \chi_1^m\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{pl} + \chi_2^m\delta_{ij}\delta_{kp}\delta_{nl} + \chi_3^m\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{np} + \chi_4^m\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{pl} + \chi_5^m\delta_{ik}\delta_{jp}\delta_{nl} +$$
$$+\chi_6^m\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{np} + \chi_7^m\delta_{in}\delta_{jk}\delta_{pl} + \chi_8^m\delta_{in}\delta_{jp}\delta_{kl} + \chi_9^m\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{kp} + \chi_{10}^m\delta_{ip}\delta_{jk}\delta_{nl} +$$
$$+\chi_{11}^m\delta_{ip}\delta_{jn}\delta_{kl} + \chi_{12}^m\delta_{ip}\delta_{jl}\delta_{kn} + \chi_{13}^m\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{np} + \chi_{14}^m\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{kp} + \chi_{15}^m\delta_{il}\delta_{jp}\delta_{kn},$$

де β, $\beta^{T\rho}$, C_i, a_i, d_i та χ_j^m ($i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,15}$) — сталі величини.

З огляду на записані вище формули, а також враховуючи, що тензори $\hat{\mathbf{C}}^{(4)}$, $\hat{\alpha}^{\rho(4)}$ і $\hat{\boldsymbol{d}}^{\rho(4)}$ симетричні за двома останніми індексами, рівняння стану (33)-(36) для ізотропних матеріалів набувають вигляду

$$\sigma_{*ij} = 2Ge_{ij} - 2G_{\rho e}\rho_{ij}^{m} + \left[\left(K - \frac{2}{3}G\right)e - K\alpha_T\theta - \left(K_{\rho e} - \frac{2}{3}G_{\rho e}\right)\rho_m\right]\delta_{ij}, \tag{37}$$

$$s = s_0 + \frac{C_V}{T_0}\theta + \frac{1}{\rho_0}K\alpha_T e + \beta^{T\rho}\rho_m, \tag{38}$$

$$\tilde{\mu}_{ij}^{\prime\pi} = 2G_\rho\rho_{ij}^{m} - \frac{2}{\rho_0}G_{\rho e}e_{ij} + \left[\left(K_\rho - \frac{2}{3}G_\rho\right)\rho_m - \beta^{T\rho}\theta - \frac{1}{\rho_0}\left(K_{\rho e} - \frac{2}{3}G_{\rho e}\right)e\right]\delta_{ij}, \tag{39}$$

$$\pi_{ijk}^{m(3)} = -\kappa_1\nabla_i\mu_{ll}^{\prime\pi}\delta_{jk} - \kappa_2\nabla_j\mu_{ll}^{\prime\pi}\delta_{ik} - \kappa_3\nabla_k\mu_{ll}^{\prime\pi}\delta_{ij} - \kappa_4\nabla_l\mu_{li}^{\prime\pi}\delta_{jk} -$$
$$-\kappa_5\nabla_l\mu_{lj}^{\prime\pi}\delta_{ik} - \kappa_6\nabla_l\mu_{lk}^{\prime\pi}\delta_{ij} - \kappa_7\nabla_i\mu_{kj}^{\prime\pi} - \kappa_8\nabla_j\mu_{ki}^{\prime\pi} - \kappa_9\nabla_k\mu_{ij}^{\prime\pi}. \tag{40}$$

Тут $\tilde{\mu}_{ij}^{\prime\pi} = \mu_{ij}^{\prime\pi} - \mu_{0ij}^{\prime\pi}$; σ_{*ij}, e_{ij}, $\mu_{ij}^{\prime\pi}$, ρ_{ij}^{m} та $\pi_{ijk}^{m(3)}$ — компоненти тензорів $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$, $\hat{\boldsymbol{e}}$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{\prime\pi}$, $\hat{\boldsymbol{\rho}}^{m}$ та $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}$; $\rho_m = \rho_{m\pi}/\rho_0$, $\beta = K\alpha_T$, $G = (C_2 + C_3)/2$, $G_{\rho e} = (a_2 + a_3)/2$, $G_\rho = (d_2 + d_3)/2$, $K = C_1 + (C_2 + C_3)/3$, $K_{\rho e} = a_1 + (a_2 + a_3)/3$, $K_\rho = d_1 + (d_2 + d_3)/3$, $\kappa_1 = \chi_7^m$, $\kappa_2 = \chi_4^m$, $\kappa_3 = \chi_1^m$, $\kappa_4 = \chi_{10}^m + \chi_{13}^m$, $\kappa_5 = \chi_5^m + \chi_6^m$, $\kappa_6 = \chi_2^m + \chi_3^m$, $\kappa_7 = \chi_8^m + \chi_9^m$, $\kappa_8 = \chi_{11}^m + \chi_{14}^m$, $\kappa_9 = \chi_{12}^m + \chi_{15}^m$.

