

Локальне фрикційне проковзування пружних тіл із хвилястим рельєфом поверхонь

Наталія Маланчук

К. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

У роботі розглянуто контакт двох пружних ізотропних півпросторів, один з яких має циліндричну хвилясту поверхню, з урахуванням часткового фрикційного проковзування, за послідовного навантаження стискальними та зсувними зусиллями. Напружено-деформований стан тіл подано через функцію рельєфу поверхні одного з півпросторів і функцію відносного зсуву меж тіл на ділянках проковзування. Для визначення функції відносного зсуву отримано сингулярне інтегральне рівняння з ядром Гільберта, розв'язок якого побудовано у замкненому вигляді. Проаналізовано залежності контактних параметрів розглянутої системи від прикладеного навантаження.

Ключові слова: контактна взаємодія, фрикційне проковзування, відносний зсув, хвилясті поверхні.

Вступ. Базуючись на аналітичних розв'язках контактних задач для тіл із періодичними нерівностями поверхонь можна прогнозувати контактну міцність, жорсткість і зношування спряжень із регулярним рельєфом поверхонь. У літературі в основному вивчено безфрикційний і ковзний фрикційний контакт тіл із періодичними та хвилястими поверхнями.

Огляд плоских і просторових контактних задач такого типу наведено у працях [1-3]. Періодичні ж контактні задачі з урахуванням зчеплення і проковзування на сьогодні розглянуто лише в декількох публікаціях [2-5].

У цій роботі побудовано аналітичний розв'язок плоскої контактної задачі про взаємодію двох пружних півпросторів, поверхня одного з яких має хвилястий рельєф, за виникнення періодично розташованих ділянок часткового проковзування. Визначено залежності довжини ділянок проковзування, відносного зсуву поверхонь і контактних напружень від прикладеного навантаження.

1. Формулювання контактної задачі

Розглянемо два ізотропні півпростори S_1 і S_2 з однакових матеріалів. Межа одного з півпросторів плоска. Інший півпростір має циліндричну хвилясту поверхню (рис. 1а). Її форма в системі координат Oxy , розташованій у площині поперечного перерізу тіл, перпендикулярній до твірної хвилястої поверхні, описується періодичною функцією

$$r(x) = r(x + kd) = -r_0 \cos^2 \frac{\pi x}{d}, \quad x \in [-\infty, \infty]. \quad (1)$$

Тут і надалі $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, d — період. Максимальне відхилення хвилястої поверхні від плоскої є значно меншим від періоду ($r_0 \ll d$).

Вважаємо, що під дією прикладеного навантаження тіла контактують, перебуваючи в стані плоскої деформації. Тому будемо розглядати взаємодію двох півплощин D_1 і D_2 , утворених внаслідок перетину півпросторів координатною площиною Oxy (рис. 1б). Процес навантаження є послідовним: спершу тіла притискаються одне до одного прикладеним на нескінченності монотонно зростаючим номінальним тиском $P = p/d$, де p — навантаження, що припадає на один період. При цьому монотонно зменшуються розміри міжконтактних зазорів, зумовлених хвилястим рельєфом поверхні одного з тіл. Залежно від величини номінального тиску може реалізуватися або неповний контакт тіл, за якого в межах кожного періоду між поверхнями буде зазор, коли $P < P_{cls}$, або повний контакт тіл, якщо $P \geq P_{cls}$, де P_{cls} — номінальний тиск, за якого зазори закриваються повністю та всі точки обох поверхонь сконтактують. У цій роботі розглядатимемо номінальний тиск $P \geq P_{cls}$, за якого реалізується повний контакт тіл.

Далі нормальне навантаження залишається постійним, а до тіл на безмежності прикладаються номінальні дотичні напруження $S = s/d$, де s — дотичні сили, що діють на один період. Згідно з законом Кулона-Амонтона поверхні тіл зчепленні до тих пір, поки дотичні контактні напруження $S(x) = \tau_{xy}(x, 0)$ є менші, ніж контактний тиск $P(x)$, помножений на коефіцієнт тертя f : $S(x) < fP(x)$. Тому, залежно від величини номінальних дотичних напружень S , поверхні тіл або перебувають у зчепленні (якщо $0 < S < S_0$, де $S_0 = f(P - P_{cls})$ — критичне значення номінальних дотичних напружень), або локально проковзують одна стосовно іншої (якщо $S_0 < S < fP$), або відбувається глобальне ковзання тіл (якщо $S = fP$). У цій роботі розглядатимемо номінальні дотичні напруження S

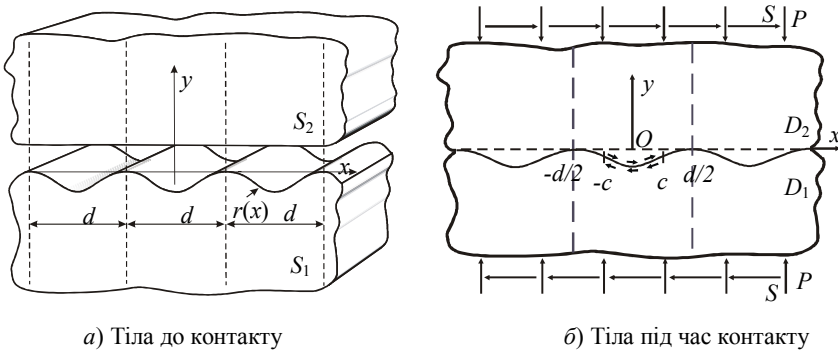


Рис. 1

з діапазону $S_0 < S < fP$, за яких у межах кожного періоду від його центру розвиватиметься ділянка фрикційного проковзування шириною $2c$, на якій діють дотичні напруження $S(x) = fP(x)$, зумовлені силами тертя (рис. 1б, малими стрілками позначено напрям проковзування поверхонь). Поза ділянками проковзування поверхні тіл перебувають у зчепленні, а дотичні контактні напруження є менші, ніж контактний тиск, помножений на коефіцієнт тертя: $S(x) < fP(x)$.

Позначимо $I_k^c = [-c + kd, c + kd]$, $J_k^c = [-d/2 + kd, -c + kd] \cup [c + kd, d/2 + kd]$.

За вище сказаного крайові умови контактної задачі матимуть вигляд: на ділянках проковзування ($x \in I_k^c$):

$$\sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y^+(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0), \quad v^-(x, 0) - v^+(x, 0) = -r(x); \quad (2)$$

$$\tau_{xy}^-(x, 0) = -f\sigma_y^-(x, 0); \quad (3)$$

на ділянках зчеплення ($x \in J_k^c$):

$$\sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y^+(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0), \quad u^-(x, 0) = u^+(x, 0);$$

$$v^-(x, 0) - v^+(x, 0) = -r(x); \quad (4)$$

на нескінченності в кожній із півплощин D_1 і D_2 :

$$\sigma_y = -P, \quad \tau_{xy} = S, \quad \sigma_x = 0. \quad (5)$$

Тут $\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy}$ та u, v — компоненти тензора напружень і вектора переміщень; індексами «-» та «+» позначено граничні значення функцій на лінії спряження півплощин D_1 і D_2 .

2. Зведення задачі до сингулярного інтегрального рівняння

Для розв'язання сформульованої плоскої контактної задачі про зчеплення та проковзування тіл із хвилястими поверхнями поширено метод, який раніше було застосовано до аналогічних задач для тіл із поодинокими виїмками [6-9] і тіл із періодичними системами виїмок [4].

Поверхні тіл зсуваються одна відносно одної на ділянках проковзування, тому введемо функцію відносного зсуву $U(x)$ меж тіл на цих ділянках:

$$u^-(x, 0) - u^+(x, 0) = U(x), \quad x \in I_k^c.$$

Подамо напруження та похідні від переміщень у комплексному вигляді через відносний зсув меж тіл $U(x)$ і форму хвилястої поверхні $r(x)$ [4, 6]:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re}[\Phi_l(z)] - P; \quad \sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi_l(z) - \Phi_l(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_l'(z)} - P - iS; \\ 2G(u' + iv') &= \kappa\Phi_l(z) + \Phi_l(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_l'(z)} + \frac{3 - \kappa}{4}P, \quad z \in D_l, \quad l = 1, 2; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{(-1)^l G}{di(1+\kappa)} \left(\int_{-c}^c U'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{d} dt - i \int_{-d/2}^{d/2} r'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{d} dt \right),$$

$$\Phi_2(z) = -\Phi_1(z), \quad z \in D_l, \quad l=1,2. \quad (7)$$

Тут $z = x + iy$ — комплексна змінна; $\kappa = 3 - 4\nu$; G — модуль зсуву; ν — коефіцієнт Пуассона; $\Phi_1(z), \Phi_2(z)$ — комплексні потенціали.