Повна система співвідношень нелокальної (градієнтного типу) термомеханіки ізотропних деформівних тіл, що враховує процеси деформування, теплоперенесення та локальне зміщення маси, охоплює: рівняння руху (22), балансу ентропії (14), маси (12) і наведеної маси (19), формули (8) і (20), вираз для виробництва ентропії (29), визначальні (30), (37)-(40) і геометричні (25) співвідношення. Загалом ця система нелінійна. Кількість рівнянь у ній можна скоротити, якщо у балансові рівняння підставити визначальні та геометричні співвідношення. Для прикладу, якщо обмежитися ізотермічним наближенням, а за ключові функції вибрати вектор переміщення та тензор густини наведеної маси, то для ізотропних матеріалів розв'язувальна система рівнянь є така

$$G\Delta u_j + \left(K + \frac{1}{3}G\right)\nabla_j\nabla_l u_l - 2G_{\rho e}\nabla_l\rho_{lj}^{m} - \left(K_{\rho e} - \frac{2}{3}G_{\rho e}\right)\nabla_j\rho_m + \rho_0 F_{*j} = \rho_0\frac{d^2u_j}{dt^2},$$

$$\rho_{jk}^{m} = \left[W_1\Delta\rho_m - \left(W_1^e + \kappa_4\frac{2}{\rho_0}G_{\rho e}\right)\Delta\left(\nabla_l u_l\right)\right]\delta_{jk} + 2\kappa_4 G_\rho\nabla_i\nabla_l\rho_{li}^{m}\delta_{jk} +$$
$$+W_2\nabla_j\nabla_k\rho_m + 2\kappa_7 G_\rho\Delta\rho_{kj}^{m} + 2G_\rho\left[\left(\kappa_6 + \kappa_8\right)\nabla_j\nabla_l\rho_{lk}^{m} + \left(\kappa_5 + \kappa_9\right)\nabla_k\nabla_l\rho_{lj}^{m}\right] -$$
$$-W_2^e\nabla_k\nabla_j\nabla_l u_l - \frac{G_{\rho e}}{\rho_0}\left[\left(\kappa_6 + \kappa_7 + \kappa_8\right)\Delta\nabla_j u_k + \left(\kappa_5 + \kappa_7 + \kappa_9\right)\Delta\nabla_k u_j\right], \tag{41}$$

де

$$W_1 = 3\kappa_1 K_\rho + (\kappa_4 + \kappa_7)\left(K_\rho - \frac{2}{3}G_\rho\right),$$

$$W_1^e = \frac{1}{\rho_0}\left[3\kappa_1 K_{\rho e} + (\kappa_4 + \kappa_7)\left(K_{\rho e} - \frac{2}{3}G_{\rho e}\right)\right],$$

$$W_2 = 3(\kappa_2 + \kappa_3)K_\rho + (\kappa_9 + \kappa_5 + \kappa_8 + \kappa_6)\left(K_\rho - \frac{2}{3}G_\rho\right),$$

$$W_2^e = \frac{1}{\rho_0}\left[3(\kappa_2 + \kappa_3)K_{\rho e} + (\kappa_8 + \kappa_6 + \kappa_9 + \kappa_5)\left(K_{\rho e} + \frac{1}{3}G_{\rho e}\right)\right].$$