За формулами (6), (7) визначимо нормальні та дотичні контактні напруження

$$\sigma_y(x,0) = \frac{2G}{d(1+\kappa)} \int_{-d/2}^{d/2} r'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt - P, \quad (8)$$

$$\tau_{xy}(x,0) = -\frac{2G}{d(1+\kappa)} \int_{-c}^c U'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt + S. \quad (9)$$

Подання (6), (7) задовольняють крайові умови (2), (4), (5) контактної задачі. Підставивши вирази (8) і (9) у крайову умову (3), отримаємо сингулярне інтегральне рівняння (СІР) з ядром Гільберта для знаходження похідної відносно зсуву меж тіл

$$\int_{-c}^c U'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt = \frac{d(1+\kappa)}{2G} (S - fP) + f \int_{-d/2}^{d/2} r'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt, \quad |x| \leq c. \quad (10)$$

Функція $U(x)$ задовольняє умови

$$U(-c + kd) = 0, \quad U(c + kd) = 0, \quad U'(-c + kd) = 0, \quad U'(c + kd) = 0. \quad (11)$$

Перші дві умови (11) впливають із неперервності дотичних переміщень границь тіл, а останні дві умови вказують на обмеженість дотичних напружень на кінцях ділянок проковзування.

Введемо змінні $\xi = \operatorname{tg}(\pi x/d)$, $\eta = \operatorname{tg}(\pi t/d)$, в яких функція (1) набуває вигляду $r(\xi) = -r_0 / (1 + \xi^2)$ та СІР з ядром Гільберта (10) трансформується в СІР з ядром Коші

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{U'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d(1+\kappa)(S - fP)}{2G(1+\xi^2)} + \frac{r_0 \pi f (1 - \xi^2)}{d(1+\xi^2)^2}, \quad |\xi| \leq \alpha, \quad (12)$$

де $\alpha = \operatorname{tg}(\pi c/d)$.

У цих нових змінних умови (11) запишуться так

$$U(-\alpha) = 0, \quad U(\alpha) = 0, \quad U'(-\alpha) = 0, \quad U'(\alpha) = 0. \quad (13)$$

3. Розв'язування задачі

Згідно з останніми двома умовами (13) шукатимемо обмежений розв'язок СІР (12), проінтегрувавши який з урахуванням першої умови з (13), визначимо $U(\xi)$. У початкових змінних відносної зсув меж тіл $U(x)$ запишеться так:

$$U(x) = \frac{d(1+\kappa)(S-fP)}{2G\pi} \left[-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\pi c/d)} + \sqrt{\operatorname{tg}^2(\pi c/d) - \operatorname{tg}^2(\pi x/d)}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\pi c/d)} - \sqrt{\operatorname{tg}^2(\pi c/d) - \operatorname{tg}^2(\pi x/d)}} \right| + \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\pi c/d) - \operatorname{tg}^2(\pi x/d)}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\pi c/d)}} \right] - \frac{f r_0 [\operatorname{tg}^2(\pi c/d) - \operatorname{tg}^2(\pi x/d)]^{3/2}}{[1+\operatorname{tg}^2(\pi c/d)]^{3/2} [1+\operatorname{tg}^2(\pi x/d)]}, \quad x \in I_k^c. \quad (14)$$

Згідно з теорією сингулярних інтегральних рівнянь [10] обмежений розв'язок СІР (12) існує тоді, коли його права частина задовольняє додаткову умову, з якої знайдемо півдовжину c ділянки проковзування

$$c = \frac{d}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{2G\pi f r_0}{d(1+\kappa)(S-fP)} - 1}. \quad (15)$$