8. Зв'язок із градієнтною теорією пружності Айфантіса-Ру

Порівняємо рівняння стану (2)-(5) і (37)-(40) нелокальних (градієнтного типу) моделей термопружного тіла, що ґрунтуються на врахуванні процесу локального зміщення маси, з рівнянням стану (1) градієнтної теорії пружності Айфантіса-Ру. Для коректності порівняння обмежимось у співвідношеннях (2)-(5) і (37)-(40) ізотермічним наближенням. Розглянемо насамперед випадок, коли величини μ'_π та ρ_m є скалярні (див. рівняння стану (2)-(5)). Якщо в рівнянні (6) перейти до питомих величин і врахувати (4) та (5), то для знаходження потенціалу $\tilde{\mu}'_\pi$ отримаємо таке співвідношення

$$\Delta\mu'_\pi - \lambda_\mu^2\tilde{\mu}'_\pi = \lambda_\mu^2\frac{K_{\rho e}}{\rho_0}e, \tag{42}$$

де $\lambda_\mu^2 = 1\big/\left(K_\rho\chi_m\right)$. Подіємо тепер на рівняння стану (2) оператором $\lambda_\mu^{-2}\Delta$. Результатом цього є

$$\frac{1}{\lambda_\mu^2}\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \frac{2G}{\lambda_\mu^2}\Delta\hat{\boldsymbol{e}} + \frac{1}{\lambda_\mu^2}\left[\left(K - \frac{2}{3}G - \frac{K_{\rho e}^2}{\rho_0 K_\rho}\right)\Delta e - \frac{K_{\rho e}}{K_\rho}\Delta\tilde{\mu}'_\pi\right]\hat{\mathbf{I}}. \tag{43}$$

Віднявши формулу (43) від (2), одержимо

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda_\mu^2}\Delta\right)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \left(1 - \frac{1}{\lambda_\mu^2}\Delta\right)\left[2G\hat{\boldsymbol{e}} + \left(K - \frac{2}{3}G - \frac{K_{\rho e}^2}{\rho_0 K_\rho}\right)e\hat{\mathbf{I}}\right] + \frac{K_{\rho e}}{K_\rho\lambda_\mu^2}\left(\Delta\tilde{\mu}'_\pi - \lambda_\mu^2\tilde{\mu}'_\pi\right)\hat{\mathbf{I}}.$$

Якщо у правій частині цієї рівності врахувати рівняння (42), то остаточно отримаємо

$$\left(1 - \tilde{c}'_1\Delta\right)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 2G\left(1 - \tilde{c}'_1\Delta\right)\hat{\boldsymbol{e}} + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\left(1 - \tilde{c}'_2\Delta\right)e\hat{\mathbf{I}}, \tag{44}$$

де

$$\tilde{c}_1' = \frac{1}{\lambda_\mu^2}, \qquad \tilde{c}_2' = \left(1 - \frac{K_{\rho e}^2}{\rho_0 K_\rho \left(K - 2G/3\right)}\right)\frac{1}{\lambda_\mu^2} = c'\tilde{c}_1'.$$

Таким чином, виключивши з допомогою (4)-(6) із рівняння стану (2) густину наведеної маси, ми отримали співвідношення (44), за структурою близьке до рівняння стану (1) градієнтної теорії пружності, однак, на відміну від (1), у правій частині формули (44) біля лапласіана тензора деформації та його кульового складника стоять різні коефіцієнти. Це пояснюється тим, що в межах модельного опису, запропонованого у працях [13, 15], локальне зміщення маси пов'язане з процесами стискування–розтягування і не впливає на зсувні напруження.