Із виразів (8) і (9) визначимо контактні нормальні та дотичні напруження

$$\sigma_y(x, 0) = -\frac{2Gr_0\pi [\operatorname{tg}^2(\pi x/d) - 1]}{d(1+\kappa) [1+\operatorname{tg}^2(\pi x/d)]} - P, \quad x \in [-d/2 + kd, d/2 + kd], \quad (16)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = \frac{2Gr_0 f \pi [\operatorname{tg}^2(\pi x/d) - 1]}{d(1+\kappa) [1+\operatorname{tg}^2(\pi x/d)]} + fP, \quad x \in I_k^c, \quad (17)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = \frac{2Gr_0 f \pi [\operatorname{tg}^2(\pi x/d) - 1]}{d(1+\kappa) [1+\operatorname{tg}^2(\pi x/d)]} + fP - \frac{4Gr_0 f \pi}{d(1+\kappa) [1+\operatorname{tg}^2(\pi x/d)]} \times \left| \operatorname{tg} \frac{\pi x}{d} \right| \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\pi x/d) - \operatorname{tg}^2(\pi c/d)}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\pi c/d)}}, \quad x \in J_k^c. \quad (18)$$

Із рівності $\min P(x) = P(0 + kd) = 0$ і виразу (16) знайдемо значення номінального тиску, за якого сконтактують всі точки обох поверхонь

$$P_{cls} = 2Gr_0\pi/d(1+\kappa). \quad (19)$$

З рівностей $S_0 = f(P - P_{cls})$ і (19) знайдемо критичне значення номінальних дотичних напружень S_0 , у разі перевищення якого на поверхні контакту тіл починають розвиватися ділянки фрикційного проковзування:

$$S_0 = f [P - 2Gr_0\pi/d(1+\kappa)]. \quad (20)$$

Отже, для номінального тиску та номінальних дотичних напружень, що задовольняють нерівності

$$P \geq 2Gr_0\pi/d(1+\kappa), \quad f[P - 2Gr_0\pi/d(1+\kappa)] < S < fP, \quad (21)$$

справедливі вирази (14)-(18), що є розв'язком сформульованої задачі.

4. Аналіз контактних характеристик

Для числових розрахунків введено безрозмірні величини: координату $\tilde{x} = x/d$, максимальну висоту функції профілю поверхні $\tilde{r}_0 = r_0/d$, півдовжину ділянки проковзування $\tilde{c} = c/d$, відносний зсув меж тіл $\tilde{U} = U/d$, дотичні напруження $\tilde{\tau}_{xy} = \tau_{xy}/G$, нормальні напруження $\tilde{\sigma}_y = \sigma_y/G$, номінальні дотичні напруження $\tilde{S} = S/G$, номінальний тиск $\tilde{P} = P/G$. Числові розрахунки проведено у випадку коефіцієнта Пуассона тіл $\nu = 0,2$, коефіцієнта тертя $f = 0,1$ та $\tilde{r}_0 = 0,0001$.

На рис. 2 зображено залежність півдовжини ділянки проковзування \tilde{c} від номінального дотичного напруження \tilde{S} для різних значень номінального тиску ($\tilde{P} = 2 \cdot 10^{-4}$; $\tilde{P} = 3 \cdot 10^{-4}$; $\tilde{P} = 4 \cdot 10^{-4}$; $\tilde{P} = 5 \cdot 10^{-4}$ криві 1-4 відповідно). Горизонтальна ділянка графіка відповідає повному зчепленню тіл на початковому етапі навантаження (коли $0 < \tilde{S} < \tilde{S}_0$). Далі, зі збільшенням номінального зсувного напруження в діапазоні $\tilde{S}_0 < \tilde{S} < f\tilde{P}$, розміри ділянки проковзування збільшуються. За досягнення номінальним зсувним напруженням величини номінального тиску, помноженого на коефіцієнт тертя ($\tilde{S} = f\tilde{P}$), краї ділянки проковзування досягають кінців періоду та відбувається перехід від локального проковзування поверхонь до глобального ковзання тіл.