За врахування формули $\underline{\Delta} = L_*^2 \Delta$ перейдемо у співвідношеннях (44) до безрозмірних змінних (L_* — характерна віддаль). Запишемо формулу (44) так

$$\left(1 - \frac{1}{L_*^2 \lambda_\mu^2}\underline{\Delta}\right)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 2G\left(1 - \frac{1}{L_*^2 \lambda_\mu^2}\underline{\Delta}\right)\hat{\boldsymbol{e}} + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\left(1 - c'\frac{1}{L_*^2 \lambda_\mu^2}\underline{\Delta}\right)e\hat{\mathbf{I}}. \tag{45}$$

Позаяк λ_μ за порядком є величиною $10^5 \div 10^7$ м$^{-1}$, то вплив «операторних» доданків для тіл із великими характерними віддалями (товстих тіл) — нехтовно малий. Однак цей вплив буде відчутний для тіл чи процесів із характерними віддалями порядку $10^{-5} \div 10^{-7}$ м, тобто, якщо об'єктами дослідження є тонкі плівки, волокна чи тіла, у яких поширюються хвилі з довжинами, сумірними до періоду ґратки, і т. д. Зазначимо також, що якщо останнє співвідношення формально розглядати як запис закону Гука у теорії пружності, то коефіцієнти у ньому залежатимуть від $\left(L_* \lambda_\mu\right)^{-2}$, тобто від характерної віддалі. Таким чином для малорозмірних об'єктів формула (45) описуватиме масштабний ефект модулів пружності.

Повернемось тепер до рівнянь стану (37), (39) і (40). Якщо у виразі (40) додатково прийняти

$$\kappa_4 = 0,\ \kappa_5 + \kappa_9 = 0,\ \kappa_6 + \kappa_8 = 0,\ \kappa_2 + \kappa_3 = 0,\ \kappa_1 = -\frac{\kappa_7}{3K_\rho}\left(K - \frac{2}{3}G\right), \tag{46}$$

то в результаті низки аналогічних до проведених вище перетворень із врахуванням рівнянь (41) і (25) одержимо таке визначальне співвідношення для компонент тензора напружень

$$\left(1 - b_1\Delta\right)\sigma_{*ij} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\left(1 - b_2\Delta\right)e\delta_{ij} + 2G\left(1 - b_3\Delta\right)e_{ij}. \tag{47}$$

Тут

$$b_1 = 2G_\rho \kappa_7, \quad b_2 = 2G_\rho \kappa_7 \left(1 - \overline{\gamma}\right), \quad b_3 = 2G_\rho \kappa_7 \left(1 - \overline{\overline{\gamma}}\right),$$

$$\overline{\gamma} = \frac{1}{\rho_0}\left(K - \frac{2}{3}G\right)^{-1}\left(\frac{K_{\rho e}^2}{K_\rho} - \frac{2}{3}\frac{G_{\rho e}^2}{G_\rho}\right), \quad \overline{\overline{\gamma}} = \frac{G_{\rho e}^2}{\rho_0 G G_\rho}.$$

Бачимо, що навіть за використання низки спрощуючих припущень (46), виключивши із рівняння стану для тензора напружень параметри, пов'язані з локальним зміщенням маси, ми прийшли до більш загального зв'язку між тензорами $\hat{\sigma}_*$ та $\hat{\boldsymbol{e}}$, аніж передбачає теорія Айфантіса-Ру. На відміну від теорії Айфантіса-Ру, яка характеризується двома градієнтними коефіцієнтами $\tilde{c}_1$ і $\tilde{c}_2$, визначальне співвідношення (47) містить три градієнтні коефіцієнти b_1, b_2, b_3. Те, що $b_2 \neq b_3$ ілюструє той факт, що «нелокальні» властивості середовища по різному проявлятимуться під час деформацій стиску-розтягу та деформацій зсуву, тоді як згідно теорії Айфантіса-Ру вплив цих деформацій на напруження — однаковий.

Висновки. Для врахування впливу локального зміщення маси на зсувні напруження, побудовану у праці [13] модель термопружного тіла поширено на матеріали, у яких параметри, пов'язані з локальним зміщенням маси, є тензорними величинами другого рангу. Одержано відповідні модельному опису визначальні співвідношення та розв'язувальну систему рівнянь. Показано, що у цьому разі, на відміну від результатів, отриманих у дослідженні [13], в ізотропних матеріалах локальне зміщення маси впливає не лише на напруження стиску-розтягу, а й може бути причиною виникнення зсувних напружень. Проведено порівняння отриманих визначальних співвідношень із рівняннями стану градієнтної теорії пружності Айфантіса-Ру. Показано, що навіть за низки спрощуючих припущень, побудована тут теорія є більш загальною, аніж теорія Айфантіса-Ру.