Рис. 3 ілюструє розподіл відносного зсуву меж тіл $|\tilde{U}(\tilde{x})|$ на ділянці проковзування за дії номінального тиску $\tilde{P} = 2 \cdot 10^{-4}$ для різних значень номінального

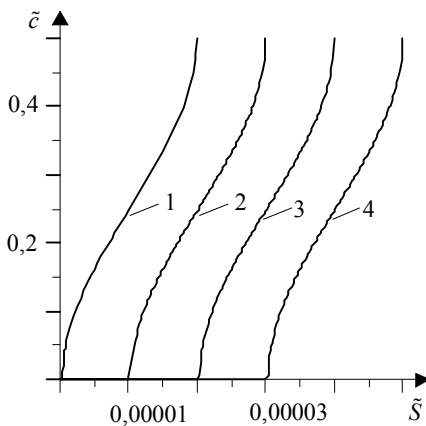


Рис. 2. Залежність півдовжини ділянки проковзування від номінального дотичного напруження

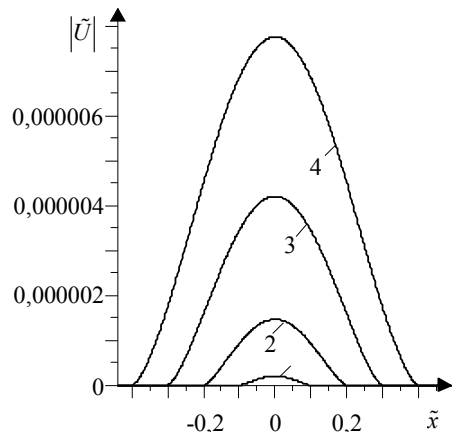


Рис. 3. Розподіл відносного зсуву меж тіл на ділянці проковзування

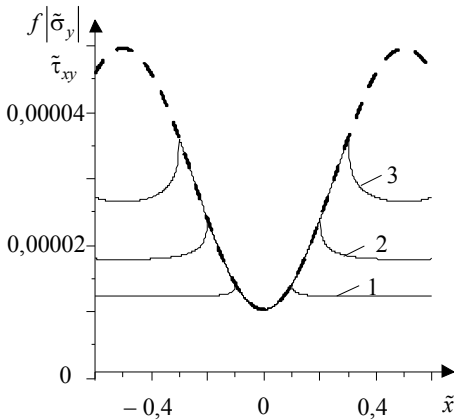


Рис. 4. Розподіл контактних напружень

$= 2,322 \cdot 10^{-5}$ криві 1-3 відповідно). Своїх мінімальних і максимальних значень контактний тиск досягає у найнижчих і найвищих точках періоду. Дотичні контактні напруження досягають свого мінімального значення в центрі періоду, а у разі віддалення від нього монотонно зростають, досягаючи максимального значення на краях ділянки проковзування. Збільшення номінальних зсувних напружень \tilde{S} призводить до збільшення максимальних дотичних напружень. На ділянках проковзування графіки $f|\tilde{\sigma}_y|$ і $\tilde{\tau}_{xy}(\tilde{x})$ співпадають. Поза ділянками проковзування графіки дотичних напружень лежать нижче, ніж графік контактного тиску, помноженого на коефіцієнт тертя.

зсувного напруження ($\tilde{S} = 2,24 \cdot 10^{-6}$; $\tilde{S} = 7,149 \cdot 10^{-6}$; $\tilde{S} = 1,322 \cdot 10^{-5}$; $\tilde{S} = 1,813 \cdot 10^{-5}$ криві 1-4 відповідно). Максимум відносного зсуву меж тіл досягається в центрі періоду та збільшується зі збільшенням номінального зсувного напруження. На рис. 4 проілюстровано розподіл контактного тиску, помноженого на коефіцієнт тертя $f|\tilde{\sigma}_y|$ (штрихова крива), та дотичних контактних напружень $\tilde{\tau}_{xy}(\tilde{x})$ (суцільні криві) за дії номінального тиску $\tilde{P} = 3 \cdot 10^{-4}$ та номінальних дотичних напружень ($\tilde{S} = 1,224 \cdot 10^{-5}$; $\tilde{S} = 1,715 \cdot 10^{-5}$; $\tilde{S} =$