Література

[1] *Kroner E.* Elasticity theory of materials with long range cohesive forces // Int. J. Solids and Structures. — 1967. — Vol. 3. — P. 731-742.
[2] *Eringen A. C., Edelen D. G. B.* On nonlocal elasticity // Int. J. Engng Sci. — 1972. — Vol. 10, Issue 3. — P. 233-248.
[3] *Toupin R. A.* Elastic materials with couple-stresses // Arch. Ration. Mech. Analysis. — 1962. — Vol. 11. — P. 385-414.
[4] *Mindlin R. D.* Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity // Int. J. Solids Struct. — 1965. — Vol. 1, No 4. P. 417-438.
[5] *Ru C. Q., Aifantis E. C.* A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity // Acta Mechanica. — 1993. — Vol. 101, No 1. — P. 59-68.
[6] *Aifantis E. C.* Gradient effects at the micro-, macro- and nanoscales // J. Mech. Behaviour of Materials. — 1994. — Vol. 5, No 3. — P. 355-375.
[7] *Гуткин М. Ю., Айфантис Е. С.* Дислокации и дисклинации в градиентной теории упругости // Физика твердого тела. — 1999. — Т. 41, вып. 12. — С. 2158-2166.
[8] *Новацкий В.* Теория упругости. — Москва: Мир, 1975. — 872 с.
[9] *Грицина О. Р., Нагірний Т. С., Червінка К. А.* Локально градієнтний підхід у термомеханіці // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2006. — Вип. 3. — С. 72-83.

[10] *Кондрат В., Грицина О.* Лінійні теорії електромагнітомеханіки діелектриків // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2009. — Вип. 9. — С. 7-46.
[11] *Бурак Я. Й., Нагірний Т. С.* Теоретичні основи розрахунку локально-градієнтних термомеханічних систем з врахуванням поверхневих явищ // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1993. — № 4. — С. 24-30.
[12] *Нагірний Т. С., Червінка К. А.* Модель термопружного твердого тіла з урахуванням ефектів локальної градієнтності та тензорного характеру хімічного потенціалу // Доп. НАН України. — 2000. — № 2. — С. 50-53.
[13] Математичне моделювання термомеханічних процесів у пружних тілах із врахуванням локального зміщення маси / *Я. Й. Бурак, Чапля Є. Я., В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина* // Доповіді НАН України. — 2007. — № 6. — С. 45-49.
[14] *Кондрат В., Грицина О.* Рівняння термомеханіки деформівного твердого тіла з урахуванням необоротності локального зміщення маси // Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 2008. — Т. 51, № 1. — С. 169-177.
[15] *Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Механоелектромагнітна взаємодія в ізотропних діелектриках з урахуванням локального зміщення маси // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2009. — Т. 52, № 1. — С. 150-158.
[16] *Подстригач Я. С.* Диффузионная теория неупругости металлов. — Журнал прикладной механики и технической физики — 1965. — № 2. — С. 67-72.

On description of an effect of local mass displacement on shear stresses

Olha Hrytsyna

A complete system of equations nonlocal (gradient type) theory of thermoelasticity with accounting of an effect of a local mass displacement on shear stresses has been formulated using the methods of continuum mechanics and nonequilibrium thermodynamics. The corresponding linear solving system of equations has been obtained for isotropic materials on isothermal approximation. The obtained constitutive equations and state equations of Aifantis-Ru's gradient theory of elasticity have been compared.

К описанию влияния локального смещения массы на напряжения сдвига

Ольга Грицина

С использованием методов механики сплошной среды и неравновесной термодинамики сформулирована полная система соотношений нелокальной (градиентного типа) теории термоупругости, учитывающей влияние локального смещения массы на касательные напряжения. В изотермическом приближении для изотропных материалов получено соответствующую линейную ключевую систему уравнений. Определяющие соотношения модели сравнены с уравнением состояния градиентной теории упругости Айфантиса-Ру.

Представлено професором В. Чекуріним

Отримано 24.10.12