Висновки. Досліджено контактну взаємодію двох пружних півпросторів з однакових матеріалів, один з яких має хвилясту циліндричну поверхню, з урахуванням зчеплення та проковзування за послідовного навантаження номінальним тиском і номінальними дотичними напруженнями. Базуючись на знайденому аналітичному розв'язку задачі, проаналізовано залежність півдовжини ділянки проковзування від номінального дотичного напруження, а також розподіли відносного зсуву меж тіл і контактних напружень. Знайдено критичне значення номінального дотичного напруження, у разі перевищення якого розпочинається локальне проковзування поверхонь. Відносний зсув поверхонь зростає зі збільшенням номінального дотичного напруження та набуває свого максимального значення в центрі періоду. Максимум дотичних контактних напружень досягається на краях ділянок проковзування та зростає зі збільшенням номінального дотичного напруження.

Роботу виконано за підтримки гранту 23-08-12 Національної академії наук України.

Література

- [1] Горячева И. Г., Мартыняк Р. М. Периодические контактные задачи с трением и изнашиванием поверхностей // Развитие идей Л. А. Галина в механике. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012. — С. 314-344.
- [2] Antipov Y. A. Galin's problem for a periodic system of stamps with friction and adhesion // Int. J. Solids Structures. — 2000. — Vol. 37, No 15. — P. 2093-2125.

- [3] *Ciavarella M.* The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II: Examples // *Int. J. Solids Structures.* — 1998. — Vol. 35, No 18. — P. 2363-2378.
- [4] *Горячева И. Г., Маланчук Н. И., Мартыняк Р. М.* Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании // *Прикладная математика и механика.* — 2012. — Т. 76, № 5. — С. 695-709.
- [5] *Block J. M., Keer L. M.* Periodic contact problems in plane elasticity // *J. Mech. Materials and Structures.* — 2008. — Vol. 3, No 7. — P. 1207-1237.
- [6] *Мартыняк Р. М., Маланчук Н. И., Монастирський Б. С.* Зсув притиснутих одна до одної півплощин з поверхневою виїмкою. Ч. 1. Повний контакт // *Фіз.-хім. мех. матеріалів.* — 2005. — Т. 41, № 2. — С. 39-44.
- [7] *Мартыняк Р. М., Маланчук Н. И., Монастирський Б. С.* Пружна взаємодія двох півплощин за локального зсуву границь на ділянці міжконтактного просвіту // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2005. — Т. 48, № 3. — С. 101-109.
- [8] *Malanchuk N., Martynyak R., Monastyrskyy B.* Thermally induced local slip of contacting solids in vicinity of surface groove // *Int. J. Solids Structures.* — 2011. — Vol. 48, No 11-12. — P. 1791-1797.
- [9] *Malanchuk N., Martynyak R.* Contact interaction of two solids with surface groove under proportional loading // *Int. J. Solids Structures.* — 2012. — Vol. 49, No 23-24. — P. 3422-3431.
- [10] *Мухомелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — Москва: Гос. изд-во физ.-мат. л-ры, 1962. — 600 с.

Local friction slip of elastic solids with a wavy surfaces

Nataliya Malanchuk

A friction contact interaction of two elastic isotropic solids, one of which has a wavy surface, under sequential loading of normal and shear forces is considered. Stress-strain state of bodies is represented through functions of surface relief of bodies and relative tangential shift of boundaries at slip zones. The singular integral equation with Hilbert kernel is obtained to determine the function of the relative tangential shift of the boundaries. The solution of the singular integral equation is constructed in a closed form. The analysis of contact parameters of the contacting couple due to the applied loading is carried out.

Локальное фрикционное проскальзывание упругих тел с волнистым рельефом поверхностей

Наталья Маланчук

Рассмотрено контактное взаимодействие двух упругих изотропных полупространств, одно из которых имеет цилиндрическую волнистую поверхность, с учетом частичного фрикционного проскальзывания при последовательном нагружении сжимающими и сдвиговыми усилиями. Напряженно-деформированное состояние тел представлено через функцию рельефа поверхности одного из полупространств и функцию относительного сдвига границ тел на участках проскальзывания. Для определения функции относительного сдвига получено сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта, решение которого построено в замкнутом виде. Проанализированы зависимости контактных параметров рассматриваемой системы от приложенной нагрузки.

Представлено доктором фізико-математичних наук Р. Мартиняком

Отримано 28.03.13